МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.А. ХАМЗИН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
по дисциплине
«Математика»

Для студентов заочной формы обучения
инженерно-технических специальностей

Казань 2009

УДК 517.5
ББК 22.161.6
Х18

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета *Р.Х. Сафаров*;
доктор физико-математических наук, профессор Казанского государственного энергетического университета *Ф.Н. Гарифьянов*

Хамзин А.А.

Х18 Высшая математика: учеб. пособие. Для студентов заочной формы обучения инженерно-технических специальностей / А.А. Хамзин. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2009. – 240 с.

Учебное пособие содержит обзорные лекции и задачи для практических занятий по дисциплине «Математика» первого года обучения (I и II семестры). Изложены необходимые теоретические сведения в виде 10 обзорных лекций и подробные решения типовых задач в виде 10 практических занятий. Приведены тексты задач для самостоятельного решения с ответами.

Учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения Казанского государственного энергетического университета первого года обучения инженерно-технических специальностей.

УДК 517.5
ББК 22.161.6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой курс лекций и практических занятий по дисциплине «Математика», читаемый студентам заочного факультета инженерно-технических специальностей Казанского государственного энергетического университета на первом курсе.

Пособие разбито на две части, соответствующие первому и второму семестру. Каждая часть в свою очередь разделяется на обзорные лекции, по пять в каждом семестре, и практические занятия, также по пять в каждом семестре, в соответствии с учебным планом аудиторных занятий для студентов заочной формы обучения инженерно-технического направления. Тематика обзорных лекций и практических занятий соответствует учебной программе дисциплины «Математика» первого года обучения.

Каждая обзорная лекция включают в себя необходимый теоретический материал по одному из разделов высшей математики и имеет целью дать студенту лишь основные базовые понятия и определения. Для полноценного изучения курса математики студенту необходимо обратиться к литературе, список которой приведен в конце настоящего пособия.

Каждое практическое занятие состоит из подробных решений типовых задач по разделу, изложенному в соответствующей обзорной лекции. В конце каждого практического занятия приведены задачи для самостоятельного решения с ответами, выполнение которых обязательно для закрепления навыков, полученных на практическом занятии. Решения задач в практических занятиях снабжены указаниями на формулы, теоремы и определения, содержащиеся в обзорных лекциях, что связывает теоретическую и практическую составляющую пособия.

Пособие может использоваться студентами как под руководством преподавателя, так и независимо от него, при самостоятельном изучении.

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ

ЛЕКЦИЯ № 1
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и действия над ними

Определение 1.1. ***Матрицей*** размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы. Таким образом, первый индекс элемента a_{ij} указывает на номер строки, второй – на номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Если $m = n$, т. е. число строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной* матрицей *порядка n.*

Диагональ квадратной матрицы, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, называется *главной диагональю.*

Квадратная матрица называется *единичной*, если на главной диагонали у нее стоят единицы, а остальные элементы – нули.

Определение 1.2. Пусть дана произвольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (и, следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A), называется *транспонированной* к матрице A. Переход от матрицы A к B называется *транспонированием*. Будем обозначать транспонированную матрицу A^T.

Заметим, что $\left(A^T\right)^T = A$.

Определение 1.3. Матрицы A и B одинаковых размеров $n \times m$ с элементами a_{ij} и b_{ij} называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Равенство матриц обозначается $A = B$.

Определение 1.4. ***Суммой*** двух матриц A и B одинаковых размеров $n \times m$ с элементами a_{ij} и b_{ij} называется матрица $C = A + B$, элементы которой получаются путем сложения соответствующих элементов данных матриц: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Определенное таким образом сложение будет, очевидно, коммутативным и ассоциативным.

Для сложения существует и обратная операция – *вычитание* матриц $A - B$. Роль нуля играет при этом *нулевая матрица*, составленная из одних нулей.

Определение 1.5. ***Произведением*** матрицы A ***на число*** λ называется матрица $C = \lambda \cdot A$, элементы которой получаются умножением элементов матрицы A на число λ: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Все перечисленные выше операции над матрицами аналогичны операциям над числами и являются вполне естественными.

Определение 1.6. ***Произведением*** матрицы A размера $m \times n$ с элементами a_{ij} и матрицы B размера $n \times p$ с элементами b_{ij} называется матрица $C = A \cdot B$ размера $m \times p$ с элементами c_{ij}, если

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj},} \tag{1.1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot 0 + (-1)\cdot 5 \\ 0\cdot 2 + 4\cdot 0 & 0\cdot 1 + 4\cdot(-1) & 0\cdot 0 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 6 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц

1. Произведение матриц не коммутативно, т. е. в общем случае

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

2. Произведение матриц ассоциативно, т. е. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Из этого свойства, в частности, следует, что произведение нескольких матриц можно записывать без скобок, т. е. $A \cdot B \cdot C$.

3. Произведение и сложение матриц подчиняются дистрибутивным законам:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

4. Транспонированное произведение равно произведению транспонированных сомножителей, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^T = B^T A^T .$$

1.2. Определители

Для квадратных матриц существует численная характеристика, которая также имеет и многочисленные другие приложения. Прежде чем сформулировать определение определителя матрицы, введем одно вспомогательное понятие.

Пусть $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – строка из n различных чисел от 1 до n. Будем говорить, что в строке имеется *нарушение*, если существует такая пара чисел (s_i, s_j), что $i < j$, а $s_i > s_j$. Другими словами, если в этой строке большее число стоит раньше меньшего.

Например, в строке (1, 4, 2, 3) имеется два нарушения (4, 2) и (4, 3).

Определение 1.7. ***Определителем матрицы порядка n*** (или ***определителем n-го порядка***) называется сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце и расположенных по возрастанию номеров строк, причем член берется со знаком плюс, если строка из номеров столбцов его элементов имеет четное число нарушений, и со знаком минус – в противном случае.

Для обозначения определителя будем употреблять запись:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \det A .$$

Основываясь на определении, мы можем записать явные формулы для вычисления определителей второго и третьего порядков:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},} \tag{1.2}$$

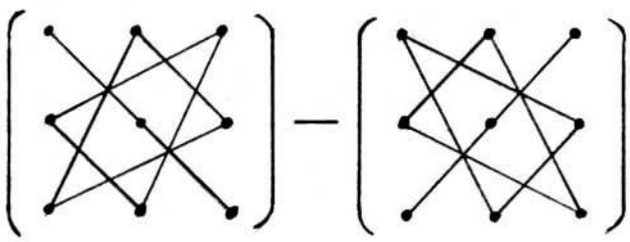
$$\boxed{\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \end{aligned}} \tag{1.3}$$

Примеры.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -10\,.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 23.$

Выражение определителя третьего порядка является достаточно громоздким. Для запоминания формулы существует удобный способ, который схематично можно изобразить следующим образом:



Свойства определителей

Перечислим некоторые простейшие свойства определителей.

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

2. Если матрица содержит строку, состоящую из нулей, то ее определитель равен нулю.

3. Если в матрице поменять местами какие-нибудь две строки (столбца), то ее определитель изменит знак.

4. Если в матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

5. При умножении строки матрицы на число, ее определитель умножается на это число.

6. Если все элементы i-й строки матрицы представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = 1,\ldots,n$, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданной матрице, а i-я строка в первой матрице состоит из элементов b_j, а во второй – из элементов c_j.

Прежде чем перейти к следующему свойству, сформулируем важное определение.

Будем говорить, что строка $a = (a_1,\ldots,a_n)$ является *линейной комбинацией строк*

$$b_1 = (b_{11}, b_{12} \ldots, b_{1n}), \ldots, b_m = (b_{m1}, b_{m2} \ldots, b_{mn}),$$

если существуют некоторые числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ такие, что для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется следующее: $a_i = \alpha_1 b_{1i} + \alpha_2 b_{2i} \ldots + \alpha_m b_{mi}$, или то же самое можно записать в обозначениях строк:

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_m b_m.$$

7. Если одна из строк матрицы есть линейная комбинация остальных строк этой матрицы, то ее определитель равен нулю.

8. Определитель матрицы не изменится, если к какой-нибудь ее строке прибавить линейную комбинацию остальных строк этой матрицы.

Заметим, что из первого свойства вытекает, что все остальные свойства могут быть сформулированы не только для строк матрицы, но и для ее столбцов.

Формулы разложения определителя по строке и столбцу

Пусть A – квадратная матрица с элементами a_{ij}.

Определение 1.8. ***Дополнительным минором*** M_{ij} ***элемента*** a_{ij} называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т. е. i-й строки и j-го столбца.

Определение 1.9. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} называется произведение:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. Определитель квадратной матрицы A может быть вычислен по формулам:

$$\boxed{\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},} \qquad (1.5а)$$

$$\boxed{\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.} \qquad (1.5б)$$

Эти формулы называются ***формулами разложения определителя по i-й строке и по j-му столбцу***, соответственно.

В качестве примера запишем формулу разложения определителя третьего порядка по первой строке:

$$\boxed{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.} \qquad (1.6)$$

Заметим, что при использовании формулы разложения определителя по строке (или по столбцу) удобно иметь в этой строке (в этом столбце) много элементов, равных нулю (тогда соответствующие им миноры не надо будет вычислять). Поэтому полезно предварительно *так преобразовать определитель*, используя свойство 8, *чтобы в одной из строк (или в одном из столбцов) только один элемент остался, отличный от нуля.*

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1 & -2\end{vmatrix}.$$

Решение. Выполним следующее преобразование: умножим второй столбец на (–4) и прибавим его к третьему столбцу. Затем разложим полученный определитель по первой строке. Получим:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -13 & 5\\ 4 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -15 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -13 & 5\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & -15 & -2\end{vmatrix}.$$

Умножая первую строку на (–2) и прибавляя ее ко второй строке, затем, раскладывая полученный определитель по первому столбцу, вычисляем:

$$D=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -13 & 5\\ 0 & 27 & -9\\ 0 & -15 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}27 & -9\\ -15 & -2\end{vmatrix}=378.$$

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Курс линейной алгебры начинается с изучения систем линейных уравнений с несколькими переменными. Эти системы содержат произвольное число уравнений и неизвестных, причем число уравнений и число неизвестных в общем случае не совпадают.

Определение 1.10. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется ***системой m линейных уравнений с n неизвестными***.

Коэффициенты этих уравнений записываются в виде матрицы A, называемой ***матрицей системы***, а числа, стоящие в правой части системы, образуют столбец B, называемый ***столбцом свободных членов***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1.11. Совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется ***решением системы***, если каждое уравнение системы обращается в равенство после подстановки в него чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Системы, не имеющие решения, называются *несовместными*.

Системы, имеющие решения, называются *совместными*. Заметим, что система может иметь единственное решение, а может иметь бесконечно много решений.

Одна из задач линейной алгебры состоит в том, чтобы найти метод, позволяющий определить, совместна система или нет, а в случае совместности найти все решения системы.

Изложенная выше теория определителей позволяет исследовать на совместность системы, имеющие одинаковое количество уравнений и неизвестных.

Теорема 1.2 (Крамера). Система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет единственное решение, если определитель матрицы системы отличен от нуля. Это решение находится по ***формулам Крамера***:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},} \tag{1.7}$$

где Δ – определитель матрицы системы, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

Так как Δ отличен от нуля, то система совместна, тогда решения системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{21}{28}.$$

Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Определение 1.12. Квадратная матрица называется ***вырожденной***, если ее определитель равен нулю, и ***невырожденной*** – в противном случае.

Имеют место следующие утверждения:

1) произведение матриц, из которых хотя бы одна вырожденная, будет вырожденной матрицей;

2) произведение любых невырожденных матриц само будет невырожденной матрицей.

Рассмотрим вопрос о существовании *обратной* матрицы.

Пусть матрица A вырожденная. Если бы для нее существовала обратная матрица A^{-1}, то произведение $A^{-1}A$, так же как и произведение AA^{-1}, было бы, как мы знаем, вырожденной матрицей, но это произведение равно единичной матрице, которая невырожденна. Поэтому для вырожденной матрицы обратная матрица не существует.

Определение 1.13. Пусть дана невырожденная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, причем алгебраическое дополнение A_{ij} к элементу a_{ij} стоит на месте (ji), т. е. на пересечении j-й строки и i-го столбца, называется ***присоединенной*** к матрице A.

Теорема 1.3 (О существовании обратной матрицы). Если A – невырожденная квадратная матрица, то она имеет единственную обратную матрицу, получающуюся из присоединенной A^V делением всех ее элементов на $\det A$:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{A^V}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.} \tag{1.8}$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему, имеющую одинаковое количество уравнений и неизвестных, такую, что определитель ее матрицы отличен от нуля:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

По теореме Крамера такая система должна иметь единственное решение. Это решение может быть найдено другим способом.

Используя произведение матриц, можно записать данную систему в матричном виде:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная A^{-1}, и мы можем выразить неизвестный столбец X из матричного равенства:

$$X = A^{-1}B. \tag{1.9}$$

Это и есть матричный способ решения систем.

Базисный минор. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

Выберем в матрице A произвольный минор M порядка k.

Определение 1.14. ***Окаймляющим минором*** минора M называется минор, полученный добавлением к минору M еще одной строки и еще одного столбца из матрицы A, которые не входят в минор M. Если $k = m$ или $k = n$, то для минора M нет окаймляющих миноров.

Минор матрицы называется *базисным*, если он не равен нулю, а окаймляющие его миноры либо все равны нулю, либо отсутствуют вовсе. Столбцы и строки матрицы, пересекающие базисный минор, называются *базисными столбцами и строками*.

Теорема 1.4 (О базисном миноре). Столбцы (строки) матрицы, пересекающие базисный минор, линейно независимы. Столбец (строка), не входящий в базисный минор, линейно выражается через базисные столбцы (строки).

Определение 1.15. ***Рангом*** матрицы называется порядок ее базисного минора. Ранг матрицы обозначается следующим образом: rang A.

Если матрица нулевая, то ее ранг равен нулю, так как нулевая матрица не имеет базисного минора.

Теорема 1.5 (О ранге матрицы). Ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов (строк).

Теоремы о существовании и единственности решения системы

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . \; . \; . & . \; . & . \; . \; . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы.

Определение 1.16. Матрица $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, получающаяся из A приписыванием столбца свободных членов, называется ***расширенной*** матрицей.

Заметим, что $r = \operatorname{rang} \overline{A} \geq \operatorname{rang} A$.

Теорема 1.6 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$.

Теорема 1.7 (Критерий единственности решения системы). Если $r = n$, то система обладает единственным решением. Если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Системы линейных неоднородных уравнений

Пусть дана система линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение 1.17. Однородная система, которая получается из данной подстановкой вместо свободных коэффициентов $b_1,\dots,b_m$ нулей, называется ***приведенной*** системой:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Сумма частного решения X_0 неоднородной системы и общего решения $C_1X_1+\dots+C_{n-r}X_{n-r}$ приведенной системы дает ***общее решение неоднородной системы***:

$$\boxed{X=X_0+C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_{n-r}X_{n-r}.} \qquad (1.10)$$

Таким образом, чтобы решить неоднородную систему уравнений, необходимо проделать следующие действия:

1. С помощью теоремы Кронекера-Капелли исследовать систему на совместность. Далее будем считать, что система совместна.
2. Составить приведенную систему и найти ее общее решение.
3. Найти частное решение исходной системы, придав всем свободным переменным нулевые значения.
4. Составить общее решение неоднородной системы.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса является универсальным методом решения систем линейных уравнений с произвольным количеством уравнений и неизвестных.

Основная идея метода Гаусса заключается в том, что расширенная матрица $\overline{A}$ системы уравнений путем элементарных преобразований приводится к ступенчатой форме, когда все элементы ниже главной диагонали обращены в нуль.

$$A^*\sim\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} & \dots & b'_1\\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} & \dots & b'_2\\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} & \dots & b'_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & b'_r\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.11)$$

По полученной матрице выписывается система, которая будет эквивалентна исходной. Очевидно, $r=\operatorname{rang}\overline{A}$.

Если в матрице (1.11) получилась строка с единственным ненулевым элементом – b'_s, то $\text{rang}A^* \neq \text{rang}A$ и система несовместна, этой строке соответствует уравнение $0 = b'_s$, не имеющее решений. В противном случае $\text{rang}A^* = \text{rang}A$ и возможны два варианта:

1) $r = n$ и нижняя ненулевая строка матрицы (1.11) определяет уравнение: $a'_{nn}x_n = b'_n$. Так как $a'_{nn} \neq 0$, то имеем решение $x_n = b'_n / a'_{nn}$. Подставим его в вышестоящее уравнение и получим уравнение с одной неизвестной x_{n-1}, решим его и перейдем к следующему уравнению и т. д. В результате получим единственное решение системы: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

2) $r < n$ и нижняя ненулевая строка дает уравнение с несколькими неизвестными: $a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r$.

Назовем $x_{r+1}, \dots, x_n$ свободными переменными и выразим через них сначала x_r, а затем остальные переменные $x_1, \dots, x_{r-1}$. Получаем бесконечное множество решений системы.

Контрольные вопросы

1. Определение матрицы. Транспонированная матрица.
2. Арифметические действия над матрицами.
3. Произведение матриц и его свойства.
4. Определитель матрицы и его свойства.
5. Разложение определителя по строке и столбцу.
6. Понятие системы линейных алгебраических уравнений.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
8. Обратная матрица.
9. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
10. Понятия окаймляющего и базисного минора. Ранг матрицы.
11. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий единственности решения системы.
12. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений.
13. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

ЛЕКЦИЯ № 2
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы. Линейные операции над ними. Разложение векторов. Вектор на оси

Определение 2.1. ***Осью*** называется прямая линия с указанным на ней направлением.

Определение 2.2. ***Вектором на оси*** называется направленный отрезок на оси.

Будем обозначать вектор с начальной точкой A и конечной точкой B символом $\overrightarrow{AB}$. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется ***нулевым***.

Определение 2.3. ***Длиной*** вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Длину вектора называют еще ***модулем*** вектора и обозначают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Два вектора назовем ***равными***, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Определение 2.4. ***Алгебраической величиной вектора*** в направлении оси называется число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление противоположно направлению оси. Алгебраическая величина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается AB.

Очевидно, необходимым и достаточным условием равенства векторов на оси является равенство алгебраических величин этих векторов.

Вектор на плоскости и в пространстве

Определение 2.5. ***Вектором на плоскости и в пространстве*** называется направленный отрезок.

Помимо обозначения $\overrightarrow{AB}$, где A начало вектора, а B – его конец, будем использовать также малые латинские буквы, выделенные жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, … . Аналогично, как для вектора на оси, определяется нулевой вектор, а также ***длина*** или ***модуль*** вектора.

Определение 2.6. Векторы называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Назовем два вектора ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и некоторая ось u, пусть A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось u.

Определение 2.7. ***Проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на ось u*** называется алгебраическая величина вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ на оси u. Проекция обозначается символом $\text{пр}_u\overrightarrow{AB} = A_1B_1$.

Заметим, что проекция может быть положительным, отрицательным или равным нулю числом.

Справедлива формула:

$$\text{пр}_u\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi,$$

где φ – *угол между вектором* $\overrightarrow{AB}$ *и осью u*. На рис. 2.1 представлено два случая: угол φ – острый (в этом случае проекция положительна) и угол φ – тупой (проекция отрицательна):

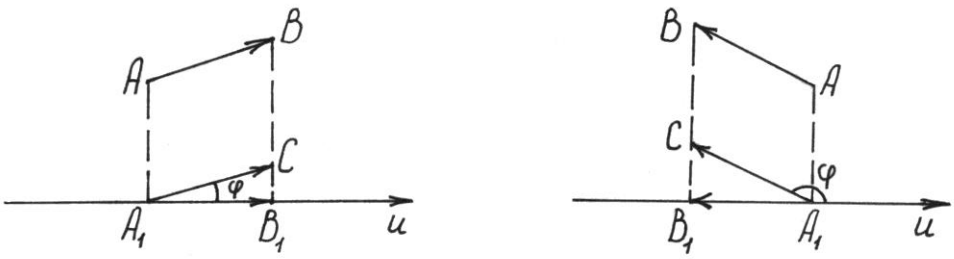


Рис. 2.1

Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Определение 2.8. Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют ***декартову систему координат в пространстве***. Оси занумерованы в определенном порядке и называются: первая – ось Ox или ***ось абсцисс***, вторая – ось Oy или ***ось ординат***, третья – ось Oz или ***ось аппликат***.

Пусть M – произвольная точка в пространстве, а M_x, M_y и M_z – проекции этой точки на оси Ox, Oy и Oz, соответственно (см. рис. 2.2).

Определение 2.9. ***Декартовыми координатами точки M*** называются алгебраические величины векторов $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$. Это обозначается следующим образом: $M(x, y, z)$, где $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$ (рис. 2.2). Декартовы координаты x, y и z точки M называют еще ее ***абсциссой, ординатой и аппликатой***, соответственно.

Определение 2.10. Пусть в пространстве дан вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$. ***Декартовыми координатами вектора a*** называются проекции a_x, a_y и a_z этого вектора на координатные оси (см. рис. 2.3). Обозначение: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

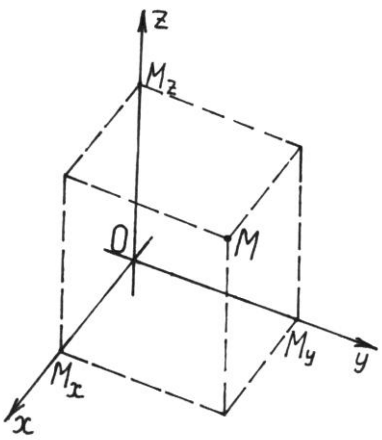


Рис. 2.2

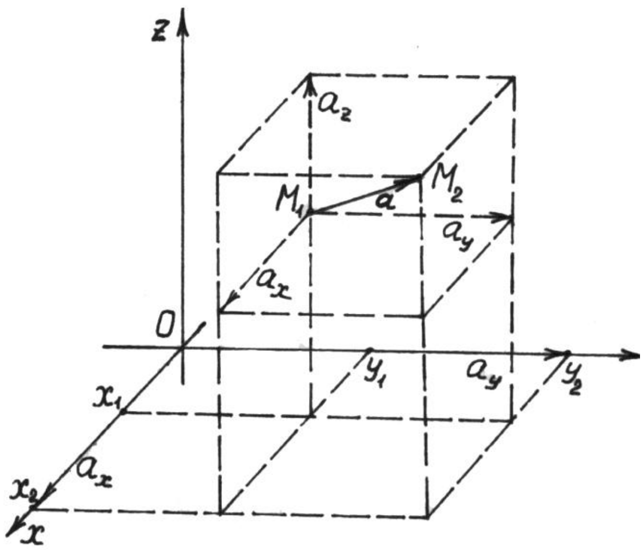


Рис. 2.3

Если известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора вычисляются по формулам:

$$\boxed{a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.} \tag{2.1а}$$

Формулы для вычисления ***длины вектора a,*** а также ***расстояния между точками*** M_1 и M_2:

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},} \quad \boxed{|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.} \tag{2.2а}$$

Декартовы координаты вектора на плоскости определяются аналогично, с той разницей, что там отсутствует ось аппликат и, соответственно, третья координата. Таким образом, если $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ и $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то, очевидно,

$$\boxed{a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1.} \tag{2.1б}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},} \qquad \boxed{|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.} \tag{2.2б}$$

Определение 2.11. Обозначим α, β и γ – углы наклона вектора ***a*** к координатным осям *Ox, Oy* и *Oz*, соответственно. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора a***.

Справедливы равенства:

$$\boxed{a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \qquad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \qquad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma.} \tag{2.3}$$

Формулы для вычисления направляющих косинусов:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.} \quad (2.4)$$

Если равенства (2.4) возвести в квадрат и сложить, то получим:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.} \quad (2.5)$$

Таким образом, ***сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.***

Так как любой вектор однозначно определяется заданием трех его координат, то теперь мы видим, что любой вектор также однозначно определяется заданием его длины и направляющих косинусов.

Линейными операциями принято называть операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на число.

Определение 2.12. ***Суммой*** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ двух векторов ***a*** и ***b*** называется вектор, который идет из начала вектора ***a*** в конец вектора ***b***, при условии, что вектор ***b*** приложен к концу вектора ***a***.

Существует два способа сложения векторов: по правилу треугольника (рис. 2.4) и по правилу параллелограмма (рис. 2.5).

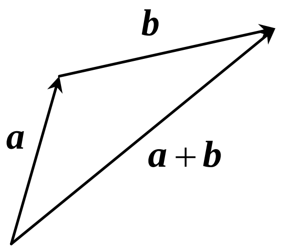


Рис. 2.4

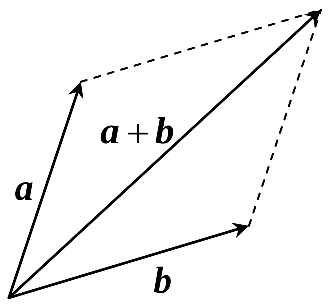


Рис. 2.5

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1) переместительное свойство: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
2) сочетательное свойство: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

Определение 2.13. Вектор $-\boldsymbol{a}$ называется ***обратным*** вектору ***a***, если он коллинеарен ***a***, имеет длину, равную $|\boldsymbol{a}|$, и направлен в противоположную сторону.

Очевидно, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$.

Определение 2.14. ***Разностью*** двух векторов ***a*** и ***b*** называется вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

На рис. 2.6 показано, как построить разность векторов двумя различными способами.

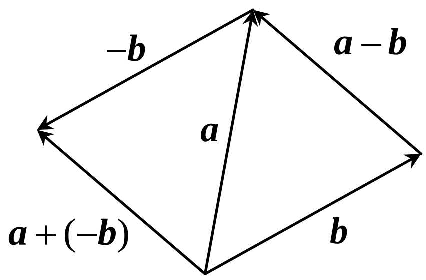


Рис. 2.6

Определение 2.15. ***Произведением числа*** α ***на вектор*** $\boldsymbol{a}$ называется вектор $\alpha\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\boldsymbol{a}|$ и направленный так же, как $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и в противоположную сторону, если $\alpha < 0$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha\boldsymbol{a} = 0$.

Перечислим свойства, которыми обладает операция произведения вектора на число.

1. Распределительное свойство относительно суммы векторов: $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.

2. Распределительное свойство относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$.

3. Сочетательное свойство: $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$.

4. Если вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, то существует число λ такое, что $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

Базис. Разложение вектора по базису

Определение 2.16. Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости.

Определение 2.17. ***Базисом на плоскости*** называются любые два неколлинеарных вектора.

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора.

Будем говорить, что вектор ***a раскладывается по векторам*** $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$, или *выражается* через эти векторы, если справедливо равенство

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n,$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – некоторые числа.

Теорема 2.1. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ на плоскости может быть разложен по любому базису $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ на этой плоскости: $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2$. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве может быть разложен по любому базису $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ в пространстве: $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$. Причем в обоих случаях разложение единственно.

В декартовой системе координат в качестве базиса выбирают векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, такие, что они лежат на координатных осях, имеют длину, равную единице, и направлены в положительную сторону. Векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ называют ***ортонормированным базисом*** в пространстве.

По только что сформулированной теореме любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть единственным образом разложен по базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.} \tag{2.6}$$

Причем числа x, y, z являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. проекциями на оси Ox, Oy и Oz (см. рис. 2.7).

Таким образом, мы можем использовать две равносильные формы записи координат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

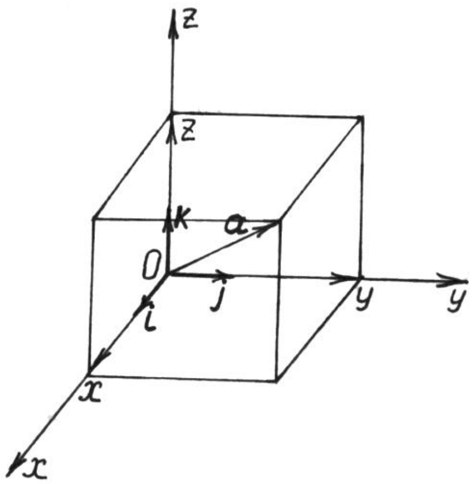


Рис. 2.7

Если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный (т.е. $|\boldsymbol{a}| = 1$), а $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$, то

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma.} \tag{2.7}$$

То есть *направляющие косинусы являются координатами вектора единичной длины.*

Линейные операции в координатной форме

Теорема 2.2. При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

В качестве следствия из этой теоремы можно получить ***условие коллинеарности двух векторов:***

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda.} \tag{2.8}$$

Таким образом, ***два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны***.

Отметим, что здесь и далее любое отношение $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует понимать как пропорцию, т. е. как равенство $ad = bc$. Это означает, что если один из знаменателей b или d будет равен нулю, то нулю должен равняться и соответствующий числитель a или c.

2.2. Скалярное произведение векторов

Определение 2.18. ***Скалярным произведением*** двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение принято обозначать двумя способами: $\boldsymbol{ab}$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Мы будем использовать первое из обозначений:

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi\ .} \tag{2.9}$$

Перечислим ***свойства скалярного произведения***.

1. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.
2. Свойство коммутативности: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.
3. Свойство линейности: $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{ac}) + \beta(\boldsymbol{bc})$.
4. Скалярный квадрат является неотрицательным числом:
   $\boldsymbol{aa} > 0$, если $\boldsymbol{a}$ – ненулевой вектор,
   $\boldsymbol{aa} = 0$, если $\boldsymbol{a}$ – нулевой вектор.

Из этого свойства следует часто применяющаяся формула для вычисления длины вектора:

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}}.} \tag{2.10}$$

5. $\boldsymbol{ab} > 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами острый; $\boldsymbol{ab} < 0$ тогда и только тогда, когда угол φ тупой; $\boldsymbol{ab} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Теорема 2.3. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.} \qquad (2.11)$$

В качестве следствия из этой теоремы получаем формулу для вычисления косинуса угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.} \qquad (2.12)$$

Пример. Векторы $\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$ и $\overrightarrow{CA} = -3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ образуют треугольник ABC. Найти углы этого треугольника.

Решение. Пусть α – угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (2.11): $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 - 6 = 0$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярны и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Пусть β – угол между векторами $\overrightarrow{BA} = -2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ и $\overrightarrow{BC}$. Тогда по формуле (2.12)

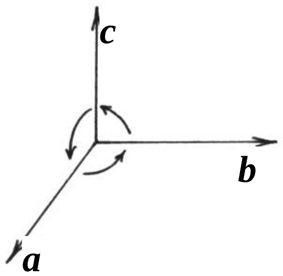
$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-2+42}{\sqrt{4+36}\sqrt{1+49}} = \frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим косинус третьего угла:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{3+7}{\sqrt{9+1}\sqrt{1+49}} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

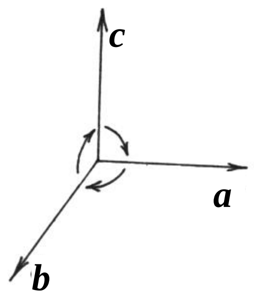
2.3. Векторное произведение векторов

Определение 2.19. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$), приведенных к общему началу, называется ***правой***, если, находясь внутри трехгранного угла, образованного этими векторами, поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$, от $\boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{c}$, от $\boldsymbol{c}$ к $\boldsymbol{a}$ виден против часовой стрелки (рис. 2.8). В противном случае тройка векторов называется ***левой*** (рис. 2.9).



Правая тройка

Рис. 2.8



Левая тройка

Рис. 2.9

Определение 2.20. ***Векторным произведением*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
3) тройка векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ является правой.

Для векторного произведения, так же как и для скалярного, используются два обозначения: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Мы будем придерживаться первого: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Свойства векторного произведения.

1. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$, в частности, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$.

2. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ привести к общему началу, то длина их векторного произведения $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ будет равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 2.10) (***геометрический смысл векторного произведения***).

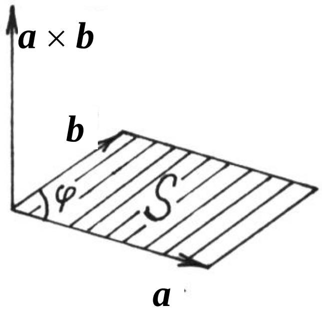


Рис. 2.10

3. Свойство антикоммутативности: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

4. Числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \qquad \boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

5. Свойство дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.$$

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. При этом учитываем, что эти векторы взаимно перпендикулярны, имеют единичную длину и тройка $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ – правая. Получим:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0. \end{array}$$

Используя эту таблицу, можно получить следующую теорему.

Теорема 2.4. Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\boldsymbol{k}.} \qquad (2.13)$$

Для координатной записи векторного произведения удобно использовать символы определителя 2-го и 3-го порядков из курса линейной алгебры:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}} \qquad (2.14)$$

или

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.} \qquad (2.15)$$

Пример. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$, $|\boldsymbol{m}| = 5$, $|\boldsymbol{n}| = 3$, угол между векторами $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. По свойству 2 векторного произведения имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{\text{парал}} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Вычисляем $\overline{AB}\times\overline{AC} = (\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n})(\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n} -$
$- 6\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$.

Так как $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m} = 0$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} = 0$, то $\overline{AB}\times\overline{AC} = 5\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}$. Таким образом, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}| = \dfrac{5}{2}|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{75}{4}$.

2.4. Смешанное произведение векторов

Определение 2.21. ***Смешанным произведением*** трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется скаляр $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Следующая теорема выясняет ***геометрический смысл смешанного произведения***.

Теорема 2.5. Смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, приведенных к общему началу, и взятому со знаком «+», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ правая, и со знаком «–», если тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ левая.

Следствие. Справедливо равенство: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

В связи с этим смешанное произведение принято обозначать $\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

Заметим, что тройка векторов меняет свою ориентацию (т. е. будучи левой становится правой, и наоборот), если в ней переставляются любые два вектора. Поэтому справедливы равенства: $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}$.

Теорема 2.6. Если три вектора определены своими координатами: $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.} \tag{2.16}$$

Используя смешанное произведение, можно сформулировать простое и удобное ***условие компланарности трех векторов***.

Три вектора a, b и c компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Используя последнюю теорему, можно сформулировать условие компланарности в координатах.

Три вектора a, b и c компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.} \tag{2.17}$$

Пример. Вычислить объем тетраэдра, построенного на трех векторах $\boldsymbol{p}(3, 1, -2)$, $\boldsymbol{q}(-4, 0, 3)$ и $\boldsymbol{r}(1, 5, -1)$ и выяснить, какую тройку образуют эти векторы: левую или правую?

Решение. Найдем смешанное произведение этих векторов по формуле (2.17):

$$\boldsymbol{pqr} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

Так как $\boldsymbol{pqr} < 0$, то тройка $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ –левая. Имеем $V_{\text{парал}} = 6$. Найдем объем тетраэдра: $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$.

Контрольные вопросы

1. Вектор на оси, длина и алгебраическая величина вектора.
2. Вектор на плоскости и в пространстве. Коллинеарные вектора. Проекция вектора на ось.
3. Декартовы координаты вектора. Длина и направляющие косинусы вектора, заданного координатами.
4. Линейные операции над векторами.
5. Базис. Разложение вектора по базису.
6. Линейные операции над векторами в координатной форме.
7. Скалярное произведение векторов: определение и свойства.
8. Выражение скалярного произведения через координаты. Формула для вычисления угла между векторами.
9. Векторное произведение векторов: определение и свойства.
10. Выражение векторного произведения через координаты. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
11. Смешанное произведение векторов: определение и свойства.
12. Выражение смешанного произведения через координаты. Вычисление объема параллелепипеда и треугольной пирамиды.

ЛЕКЦИЯ № 3
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости. Ее уравнения

Определение 3.1. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B и C – некоторые числа, называется ***уравнением первой степени***.

В декартовой системе координат каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую и, обратно, каждая прямая определяется уравнением первой степени.

Рассмотрим различные типы уравнений прямой.

1. Общее уравнение прямой.

Уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + C = 0.} \tag{3.1}$$

называется ***общим уравнением прямой***.

Коэффициенты A и B в уравнении (3.1) являются *координатами вектора нормали к этой прямой*.

2. Неполные уравнения прямой.

Общее уравнение прямой (3.1) называется *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов A, B или C равен нулю. В противном случае уравнение называется *полным*.

Рассмотрим различные виды неполных уравнений прямой.

1) $C = 0$, уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат;

2) $B = 0$, уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy, так как нормаль к этой прямой $\boldsymbol{n} = (A,\ 0)$ является нормалью и к оси Oy;

3) $A = 0$, уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox, так как нормаль к этой прямой $\boldsymbol{n} = (0,\ B)$ является нормалью и к оси Ox;

4) $B = 0$, $C = 0$, уравнение $Ax = 0$ равносильно уравнению $x = 0$ и определяет ось Oy;

5) $A = 0$, $C = 0$, уравнение $By = 0$ равносильно уравнению $y = 0$ и определяет ось Ox.

3. Уравнение прямой в отрезках.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.} \tag{3.2}$$

Заметим, что числа a и b равны алгебраическим величинам отрезков, OA и OB, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy, соответственно (см. рис. 3.1).

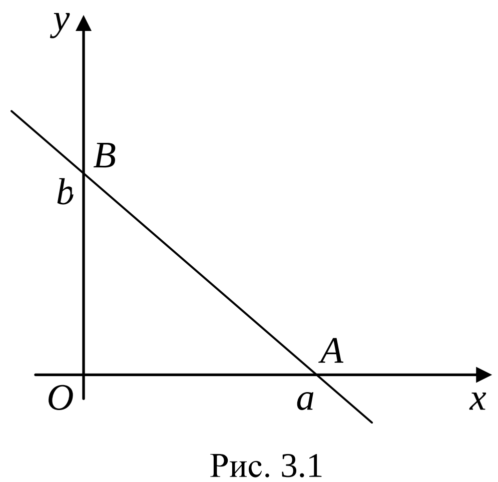


Рис. 3.1

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать при построении этой прямой.

4. Каноническое уравнение прямой.

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a} = (m,\ n)$, параллельный данной прямой, называется ***направляющим вектором прямой***.

Каноническое уравнение прямой – это есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельно вектору $\boldsymbol{a} = (m,\ n)$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.} \tag{3.3}$$

Заметим, что каноническое уравнение следует понимать как пропорцию. Это означает, что если один из знаменателей окажется равным нулю, то нулю должен будет равняться и соответствующий числитель.

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}.} \tag{3.4}$$

Эти уравнения эквивалентны.

6. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ **перпендикулярно вектору** $\boldsymbol{n} = (A, B)$.

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \tag{3.5}$$

7. Параметрические уравнения прямой.

Рассмотрим каноническое уравнение прямой (3.3) и примем за параметр t величину, стоящую в левой и в правой частях этого уравнения:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t\,.$$

Тогда:

$$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0. \end{cases}} \tag{3.6}$$

Эти уравнения являются ***параметрическими уравнениями прямой***.

8. Прямая с угловым коэффициентом.

Назовем ***углом наклона прямой к оси Ox*** угол α, на который надо повернуть положительную полуось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (см. рис. 3.2).

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox назовем *угловым коэффициентом* этой прямой. Обозначим его k. Таким образом, $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$\boxed{y = kx + b,} \tag{3.7}$$

где b – алгебраическая величина отрезка OB, который прямая отсекает на оси Oy.

Отметим, что если прямая параллельна оси Ox, то ее угол α наклона к оси Ox равен нулю, и $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$, тогда уравнение (3.7) примет вид: $y = b$.

Если прямая параллельна оси *Oy*, то ее угол наклона к оси *Ox* равен $\frac{\pi}{2}$ и для этой прямой не существует уравнения с угловым коэффициентом.

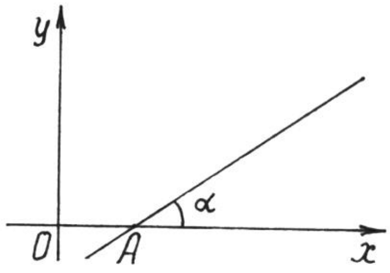


Рис. 3.2

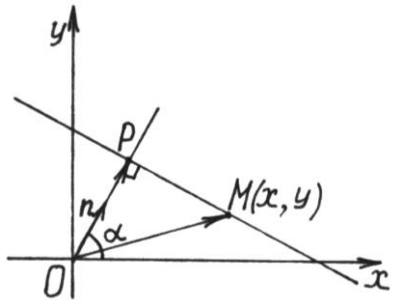


Рис. 3.3

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом** k **и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}. \qquad (3.8)$$

9. Нормальное уравнение прямой.

Рассмотрим произвольную прямую. Проведем из начала координат перпендикуляр к данной прямой. Пусть P – основание перпендикуляра (см. рис. 3.3). Вектор $\overline{OP}$ является вектором нормали к данной прямой. Если α – угол наклона вектора $\overline{OP}$ к оси Ox, а p – расстояние от начала координат до рассматриваемой прямой, т. е. $p = OP$, то ***нормальное уравнение прямой*** имеет вид

$$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.} \qquad (3.9)$$

Заметим, что p не может быть отрицательным, так как это расстояние от точки O до прямой.

Пусть $M'(x', y')$ – произвольная точка плоскости. Выражение $d(M') = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p$ называется *отклонением* точки M' от данной прямой. По знаку отклонения $d(M')$ можно определить взаимное расположение точек M' и O относительно прямой: если $d(M') > 0$, то M' и O лежат по разные стороны от прямой; если $d(M') < 0$, то M' и O лежат по одну сторону от прямой.

Укажем алгоритм приведения общего уравнения прямой (3.1) к нормальному виду (3.9): *для этого надо умножить всё уравнение* $Ax + By + C = 0$ *на нормирующий множитель* $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, *знак которого противоположен знаку свободного коэффициента*.

Обозначим d – расстояние от точки $M'(x', y')$ до данной прямой. Используя нормирующий множитель, можно получить *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y')$ *до прямой*, заданной общим уравнением:

$$\boxed{d = \left| \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.} \qquad (3.10)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Нахождение угла между прямыми

Пусть две прямые заданы общими уравнениями: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Условие параллельности этих прямых эквивалентно условию коллинеарности (2.8) векторов нормалей к этим прямым $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$, т. е.

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.} \qquad (3.11)$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно равенству нулю скалярного произведения (2.11) векторов нормалей $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$, т. е. $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$ или

$$\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.} \qquad (3.12)$$

Угол между прямыми равен углу между нормалями к этим прямым, который определяется по формуле

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.} \qquad (3.13)$$

Абсолютно аналогично обстоит дело, если прямые заданы каноническими уравнениями: $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$, $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$.

Условие параллельности, перпендикулярности, а также угол между прямыми можно определить, используя направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a}_1 = (m_1, n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (m_2, n_2)$.

Условие параллельности: $$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.} \qquad (3.14)$$

Условие перпендикулярности: $$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.} \qquad (3.15)$$

Угол между прямыми: $$\boxed{\cos\alpha = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.} \qquad (3.16)$$

Пусть теперь прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2$.

Условие параллельности прямых: $$\boxed{k_1 = k_2.} \qquad (3.17)$$

Угол между прямыми находится по формуле: $$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.} \qquad (3.18)$$

Условие перпендикулярности прямых: $$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}.} \qquad (3.19)$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -2)$ и составляющей угол в 45° с прямой $y = 2x + 5$.

Решение. Ясно, что такую прямую можно провести двумя способами (рис. 3.4):

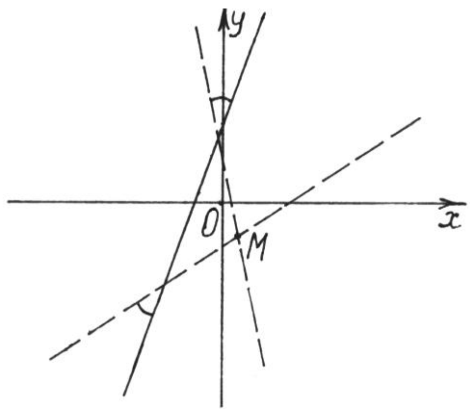


Рис. 3.4

Воспользуемся формулой (3.18), причем имеем $\mathrm{tg}\alpha = 1$, $k_1 = 2$. Тогда $1 = \left|\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2}\right|$. Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = -1.$$

Решая эти уравнения, получаем два разных значения углового коэффициента искомой прямой: $k_2 = -3$ или $k_2 = \frac{1}{3}$.

Воспользуемся теперь уравнением (3.8) прямой с угловым коэффициентом и проходящей через заданную точку. Получим два варианта искомой прямой:

$$y+2=-3(x-1) \quad \text{или} \quad y+2=\frac{1}{3}(x-1).$$

Окончательно получаем $y=-3x+1$ или $y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$.

3.2. Виды уравнений плоскости

Определение 3.2. Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D – некоторые числа, называется ***уравнением первой степени***.

Теорема 3.1. В декартовой системе координат любое уравнение первой степени определяет некоторую плоскость и, наоборот, любая плоскость в декартовой системе координат определяется уравнением первой степени.

Рассмотрим различные виды уравнений плоскости.

1. Общее уравнение плоскости.

Уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{3.20}$$

называется ***общим уравнением плоскости***.

Геометрический смысл коэффициентов A, B и C в уравнении (3.20): они являются *координатами вектора нормали* $\mathbf{n}$ *к этой плоскости*, т. е. вектора, перпендикулярного данной плоскости.

2. Неполные уравнения плоскости.

Общее уравнение плоскости (3.20) называется ***полным***, если все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. В противном случае уравнение плоскости называется ***неполным***.

Рассмотрим различные виды неполных уравнений плоскости:

1) $D = 0$, уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2) $A = 0$, уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox;

3) $B = 0$, уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy;

4) $C = 0$, уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz;

5) $A = 0$, $B = 0$, уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy;

6) $A = 0$, $C = 0$, уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxz;

7) $B = 0$, $C = 0$, уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz;

8) $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, уравнение $Cz = 0$ равносильно уравнению $z = 0$ и определяет координатную плоскость Oxy;

9) $A = 0$, $C = 0$, $D = 0$, уравнение $By = 0$ равносильно уравнению $y = 0$ и определяет координатную плоскость Oxz;

10) $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, уравнение $Ax = 0$ равносильно уравнению $x = 0$ и определяет координатную плоскость Oyz.

3. Уравнение плоскости в отрезках.

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \tag{3.21}$$

Заметим, что числа a, b и c имеют простой *геометрический смысл*: они равны алгебраическим величинам отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy и Oz, соответственно (см. рис. 3.5).

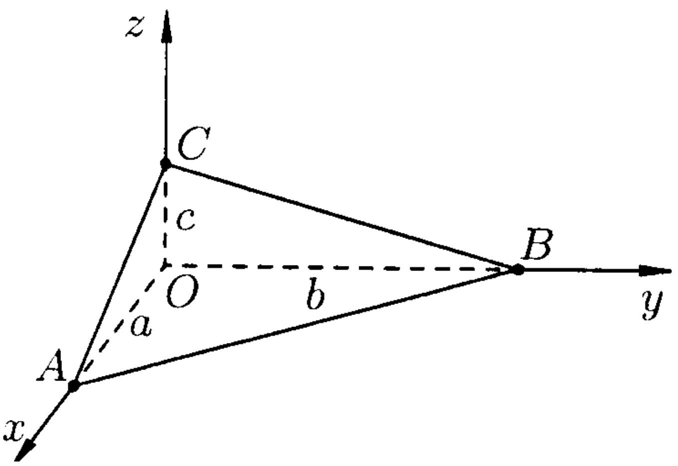


Рис. 3.5

4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три различные точки, не лежащие на одной прямой. Известно, что через три точки всегда можно провести плоскость, и она будет единственной, если точки не лежат на одной прямой.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.} \tag{3.22}$$

Пример. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1,1,2)$, $M_2(0,-1,3)$ и $M_3(1,0,2)$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.22):

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 0+1 & -1-1 & 3-2 \\ 1+1 & 0-1 & 2-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим искомое уравнение плоскости: $x+2y+3z-7=0$.

5. Уравнение плоскости, параллельной данному вектору и проходящей через две данные точки

Пусть дан вектор $\boldsymbol{a} = (m, n, l)$ и две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через эти две точки и параллельной вектору $\boldsymbol{a}$, запишется в виде

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & l \end{vmatrix} = 0.} \qquad (3.23)$$

6. Уравнение плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам и проходящей через точку.

Пусть даны два вектора $\boldsymbol{a}_1 = (m_1, n_1, l_1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (m_2, n_2, l_2)$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, то через точку M_1 можно провести единственную плоскость, параллельную векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Уравнение плоскости, параллельной векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через данную точку, имеет вид

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (3.24)$$

7. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(A, B, C)$:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.} \qquad (3.25)$$

8. Нормальное уравнение плоскости.

Рассмотрим произвольную плоскость. Проведем из начала координат прямую, перпендикулярную данной плоскости. Пусть P – точка пересечения плоскости и прямой (см. рис. 3.6). Вектор $\overrightarrow{OP}$ является вектором нормали к данной плоскости. Направляющие косинусы этого вектора: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Обозначим p – расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости, т. е. $p = OP$.

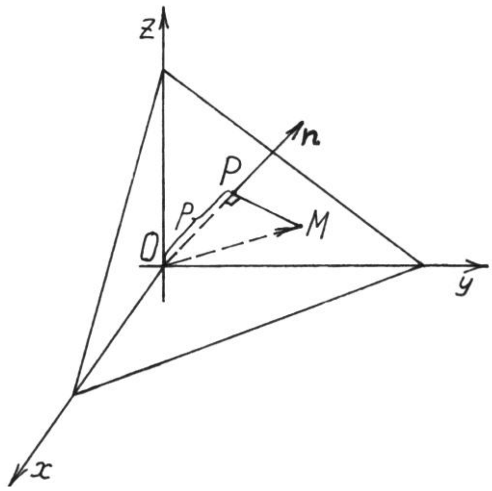


Рис. 3.6

Тогда ***нормальное уравнение плоскости*** запишется в виде

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + \cos\gamma - p = 0.} \tag{3.26}$$

Заметим, что p не может быть отрицательным, так как это расстояние от точки O до плоскости.

Пусть теперь $M'(x', y', z')$ – произвольная точка пространства. Выражение $d(M') = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$ называется *отклонением* точки M' от данной плоскости. По знаку отклонения $d(M')$ можно определить взаимное расположение точек M' и O относительно плоскости: если $d(M') > 0$, то M' и O лежат по разные стороны от плоскости; если $d(M') < 0$, то M' и O лежат по одну сторону от плоскости.

Пусть дано общее уравнение плоскости (3.20): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Укажем алгоритм приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду: *для этого надо умножить всё уравнение на нормирующий множитель* $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, *знак которого противоположен знаку свободного коэффициента*.

Обозначим d – расстояние от точки $M'(x', y', z')$ до данной плоскости. Используя нормирующий множитель, можно получить *формулу для нахождения расстояния от точки* $M'(x', y', z')$ *до плоскости*, заданной общим уравнением:

$$\boxed{d = \left|\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.} \tag{3.27}$$

3.3. Виды уравнений прямой в пространстве

1. Общие уравнения прямой.

Прямую можно определить как линию пересечения двух плоскостей. Это и будут ***общие уравнения прямой***:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}} \tag{3.28}$$

причем плоскости не параллельны и не совпадают, т. е. хотя бы одно из равенств в соотношении $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ не должно выполняться.

2. Канонические уравнения прямой.

Любой ненулевой вектор $\boldsymbol{a} = (m, n, l)$, параллельный данной прямой, называется ***направляющим вектором прямой.***

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой, и направляющий вектор прямой $\boldsymbol{a} = (m, n, l)$. Тогда ***канонические уравнения прямой*** будут иметь вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}.} \tag{3.29}$$

Заметим, что канонические уравнения (3.29) следует понимать как пропорцию. Это означает, что если один из знаменателей окажется равным нулю, то нулю должен будет равняться и соответствующий числитель.

Для того, чтобы по общим уравнениям прямой (3.28) записать канонические уравнения (3.29) этой прямой, необходимо найти:

1) точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на этой прямой. Ее можно найти, взяв в уравнениях (3.28), например, $x_0 = 0$ и найдя y_0 и z_0 из системы:

$$\begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

2) направляющий вектор $\boldsymbol{a} = (m, n, l)$ этой прямой. Для нахождения координат направляющего вектора возьмем, например, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$. Вычислив векторное произведение, получим координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a} = (m, n, l)$;

3) осталось подставить найденные значения x_0, y_0, z_0, m, n и l в канонические уравнения прямой (3.29).

3. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (3.29). В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве точки, лежащей на прямой, возьмем любую из точек M_1 или M_2. Получим уравнения:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}.} \qquad (3.30)$$

Эти уравнения эквивалентны и каждое из них определяет прямую, проходящую через точки M_1 и M_2.

4. Параметрические уравнения прямой.

Рассмотрим канонические уравнения (3.29) прямой и примем за параметр t каждое из данных отношений $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l} = t$.

Получим:

$$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = lt + z_0. \end{cases}} \qquad (3.31)$$

Эти уравнения являются ***параметрическими уравнениями прямой***.

Пример.

Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -2, 3)$ и перпендикулярно плоскости α: $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Решение. Направляющим вектором этой прямой служит нормальный вектор плоскости α: $\boldsymbol{n} = (2, -3, 1)$. Воспользуемся каноническими уравнениями (3.29), тогда уравнения искомой прямой примут вид $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z - 3}{1}$.

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1. Пусть в пространстве заданы плоскость α и прямая L:

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad L: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Условие параллельности прямой L и плоскости α эквивалентно условию перпендикулярности нормали $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ плоскости α и направляющего вектора $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$ прямой L и выражается равенством нулю скалярного произведения (2.11) векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\boxed{Al + Bm + Cn = 0.} \qquad (3.32)$$

Условие перпендикулярности прямой* L *и плоскости α эквивалентно условию коллинеарности (2.8) векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\boxed{\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.} \qquad (3.33)$$

Как легко убедиться, ***условие принадлежности прямой* L *к плоскости*** α выражается двумя равенствами:

$$\boxed{\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Al+Bm+Cn=0. \end{cases}} \qquad (3.34)$$

Угол φ ***между прямой* L и *плоскостью*** α находится по формуле

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.} \qquad (3.35)$$

2. Пусть в пространстве заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$L_1:\quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad\qquad L_2:\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Условия параллельности, перпендикулярности L_1 и L_2, а также угол между L_1 и L_2 определяются с использованием направляющих векторов $\boldsymbol{a}_1=(l_1,m_1,n_1)$ и $\boldsymbol{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$ данных прямых.

Условие параллельности: $$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.} \qquad (3.36)$$

Условие перпендикулярности: $$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.} \qquad (3.37)$$

Угол между прямыми: $$\boxed{\cos\alpha=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.} \qquad (3.38)$$

3. Пусть в пространстве заданы две плоскости α_1 и α_2 своими общими уравнениями:

$$\alpha_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad\qquad \alpha_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Условия параллельности, перпендикулярности α_1 и α_2, а также угол между α_1 и α_2 определяются аналогично, используя векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ к плоскостям.

Условие параллельности: $$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.} \qquad (3.39)$$

Условие перпендикулярности: $$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \qquad (3.40)$$

Угол между плоскостями: $$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \qquad (3.41)$$

Контрольные вопросы

1. Общее уравнение прямой, неполные уравнения прямой, уравнение прямой в отрезках.

2. Каноническое уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, уравнение прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

3. Параметрические уравнения прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, нормальное уравнение прямой.

4. Расстояние от точки до прямой.

5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями. Нахождение угла между этими прямыми.

6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных в виде с угловым коэффициентом. Нахождение угла между этими прямыми.

7. Общее уравнение плоскости, неполные уравнения плоскости, уравнение плоскости в отрезках.

8. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, Уравнение плоскости, параллельной заданному вектору и проходящей через две заданные точки, уравнение плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам и проходящей через заданную точку.

9. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

10. Общие, канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

11. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление угла между прямой и плоскостью.

12. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Вычисление угла между прямыми.

13. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Вычисление угла между плоскостями.

ЛЕКЦИЯ № 4
ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ

4.1. Предел числовой последовательности

Определение 4.1. Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ приведено в соответствие число x_n. Тогда говорят, что задана ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и обозначают ее $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ называются ***элементами*** последовательности, а выражение x_n – ***общим членом*** последовательности.

Примеры.

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right\}$.

2. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$.

Определение 4.2. Последовательность называется ***ограниченной***, если существует число M, такое, что $\forall n \ \ |x_n| < M$.

Последовательность называется ***ограниченной сверху (снизу)***, если существует число M, такое, что $\forall n \ \ x_n < M \ \ (\forall n \ \ x_n > M)$.

Определение 4.3. Число a называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N такое, что для $\forall \ n > N$ выполняется неравенство $|\, x_n - a \,| < \varepsilon$. Или, используя краткую запись,

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N \ \ \forall \ \ n > N \ \ |\, x_n - a \,| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что x_n стремится к a или последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то говорят, что она ***сходится***. Если последовательность не имеет конечного предела, то ее называют ***расходящейся***.

Определение 4.4. Интервал (с, d), содержащий в себе точку a, называется ***окрестностью*** точки a.

Интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ также будет окрестностью точки a. Он называется ***ε-окрестностью*** точки a. При этом неравенство $|\, x_n - a \,| < \varepsilon$ может быть переписано в виде: $x_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Понятие предела является базовым понятием математического анализа. Сформулируем определение предела последовательности по-другому.

Определение 4.5. Число a называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$, если любая ε-окрестность точки a содержит все члены последовательности x_n, начиная с некоторого номера N (см. рис. 4.1).

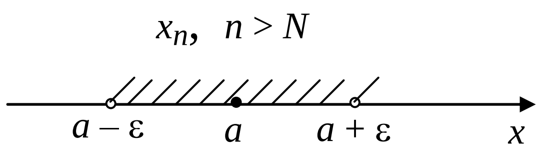


Рис. 4.1

Отметим, что номер N в определении предела, вообще говоря, зависит от ε. Чем меньшую ε-окрестность приходится рассматривать, тем более удаленные точки последовательности приходится брать.

Свойства предела последовательности

Элементарные свойства предела последовательности:

1. Если последовательность имеет предел, то он единственен.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

3 **(о предельном переходе в неравенствах)**. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $x_n \le y_n$ для всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$ и для всех n справедливо неравенство $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Арифметические свойства пределов последовательностей:

Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$, тогда

1) $x_n \pm y_n \to a \pm b$,

2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$,

3) $x_n / y_n \to a / b$, $b \ne 0$.

Заметим, что пределы суммы, разности, произведения и частного могут существовать и без существования пределов x_n и y_n.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 4.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$, начиная с которого каждый член последовательности x_n по модулю меньшее ε. Или $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall n > N\ |x_n| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\forall P > 0\ \exists N\ \ \forall\, n > N\ \ |\,x_n\,| > P$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Бесконечно большая величина ни к какому конечному пределу не стремится.

Если бесконечно большая величина x_n, начиная с некоторого номера N, принимает только положительные (отрицательные) значения, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$. Однако существуют бесконечно большие, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

Теорема 4.1. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно большой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = 1/\,x_n$, была бесконечно малой.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1. Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a тогда и только тогда, когда $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая величина.

2. Стационарная последовательность $\{c\} = \{c, c, \ldots, c, \ldots\}$ является бесконечно малой тогда и только тогда, когда $c = 0$.

3. Если отбросить (или добавить) конечное число членов бесконечно малой последовательности, то она останется бесконечно малой последовательностью.

4. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность и $\forall\ n$ выполняется $|\,y_n\,| \le |\,x_n\,|$, то $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

5. Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

6. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

7. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ – ограниченная последовательность, то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

8. Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ – бесконечно малая.

9. Если $\{x_n\}$ – ограничена снизу, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Можно определить понятие предела последовательности на языке бесконечно малых последовательностей: число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если $\{x_n - a\}$ – бесконечно малая последовательность, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

Монотонная ограниченная последовательность

Определение 4.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ $(x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots)$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***убывающей*** (***невозрастающей***), если $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ $(x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots)$.

Все такие последовательности называются ***монотонными***. При этом говорят, что последовательность ***монотонно возрастает*** или ***монотонно убывает***.

Теорема 4.2. Пусть $\{x_n\}$ – монотонно возрастает (убывает). Если она ограничена сверху (снизу) числом M, то она имеет предел, не превосходящий M (не меньший M).

Рассмотрим числовую последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281\ldots \qquad (4.1)$$

Это число имеет исключительную важность для математического анализа и его приложений. Некоторые свойства числа e делают особо выгодным выбор этого числа в качестве основания логарифма. Такие логарифмы называются натуральными и обозначаются ln.

Критерий Коши существования предела последовательности

Критерий Коши является общим признаком существования предела последовательности. Он позволяет определять сходимость последовательности без нахождения самого предела последовательности.

Определение 4.8. Последовательность x_n называется ***фундаментальной***, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall\ n, m > N\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Фундаментальную последовательность можно еще определить следующим образом: $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall\ n > N, \forall\ p \in N\ \ |\ x_{n+p} - x_n\ | < \varepsilon$.

Теорема 4.3 (Критерий Коши). Чтобы последовательность x_n сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Примеры.

1. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n-10}-\sqrt{3n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n-10}-\sqrt{3n})(\sqrt{3n-10}+\sqrt{3n})}{\sqrt{3n-10}+\sqrt{3n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-10-3n}{\sqrt{3n-10}+\sqrt{3n}} = 0.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2-x+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{2},$$ так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^k} = 0.$

4.2. Предел функции

Предел функции на бесконечности

Понятие предела функции на бесконечности является в определенном смысле обобщением понятия предела последовательности.

Определение 4.9. Функцию $f(x)$, определённую на луче $(Q, +\infty)$, называют ***бесконечно малой при x → +∞,*** если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ такое, что $\forall\ x > M$ выполняется $|f(x)| < \varepsilon$. См. рис. 4.2.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Функцию f (xопределенную на луче $(-\infty, a)$ называют ***бесконечно малой при x → – ∞***, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ такое, что $\forall\ x < -M$ выполняется $|f(x)| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Поскольку вместо двух неравенств $x < -M, x > M$ можно записать $|x| > M$, то можно объединить два приведенных выше определения в одно.

Функцию, определённую на $(-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$, называют ***бесконечно малой при x → ∞ (±∞)***, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ такое, что $\forall\ x$, если $|x| > M$, то $|f(x)| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

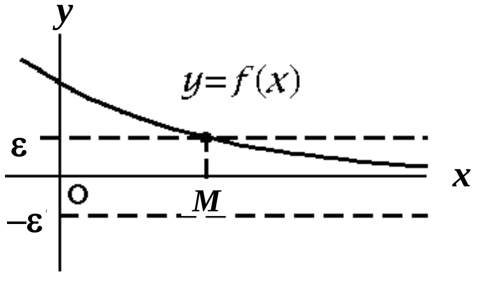


Рис. 4.2

Определение 4.10. Число b называют ***пределом функции f(x) при*** $\boldsymbol{x \to \infty}$, если $|\,f(x) - b\,|$ – бесконечно малая функция при $x \to \infty$, при этом пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Приведем определение предела функции на бесконечности по Коши.

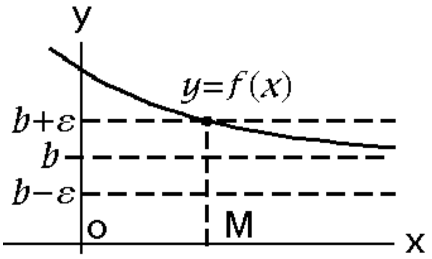


Рис. 4.3

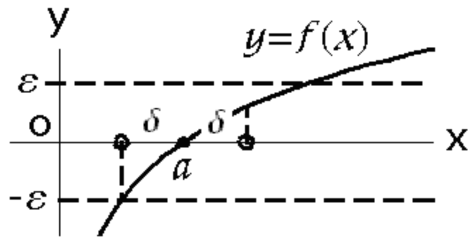


Рис. 4.4

Определение 4.11. Число b называют ***пределом функции f(x)*** **при** $\boldsymbol{x \to \infty}$**,** если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\ \ \forall\, x$; если $|\,x\,| > M$, то $|\,f(x) - b| < \varepsilon$. См. рис. 4.3.

Предел функции в точке

Определение 4.12. Функцию $f(x)$ называют ***бесконечно малой при*** $\boldsymbol{x \to a}$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x$ из неравенства $|\,x - a\,| < \delta$ следует неравенство $|\,f(x)\,| < \varepsilon$. См. рис. 4.4.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Число b называют ***пределом функции f(x) при*** $\boldsymbol{x \to a}$, если $f(x) - b$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

При этом пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Можно снова привести определение предела функции в точке по Коши или, другими словами, на языке ε-δ.

Определение 4.13. Число b называют ***пределом функции f(x)*** при $x \to a$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x$, если $|\,x - a\,| < \delta$, то $|\,f(x) - b\,| < \varepsilon$.

Определение предела говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то $f(x)$ приближается к b, делается как угодно близким к b.

Бесконечно большие функции

Определение 4.14. Функция $y = f(x)$, определённая на объединении двух лучей $(-\infty;\, a_1) \cup (a_2;\, +\infty)$, называется *бесконечно большой при* $x \to \infty$, если $\forall\, P > 0\ \exists\, M > 0\ \ \forall\, x$, если $|\,x\,| > M$, то $|\,f(x)\,| > P$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Можно так же определить бесконечно большую функцию в точке.

Определение 4.15. Функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой при*** $\boldsymbol{x \to a}$, если $\forall\ P > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x$ из неравенства $|\ x - a\ | < \delta$ следует неравенство $|\ f(x)\ | > P$. См. рис. 4.5.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

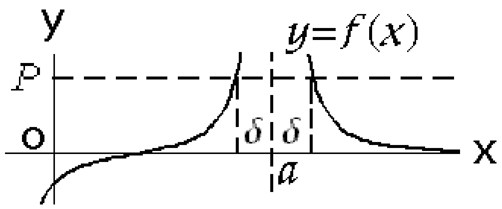


Рис. 4.5

Приведем свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций. При этом будем предполагать, что a – либо конечное число, либо ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).

1. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$. Верно и обратное.

2. Постоянная функция $y = c$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $c = 0$.

3. Сумма, произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

4. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то она является ограниченной в некоторой окрестности точки a.

5. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, а $g(x)$ – ограниченная функция в некоторой окрестности точки a, то их произведение $f(x)g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

6. Если $f(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $|g(x)| \le |f(x)|$, то и $g(x)$ – есть бесконечно малая функция на соответствующем интервале.

7. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\varphi(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ – бесконечно большая, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.

8. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ – бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Свойства предела функции

Снова будем предполагать, что a – либо конечное число, либо ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).

1. Если функция имеет предел при $x \to a$, то он единственен.

2. Если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.

3. О предельном переходе в неравенствах. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $b \le c$.

4. О пределе промежуточной функции. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ и в некоторой окрестности точки a справедливо $f(x) \le g(x) \le h(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

5. Арифметические свойства пределов: пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где b и c – конечные числа, тогда

а) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c$,

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$, если $c \ne 0$.

Односторонние пределы

Определение 4.16. Число b называется ***левым пределом функции f(x)*** при $x \to a$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |\, f(x) - b\, | < \varepsilon$. См. рис. 4.6.

Обозначение: $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Число b называется ***правым пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x : 0 < x - a < \delta \ \Rightarrow\ |\, f(x) - b\, | < \varepsilon$. См. рис. 4.7.

Обозначение: $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Если $a = 0$, то используют обозначение $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$.

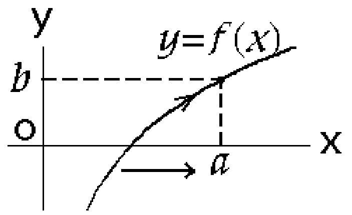


Рис. 4.6

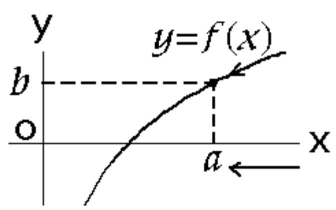


Рис. 4.7

Можно дать другие определения левого и правого пределов.

Определение 4.17. ***Левой окрестностью*** точки a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а ***правой окрестностью*** точки a называется произвольный полуинтервал $[a, d)$.

Левая и правая окрестности точки ∞ будут, соответственно, $(N,+\infty)$ и $(-\infty,N)$.

Определение 4.18. Число b называется ***левым (правым) пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если $f(x)$ определена в некоторой левой (правой) окрестности точки a, и если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists$ левая (правая) окрестность $U(a)$, такая что $\forall x \in U(a)$, $x \neq a$, выполняется $| f(x) - b | < \varepsilon$.

Левый и правый пределы в точке ∞ записываются следующим образом: $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $f(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Левый и правый пределы называют ***односторонними***, обычный предел называют ***двусторонним***.

Теорема 4.4. Для того чтобы существовал $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и чтобы они были равны между собой, т. е.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Критерий Коши существования предела функции

Так же как и для последовательности, для функции существует аналогичный критерий Коши существования предела.

Определение 4.19. Функция $f(x)$ называется функцией, ***удовлетворяющей условию Коши*** при $x \to a$, если $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists$ окрестность $U(a)$ точки a, такая что $\forall x', x'' \in U(a),\ \ x', x'' \neq a$ справедливо $\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$, или на языке $\varepsilon - \delta$: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \forall x', x''$, если $\left|x' - x''\right| < \delta$, то $\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$.

Теорема 4.5 (Критерий Коши). Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши в точке a.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \qquad (4.2)$$

Эта формула получается из неравенства: $\sin x < x < \mathrm{tg} x$, которое верно в некоторой окрестности нуля. Положим сначала, что x положительно, тогда $\sin x > 0$ и поэтому $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$. Переворачивая неравенство, получаем $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Отметим, что последнее неравенство верно и при x отрицательных, так как $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ и $\cos(-x) = \cos x$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, то по свойству о пределе промежуточной функции получаем: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел записывается в двух видах:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e.} \tag{4.3}$$

Существование этого предела для натуральных x было обосновано при изучении числовых последовательностей.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x \sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}{\cos x\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos x} = \frac{1}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{4} = e^{4}.$$

Виды неопределенностей

При вычислении пределов могут возникнуть так называемые неопределенности. Например, предел отношения $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при условии $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ может принимать различные значения, в том числе равняться бесконечности, или даже не существовать. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Перечислим все неопределенности, которые могут возникнуть при вычислении пределов: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(\infty^{0}\right)$, $\left(0^{0}\right)$.

При возникновении неопределенности в каждом конкретном примере необходимо преобразовать выражение под знаком предела так, чтобы неопределенность исчезла.

От неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right)$ можно избавиться, используя второй замечательный предел. В дальнейшем будет показано, как раскрываются неопределенности вида $\left(\infty^{0}\right)$ и $\left(0^{0}\right)$.

Сравнение бесконечно малых

Определение 4.20. Две бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются ***величинами одного и того же порядка малости*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$. В частности, если $k = 1$, то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ ***эквивалентные величины***, и пишут $f(x) \sim g(x)$. Таким образом,

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Определение 4.21. Бесконечно малая $f(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка***, чем бесконечно малая $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Порядок бесконечно малой функции можно определить из условия: если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = k \neq 0$, то $f(x)$ будет бесконечно малой порядка n.

Например, $\sin x$ – бесконечно малая порядка 1 при $x \to 0$, а $1-\cos x$ – бесконечно малая порядка 2, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 4.6. Пусть $f_1(x) \sim f_2(x)$ при $x \to a$, тогда справедливы равенства:

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f_2(x)},$$

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot g(x),$$

где $g(x)$ – некоторая функция, определенная в окрестности точки a.

Для применения этой теоремы на практике полезно знать как можно больше пар эквивалентных функций. Приведем наиболее часто используемые эквивалентности (при $x \to 0$) (см. табл. 4.1):

Таблица 4.1

1	$\sin x \sim x$	6	6. $\ln(1+x) \sim x$
2	$\mathrm{tg} x \sim x$	7	7. $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$
3	$\arcsin x \sim x$	8	8. $e^x - 1 \sim x$
4	$\mathrm{arctg} x \sim x$	9	9. $a^x - 1 \sim x \ln a$
5	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$	10	10. $(1+x)^a - 1 \sim ax$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x)^2}{2x^2} = 2.$

Воспользовались эквивалентностью $1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2$.

2. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\mathrm{tg} x} = \lim_{t \to 0} \left(\sin(t + \frac{\pi}{2}) \right)^{\mathrm{tg} x (t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \to 0} (\cos t)^{-\mathrm{ctg}\, t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} (1 - (1 - \cos t))^{-\frac{1}{\mathrm{tg} t}} = \left[\lim_{t \to 0} \left(1 - \frac{t^2}{2} \right)^{\frac{-2}{t^2}} \right]^{\frac{t}{2}} = e^{\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{2}} = 1.$$

4.3. Непрерывность функции

Непрерывность функции в точке

Дадим три эквивалентных определения функции, непрерывной в точке.

Определение 4.22. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется ***непрерывной в точке a***, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение 4.23. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется ***непрерывной в точке a***, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x$ из неравенства $|\ x - a\ | < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)\ | < \varepsilon$.

Определение 4.24. Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки a и в самой этой точке, называется ***непрерывной в точке a***, если приращение функции $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ в точке a стремится к нулю, когда приращение аргумента $\Delta x = x - a$ стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. См. рис. 4.8.

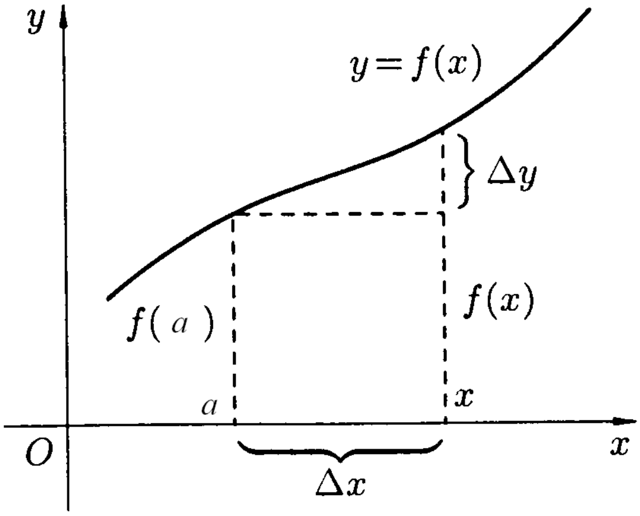


Рис. 4.8

Если функция определена в некоторой окрестности точки a, но не является непрерывной в этой точке, то говорят, что она *имеет разрыв* в этой точке, точка a при этом называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Можно дать определение разрывности функции на языке ε-δ.

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки a, тогда если $\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x_\delta$ и выполняются $|x_\delta - a| < \delta$ и $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon_0$, то $f(x)$ *разрывна* в точке a.

Математическое определение непрерывности функции соответствует интуитивному понятию непрерывной кривой, в том смысле, что ее можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги. Разрывной функции соответствует разрывный график.

Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Если $f(x)$ непрерывна в a и $f(a) \neq 0$, то $f(x)$ сохраняет знак числа $f(a)$ в некоторой окрестности a.

3. Пусть f и g непрерывны в точке a. Тогда $f \pm g$, $f \cdot g$, f / g (если $g(a) \neq 0$) также непрерывны в точке a.

4. Непрерывность суперпозиции. Пусть f: $E \to R$, g: $F \to R$, $f(E) \subset F$. Пусть f – непрерывна в точке a и g – непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $f \circ g$ непрерывна в a.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке

Используя понятие одностороннего предела, можно определить понятие непрерывности справа и слева в точке a.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке а справа*, если существует правый предел в этой точке $f(a+0)$ и выполняется $f(a+0)=f(a)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке а слева*, если существует левый предел в этой точке $f(a-0)$ и выполняется $f(a-0)=f(a)$.

Теорема 4.7. Если функция $y=f(x)$ непрерывна как справа, так и слева в точке a, то она непрерывна в точке a, более того, для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа $f(a-0)$, $f(a+0)$ и $f(a)$ и чтобы они были равные между собой, т. е. $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$.

Функции, непрерывные на отрезке

Определение 4.25. Функция называется ***непрерывной на отрезке***, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Функция $f: E \to R$ называется ***непрерывной***, если она непрерывна в каждой точке своей области определения E.

Перечислим свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда $f(x)$ ограничена на [a,]$[a,b]$, т. е. $\exists C>0\ \forall x\in[a,b]\ \ |f(x)|<C$ (см. рис. 4.9).

2. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $f(x)$ принимает наибольшее M и наименьшее m значения на $[a, b]$, т. е. $\exists x_1, x_2\in[a,b]$ $\min\limits_{[a,b]} f(x)=f(x_1)=m$ и $\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(x_2)=M$ (см. рис. 4.10).

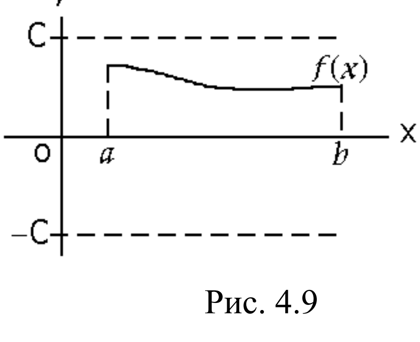


Рис. 4.9

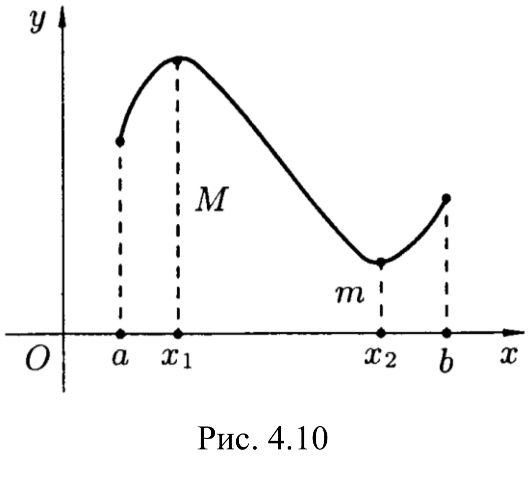


Рис. 4.10

3. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $f(x)$ принимает все промежуточные значения между наименьшим m и наибольшим M значениями, т. е. $\forall C\in[m,M]\ \exists x_0\in[a,b]\ f(x_0)=C$ (см. рис. 4.11).

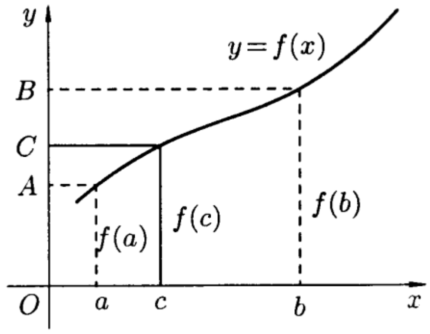


Рис. 4.11

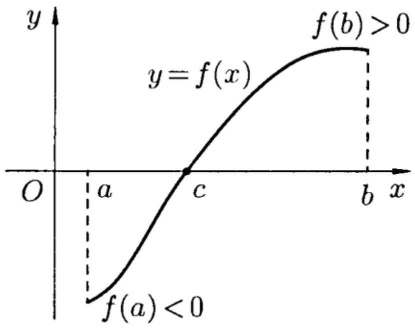


Рис. 4.12

4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, на концах отрезка принимает ненулевые значения, и $f(a)$, $f(b)$ имеют разные знаки, тогда существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a,b)$, такая что $f(c) = 0$ (см. рис. 4.12).

Заметим, в свойствах 1 и 2 существенно, что $f(x)$ непрерывна на отрезке, а не на интервале. Например, $f(x) = \mathrm{tg}x$ непрерывна на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, но она не ограничена на этом интервале. Далее, $f(x) = x$ непрерывна на $(0,1)$, но она не достигает максимума и минимума на этом интервале.

Контрольные вопросы

1. Числовая последовательность и ее предел.
2. Свойства предела числовой последовательности.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
4. Свойства бесконечно малых последовательностей.
5. Монотонная ограниченная последовательность.
6. Критерий Коши существования предела последовательности.
7. Предел функции на бесконечности.
8. Предел функции в точке.
9. Бесконечно большие функции.
10. Свойства предела функции.
11. Односторонние пределы.
12. Критерий Коши существования предела функции.
13. Замечательные пределы.
14. Виды неопределенностей.
15. Сравнение бесконечно малых функций.
16. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Применение эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов.

17. Непрерывность функции в точке.

18. Необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке.

19. Функции, непрерывные на отрезке.

ЛЕКЦИЯ № 5
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Определение производной функции. Ее геометрический и физический смысл

Понятие производной возникло в результате усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или задача о вычислении скорости неравномерного движения.

1. Рассмотрим вопрос о нахождении касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ предполагая, что касательная существует. Пусть $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ – произвольная точка на кривой $y = f(x)$.

Пусть секущая MM_1 составляет с положительным направлением оси OX угол φ. Из прямоугольного треугольника MM_1N (см. рис. 5.1) находим $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

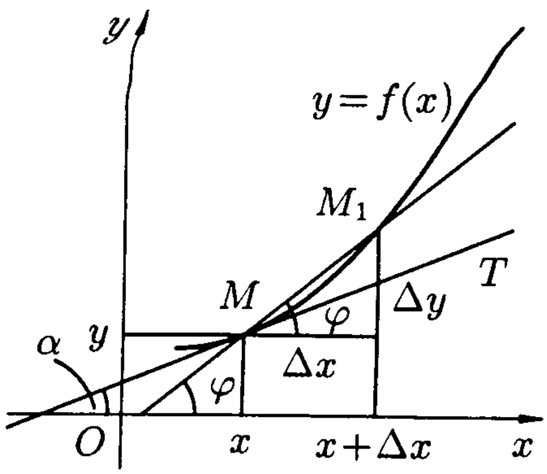


Рис. 5.1

Пусть $M_1 \to M$, тогда $\Delta x \to 0$ и секущая стремится к своему предельному положению – касательной MT в точке M. Обозначим через α угол между касательной MT и направлением оси OX. Тогда при $\Delta x \to 0$ имеем $\varphi \to \alpha$ и в силу непрерывности тангенса $\operatorname{tg} \varphi \to \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, угловой коэффициент касательной в точке M будет равен $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы пришли к понятию ***производной*** функции в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x).$$

Итак, ***угловой коэффициент касательной к графику функции y = f(x) в точке x равен значению ее производной в этой точке: k = f '(x).***

2. Пусть уравнение $x = f(t)$, где f – функция от времени t, а x – пройденный путь, выражает закон движения материальной точки. Необходимо найти скорость движущей точки.

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение M ($OM = x$). В момент $t + \Delta t$ точка займет положение M' ($OM' = x + \Delta x$) (см. рис. 5.2).

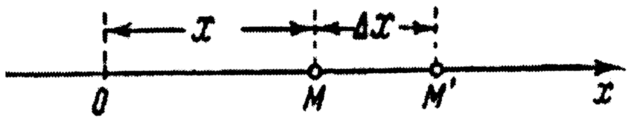


Рис. 5.2

Отсюда $x + \Delta x = f(t + \Delta t)$. За время Δt точка пройдет путь $\Delta x = f(t + \Delta t - f(t)$. Следовательно, отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ выражает скорость движения точки за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ есть мгновенная скорость, т. е. скорость движения в момент времени t: $v_{\text{мг}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = f'(t)$.

Обе задачи привели к одной и той же математической операции, которую назвали ***дифференцированием*** функции, а результат – ***производной*** функции.

Определение 5.1. ***Производной функции*** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. Если функция имеет производную в точке, то она является непрерывной в этой точке.

Обратное утверждение неверно: непрерывная в точке функция может не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является

$y = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке, так как в этой точке не существует касательной к графику функции $y = |x|$.

5.2. Дифференциал функции

Для функции $y = f(x)$ рассмотрим производную $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Отсюда, по определению предела, величина $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon$ является бесконечно малой. Тогда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ или $\Delta y = A\Delta x + \varepsilon\Delta x$, где $A = f'(x)$ – константа. Таким образом, приращение Δy отличается от величины $A\Delta x$ на бесконечно малую величину $\varepsilon\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx.

Определение 5.2. Функция называется ***дифференцируемой*** в точке x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде: $\Delta y = A\Delta x + \varepsilon\Delta x$.

Величина $A\Delta x$ называется ***дифференциалом функции*** $f(x)$ и обозначается $dy = A\Delta x = f'(x)\,\Delta x$.

Величина Δx называется ***дифференциалом независимой переменной*** и обозначается $dx = \Delta x$. Тогда

$$\boxed{dy = f'(x)dx.} \tag{5.2}$$

Теорема 5.2. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке, равную A.

Заметим, что мы можем рассматривать производную, как отношение двух дифференциалов:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}.} \tag{5.3}$$

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием*** функции.

5.3. Правила дифференцирования. Свойства дифференциала. Таблица производных

1. Производная константы равна нулю, т. е. $C' = 0$.

2. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то $C \cdot f(x)$ также имеет производную в точке x, и при этом

$$\boxed{\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x).} \tag{5.4}$$

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма $f(x) = u(x) + v(x)$ также имеет производную в точке x, и при этом

$$\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x).} \tag{5.5}$$

4. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их произведение $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ также имеет производную в точке x и

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).} \tag{5.6}$$

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x и, кроме того, $v(x) \neq 0$, то частное $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ также имеет производную в точке x и

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.} \tag{5.7}$$

6. Пусть дана сложная функция $y = f(u)$, где $u = g(x)$ и пусть $u = g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u = g(x)$. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке x и

$$\boxed{y' = f'(u) \cdot g'(x).} \tag{5.8}$$

Свойства дифференциала

$dc = 0, \ c = \text{const}.$

$d(u \pm v) = du \pm dv.$

$d(cu) = c\,du, \ c = \text{const}.$

$d(uv) = v\,du + u \cdot dv.$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Дифференциал сложной функции: если $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, то $dy = y'_t dt = f'(x) \cdot \varphi'(t) dt$.

Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных: дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента, при этом безразлично, будет ли этот аргумент независимой переменной или функцией от другой независимой переменной. Таким образом, если $z = f(y)$ и $y = g(x)$, то $z = F(x) = f(g(x))$. Тогда свойство инвариантности выражается формулой

$$\boxed{dz = f'(y)dy = F'(x)dx.} \tag{5.9}$$

Таблица производных основных элементарных функций (табл. 5.1)

Таблица 5.1

1. $x' = 1$,	10. $(e^x) = e^x$,
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$,	11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $\left(\sin x\right)' = \cos x$,	12. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
4. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,	13. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
5. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,	14. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
6. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,	15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$,
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,	16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,	17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,
9. $(a^x)' = a^x \ln a$,	18. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Примеры.

1. $$y' = \left(\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[5]{x^2}}{b}\right)' = \left(ax^{\frac{-3}{5}} + \frac{1}{b}x^{\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{3}{5}ax^{-\frac{3}{5}-1} + \frac{2}{3b}x^{\frac{2}{3}-1} =$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{a}{\sqrt[5]{x^8}} + \frac{2}{3}\frac{1}{b\sqrt[3]{x}}.$$

2. $y = \sqrt{x}\sin x$. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения функций:

$$y' = \left(\sqrt{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\sin x + \sqrt{x}(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x.$$

3. $y = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. Воспользуемся правилом дифференцирования частного функций:

$$y'=\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'\cos x}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}.$$

4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$. Так как эта функция сложная, то воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$y'=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)'=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2x}{1-x^4}.$$

5.4. Дифференцирование обратных, неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование обратных функций

Теорема 5.3. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная, строго возрастающая или строго убывающая в некоторой окрестности точки x, и пусть в этой точке существует производная $f'(x)$. Тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ также имеет производную в точке $y = f(x)$, причем выполняются формулы

$$\boxed{\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}} \qquad \text{или} \qquad \boxed{x'_y=\frac{1}{y'_x}.} \tag{5.10}$$

С помощью этой теоремы получаются формулы для производных обратных тригонометрических функций и логарифмической функции.

Производная неявной функции

Определение 5.3. Говорят, что уравнение $F(x,y)=0$ задает функцию $y = f(x)$ *неявно*, если существует множество E, такое что для любого $x\in E$ существует по крайней мере одно y, удовлетворяющее уравнению $F(x, y) = 0$. Одно и то же уравнение может задавать не одну, а несколько функций.

Дифференцируя уравнение $F(x,y)=0$ по x и учитывая, что y зависит от x, можно найти производную y'.

Логарифмическая производная

Определение 5.4. Пусть дана функция $y=f(x)$. ***Логарифмической производной*** этой функции называется производная от натурального логарифма этой функции. А именно, $(\ln y)'_x=(\ln y)'_y\cdot y'=\dfrac{y'}{y}$.

Производная сложно-степенной (сложно-показательной) функции

Определение 5.5. Функция вида $y=u(x)^{v(x)}$ называется ***сложно-степенной*** или ***сложно-показательной*** функцией.

Для того чтобы продифференцировать ее, воспользуемся логарифмической производной. Имеем

$$\ln y=\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)=v(x)\ln u(x),\qquad (\ln y)'=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}.$$

Так как $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, то $y'=y\cdot(\ln y)'$. Следовательно,

$$\boxed{\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}\right).}\tag{5.11}$$

Пример. Найдем производную функции $y=(\sin x)^x$.

Решение. Имеем $\ln y=\ln(\sin x)^x=x\ln\sin x$,

$$(\ln y)'=x'\ln(\sin x)+x(\ln(\sin x))'=\ln(\sin x)+\frac{x\cos x}{\sin x}=\ln(\sin x)+x\operatorname{ctg}x,$$

тогда $y'=(\sin x)^x(\ln(\sin x)+x\operatorname{ctg}x)$.

Производная функции, заданной параметрически

Определение 5.6. Говорят, что функция задана ***параметрически,*** если она задана уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ где t – параметр, пробегающий промежуток значений T.

Теорема 5.4. Пусть функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ имеют производные в окрестности некоторой точки t и $x'(t)\neq 0$. Тогда параметрически заданная функция имеет производную в этой точке, которая находится по формуле

$$\boxed{y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}} \qquad \text{или} \qquad \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.} \tag{5.12}$$

5.5. Формула приближенного вычисления. Производные высших порядков

Формула приближенного вычисления

Напомним, что приращение дифференцируемой функции можно представить в виде $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon\Delta x$.

Если Δx мало, то приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ отличается от дифференциала $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx. Отсюда имеем приближенное равенство

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) \qquad \text{или} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.} \tag{5.13}$$

Это и есть формула приближенного вычисления.

Производные высших порядков

Определение 5.7. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f'(x)$ также дифференцируема в точке x_0, то значение выражения $\left(f'(x_0)\right)'$ называется ***второй производной*** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

По индукции определяется ***производная n-го порядка*** в точке x_0, как производная от производной $(n-1)$-го порядка, и обозначается $f^{(n)}(x_0)$ или $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

Разумеется, производная n-го порядка может существовать и не существовать. Но если функция имеет n-ю производную, то тем самым имеется ввиду, что она имеет все производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Физический смысл второй производной: если $s = f(t)$ – путь, пройденный точкой за время t, то вторая производная пути по времени есть ускорение точки в момент времени t, т. е. $a = s'' = f''(t)$.

Формула Лейбница

Пусть функции $u(x), v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x. Тогда функция $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ также имеет производную порядка n, выражаемую формулой

$$\boxed{\begin{gathered} f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \\ = uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)} v, \end{gathered}} \tag{5.14}$$

где $u^{(0)} \equiv u$ и $v^{(0)} \equiv v$, а C_n^k – биномиальный коэффициент, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Формула (5.14) называется ***формулой Лейбница***.

5.6. Приложения производной функции

Правило Лопиталя

Теорема 5.5 (Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a (a – число или ∞). Причем $g'(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ в любой точке этой окрестности и выполнено одно из условий:

1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,

2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.} \tag{5.15}$$

(A – число или ∞).

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Правило Лопиталя можно применять несколько раз подряд, но только конечное число раз, пока не исчезнет неопределенность. Подчеркнем еще раз, что теорема Лопиталя применима только в том случае, если предел отношения производных существует (конечный или бесконечный).

Раскрытие неопределенностей вида (0·∞), (∞–∞), $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Остальные виды неопределенностей приводятся к ним следующим образом:

1) (∞–∞). Преобразование $f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{1/f(x)g(x)}$ дает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

2) (0·∞). Преобразование $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ дает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, если $f(x)$ – бесконечно малая функция, а $g(x)$ бесконечно большая, или неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, в противном случае.

3) $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$. Преобразуем функцию следующим образом: $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$, тогда в степени получим неопределенность вида (0·∞).

Примеры: С помощью правила Лопиталя найти пределы следующих функций:

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x\cdot 3x^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^3\right)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot 3x^2}=0.$$

Здесь пришлось дважды применять формулу (5.15).

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Монотонность функции

Определение 5.8. Функция, только возрастающая или только убывающая на некотором промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке. Строго возрастающая или строго убывающая функция называется ***строго монотонной***. При этом говорят, что функция **(*строго*) *монотонно возрастает*** или **(*строго*) *монотонно убывает***.

Теорема 5.6 (Необходимый признак монотонности функции).

1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно возрастает на некотором промежутке, то ее производная неотрицательна на этом промежутке, т. е. $f'(x) \geq 0$.

2. Если дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно убывает на некотором промежутке, то ее производная неположительна на этом промежутке, т. е. $f'(x) \leq 0$.

Геометрически утверждение теоремы сводится к тому, что для графика возрастающей дифференцируемой функции касательные образуют с положительным направлением оси OX острые углы α $\left(\operatorname{tg}\alpha = f'(x)\right)$ или в некоторых точках параллельны оси OX (см рис. 5.3), а для убывающей функции – углы, большие прямого угла (см. рис. 5.4).

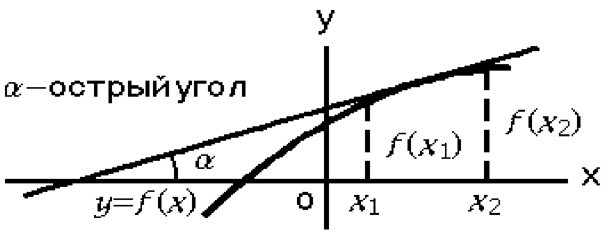


Рис. 5.3

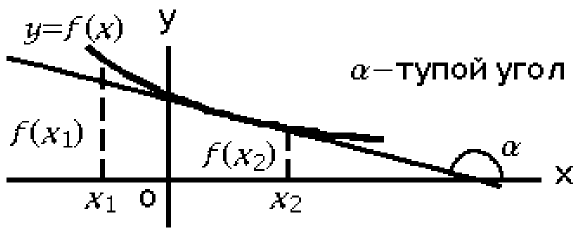


Рис. 5.4

Теорема 5.7 (Достаточный признак монотонности функции).

1. Если производная дифференцируемой функции строго положительна внутри некоторого промежутка, т. е. $f'(x) > 0$, то функция строго монотонно возрастает на этом промежутке.

2. Если производная дифференцируемой функции строго отрицательна внутри некоторого промежутка, т. е. $f'(x) < 0$, то функция строго монотонно убывает на этом промежутке.

Исследование функции на экстремум

Определение 5.9. Точка x_0 называется ***точкой максимума*** (рис. 5.5) (***минимума*** (рис. 5.6)) функции $f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки, такая, что $\forall x \in U(x_0) \quad f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$.

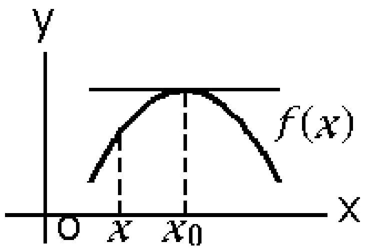


Рис. 5.5

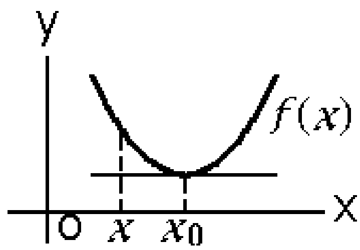


Рис. 5.6

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума*** функции.

Теорема 5.8 (Необходимое условие экстремума). Пусть функция непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет экстремум в этой точке. Тогда производная функции в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Геометрически это означает, что в точке экстремума функции $y = f(x)$ касательная к ее графику либо параллельна оси OX (как на рис. 5.7), либо не существует (как на рис. 5.8).

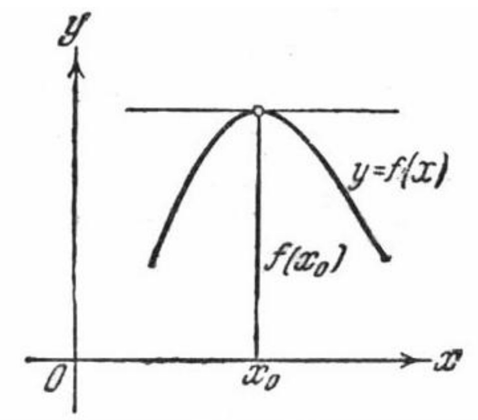


Рис. 5.7

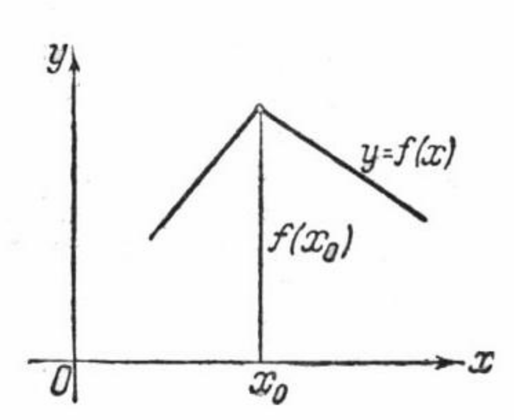


Рис. 5.8

Теорема 5.9 (**Достаточные условия экстремума**). Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0, непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности, за исключением, может быть, самой точки x_0. Тогда если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой экстремума. При этом, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка максимума; если с «–» на «+», то x_0 – точка минимума. Если знак производной при переходе через точку x_0 не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

Определение 5.10. Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками***. Из последней теоремы следует, что критические точки необязательно будут точками экстремума.

Теорема 5.10 (Общее условие существования экстремума). Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно, причем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда если n – четное, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n – нечетное, то функция $f(x)$ не имеет экстремум в точке x_0.

На практике часто применяется следствие из этой теоремы.

Следствие. Если для функции $f(x)$ в точке x_0 первая производная $f'(x)$ равна нулю, а вторая производная $f''(x)$ отлична от нуля, т. е. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, причем 1) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Решение. Находим производную функции:

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

Находим критические точки: $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$. Получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Производная не существует при $x_3 = -1$. Таким образом, получили три критические точки. Занесем все данные в таблицу, определим знаки производной и промежутки возрастания, убывания функции:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$
y'	+	0	–	∞	–	0	+
y	↑	max	↓	т. р.	↓	min	↑

Таким образом, получили, что $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$ являются точками экстремума, причем $y_{\max} = y(-2) = -4$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

Контрольные вопросы

1. Определение производной функции. Геометрический смысл производной.
2. Физический смысл производной.
3. Определение дифференцируемой функции. Дифференциал функции.
4. Правила дифференциала.
5. Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.
6. Таблица производных основных элементарных функций.
7. Дифференцирование обратных функций.
8. Производная неявной функции.
9. Логарифмическая производная. Производная сложно-степенной функции.
10. Производная функции, заданной параметрически.
11. Формула приближенного вычисления.
12. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
13. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей различных видов.
14. Монотонность функции. Необходимые и достаточные условия монотонности функции.
15. Точки экстремума. Необходимое и достаточное условия экстремума.
16. Общее условие существования экстремума.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1
ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задание № 1. Найти линейную комбинацию $2\cdot A+3\cdot B$ матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Используя свойства матриц (определения 1.4 и 1.5 лекции № 1), найдем

$$2\cdot A+3\cdot B=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ. $2\cdot A+3\cdot B=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$

Задание № 2. Для матриц

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}\ \text{и}\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

найти их произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Решение. Используя правило умножения матриц (1.1), найдем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 4 & (-2)\cdot(-2)+3(-3)+1\cdot(-4) & (-2)\cdot(-3)+3\cdot 1+1\cdot 5\\ 5\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot 4 & 5\cdot(-2)+4(-3)+0\cdot(-4) & 5(-3)+4\cdot 1+0\cdot 5\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-5)\cdot 4 & 2\cdot(-2)+(-1)(-3)+(-5)(-4) & 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -9 & 14\\ 5 & -22 & -11\\ -18 & 19 & -32\end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1(-2) + (-2)\cdot 5 + (-3)\cdot 2 & 1\cdot 3 + (-2)\cdot 4 + (-3)(-1) & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + (-3)(-5) \\ 0\cdot(-2) + (-3)\cdot 5 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + (-3)\cdot 4 + 1(-1) & 0\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 1(-5) \\ 4(-2) + (-4)\cdot 5 + 5\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-4)\cdot 4 + 5(-1) & 4\cdot 1 + (-4)\cdot 0 + 5(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}.$$

Из решения задачи следует, что $A \cdot B \neq B \cdot A$. Это означает, что матрицы A и B не коммутируют.

Ответ. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$.

Задание № 3. Вычислить заданные определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) Используя правило вычисления определителя второго порядка (1.2), найдем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - (-3)\cdot 2 = -4 + 6 = 2.$$

б) Используя правило вычисления определителей третьего порядка (1.3), найдем

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 3 - 5\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= 18 + 2 + 60 - 9 - 15 - 16 = 40.$$

в) Для вычисления заданного определителя, воспользуемся свойством определителей (1.5) «разложение по строке или столбцу». Из соображения рациональности необходимо разлагать определитель по элементам той строки или столбца, где больше нулей. Поэтому будет разлагать по элементам первой строки (можно было по элементам 4-й строки, или 1-го столбца, или 4-го столбца).

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Полученные определители 3-го порядка} \\ \text{можно вычислять либо по правилу (1.3), либо} \\ \text{снова раскладывать по строке или столбцу.} \\ \text{Будем их раскладывать по 3-й строке.} \end{array} \right\} = -5\left(1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+2\cdot 4\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Используем правило вычисления} \\ \text{определителей 2-го порядка (1.2)} \end{array} \right) =$$

$$= 5\cdot(8\cdot 1 - 7\cdot 4) - 8(8\cdot 1 - 7\cdot 4) = -100 + 160 = 60.$$

Ответ. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2;$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40;$ в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 60.$

Задание № 4. Решить систему уравнений двумя методами: по правилу Крамера и матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Решение.

1) Решение системы уравнений по правилу Крамера.

Вычисляем определитель матрицы системы, используя правило (1.3) вычисления определителей 3-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 7\cdot 5\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 8\cdot 6 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 105 - 0 - 48 = 27.$$

Так как определитель $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение. Вычисляем определители Δ_i $(i = 1, 2, 3)$, получаемые из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 6(-6) + 9\cdot 8\cdot 3 - (-6)\cdot 5\cdot 3 - 9\cdot 2\cdot 0 - 6\cdot 8\cdot 6 =$$

$$= 0 - 72 + 216 + 90 - 0 - 288 = -54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 9\cdot 0 + 6\cdot 6\cdot 7 + 4(-6)\cdot 3 - 7\cdot 9\cdot 3 - 4\cdot 6\cdot 0 - (-6)\cdot 6\cdot 1 =$$

$$= 0 + 252 - 72 - 189 - 0 + 36 = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot 5(-6) + 2\cdot 9\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 6 - 7\cdot 5\cdot 6 - 4\cdot 2\cdot(-6) - 8\cdot 9\cdot 1 =$$

$$= -30 + 126 + 192 - 210 + 48 - 72 = 54.$$

По формулам Крамера (1.7) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

2) Решение системы уравнений матричным методом.

Находим матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

методом присоединенной матрицы. Так как $\det A = \Delta = 27 \neq 0$, то матрица A^{-1} существует, поэтому решение системы существует и единственно. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A, используя формулу (1.4):

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -63, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Запишем присоединенную матрицу, транспонируя матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^V=(A_{ij})^T=\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу по формуле (1.8)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^V=\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений, используя формулу (1.9):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -48\cdot 6+24\cdot 9+(-3)(-6) \\ 42\cdot 6+(-21)\cdot 9+6\cdot(-6) \\ (-3)\cdot 6+6\cdot 9+(-3)(-6) \end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} 54 \\ 27 \\ 54 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x_1=2,\quad x_2=1,\quad x_3=2.$

Задание № 5. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=4. \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы $\overline{A}$, и с помощью элементарных преобразований строк преобразуем матрицу $\overline{A}$ к треугольному виду.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\6&-3&2&4&5&3\\6&-3&4&8&13&9\\4&-2&1&1&2&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}\\\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}\\\mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{I}\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&1&2&4&3\\0&0&-1&-3&-4&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\\mathrm{III}+\mathrm{II}\\\mathrm{IV}-\mathrm{II}\end{array}\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\mathrm{II}\cdot(-1)\\\\\mathrm{IV}\leftrightarrow\mathrm{III}\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&1&2&4&3\\0&0&0&-1&0&3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Так как $\operatorname{rang}\overline{A}=\operatorname{rang}A=3$, то система совместна. Поскольку $\operatorname{rang}\overline{A}=3<5=n$, то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_2, x_3 и x_4, соответствующие столбцам ненулевого минора 3-го порядка $\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных – x_1 и x_5.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ \qquad\qquad x_3+2x_4+4x_5=3,\\ \qquad\qquad\quad -x_4\qquad\quad=3.\end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_4=-3$, подставляем во второе уравнение и выражаем x_3 через x_5; $x_3=9-4x_5$. Подставляем это выражение и $x_4=-3$ в первое уравнение, получим

$$2x_1-x_2+9-4x_5-6+3x_5=2\Rightarrow x_2=1-x_5+2x_1.$$

Обозначая свободные переменные – x_1 через c_1, x_5 через c_2, запишем общее решение системы:

$$\begin{cases}x_1=c_1,\\x_2=1+2c_1-c_2,\\x_3=9-4c_2,\\x_4=-3,\\x_5=c_2.\end{cases}$$

В матричном виде решение системы уравнений примет вид:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $X_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное решение неоднородной системы уравнений.

Ответ. Общее решение системы уравнений $(c_1, 1+2c_1-c_2, 9-4c_2, -3, c_2)$; частное решение системы уравнений (0, 1, 9, –3, 0).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти линейную комбинацию 4·*A*–5·*B* матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $4A-5B=\begin{pmatrix} -7 & -9 & 10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}$.

2. Для матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

найти их произведения *A*·*B* и *B*·*A*.

Ответ. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 11 & 5 & 2 \\ 20 & 0 & 19 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 14 \\ -5 & 8 & -11 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить заданные определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ответ. а) 5; б) –3; в) 100.

4. Решить систему уравнений двумя методами: по правилу Крамера и матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1.$

5. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

Ответ. Общее решение системы уравнений $(1-7c_1-4c_2,\ 1-2c_1-5c_2,$ $6c_1+6c_2,\ 3c_1,\ 3c_2)$; частное решение системы уравнений (1, 1, 0, 0, 0).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Задание № 1. Даны две точки A(3, –4, 1) и B(4, 6, –3). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину и направляющие косинусы.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле (2.1а). В данном случае имеем $x_1 = x_A = 3, y_1 = y_A = -4, z_1 = z_A = 1, x_2 = x_B = 4,$ $y_2 = y_B = 6, z_2 = z_B = -3.$ В результате

$$\overrightarrow{AB} = (4-3,\ 6-(-4),\ -3-1) = (1,\ 10,\ -4).$$

Длину вектора находим по формуле (2.2а)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}.$$

Направляющие косинусы вектора определяем по формулам (2.4)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{117}}, \cos\beta = \frac{10}{\sqrt{117}}, \cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{117}}.$$

Ответ. $\overrightarrow{AB} = (1,\ 10,\ -4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{117}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{117}}$, $\cos\beta = \dfrac{10}{\sqrt{117}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-4}{\sqrt{117}}$.

Задание № 2. Дано:

$$\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ \varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3},\ \bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b},\ \bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b}.$$

Найти $\bar{c} \cdot \bar{d}$ и длину вектора $\bar{c}$.

Решение. Используя свойства скалярного произведения векторов (см. лекцию № 2) и его определение (2.9), находим

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = (2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}) = 2\bar{a}^2 - 3(\bar{b} \cdot \bar{a}) + 4(\bar{a} \cdot \bar{b}) - 6\bar{b}^2 = 2\left|\bar{a}\right|^2 + \bar{a} \cdot \bar{b} - 6\left|\bar{b}\right|^2 =$$

$$= 2\left|\bar{a}\right|^2 + \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\bar{a} \wedge \bar{b} - 6\left|\bar{b}\right|^2 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 6 \cdot 1^2 = 8 + 1 - 6 = 3.$$

Длину вектора $\vec{c}$ найдем, воспользовавшись равенством (2.10) $\left(\vec{c} \cdot \vec{c}\right) = \left|\vec{c}\right|^2$:

$$\left|\bar{c}\right|^2 = (\bar{c} \cdot \bar{c}) = (2\bar{a} - 3\bar{b})^2 = 4\bar{a}^2 - 12(\bar{a} \cdot \bar{b}) + 9\bar{b}^2 = 4\left|\bar{a}\right|^2 - 12\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) + 9\left|\bar{b}\right|^2 =$$

$$= 4 \cdot 4 - 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1 = 16 - 12 + 9 = 13 \Rightarrow \left|\bar{c}\right| = \sqrt{13}.$$

Ответ. $\bar{c} \cdot \bar{d} = 3$, $\left|\bar{c}\right| = \sqrt{13}$.

Задание № 3. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $\left|\bar{a}\right| = 2$, $\left|\bar{b}\right| = 3$, $\varphi = \bar{a} \wedge \bar{b} = \dfrac{5\pi}{6}$. Найти $\left|\left(2\bar{a} + 3\bar{b}\right) \times \left(\bar{a} - 4\bar{b}\right)\right|$.

Решение. Используя свойства векторного произведения векторов (см. лекцию № 2), найдем

$$\left(2\bar{a} + 3\bar{b}\right) \times \left(\bar{a} - 4\bar{b}\right) = 2\left(\bar{a} \times \bar{a}\right) + 3\left(\bar{b} \times \bar{a}\right) - 8\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) - 12\left(\bar{b} \times \bar{b}\right) =$$
$$= \left\{\bar{a} \times \bar{a} = \bar{b} \times \bar{b} = 0,\ \left(\bar{b} \times \bar{a}\right) = -\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)\right\} = -11\left(\bar{a} \times \bar{b}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-4\bar{b}\right)\right| = \left|-11\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right| = 11\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = 11\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right) =$$

$$= 11\cdot 2\cdot 3\cdot\left(+\frac{1}{2}\right) = 33.$$

Ответ. $\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-4\bar{b}\right)\right| = 33.$

Задание № 4. Задан треугольник ABC координатами своих вершин $A(1, 2, 0)$, $B(3, 2, 1)$, $C(-2, 1, 2)$. Найти площадь треугольника ABC, величину угла A и длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле (2.1а):

$$\overrightarrow{AB} = (3-1,\ 2-2,\ 1-0) = (2,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{AC} = (-2-1,\ 1-2,\ 2-0) = (-3,\ -1,\ 2).$$

Площадь S треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. По формулам (2.14), (2.15) находим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,\ -7,\ -2).$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-7)^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+49+4} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$

Величину угла A найдем, воспользовавшись формулой для косинуса угла между векторами (2.12):

$$\cos A = \cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC}\right) = \frac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} =$$

$$= \frac{2\cdot(-3)+0\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2^2}} = -\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = -\frac{4}{\sqrt{70}}$$

$$\Rightarrow\ \angle A = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{70}}\right) = \pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{70}}.$$

Искомую высоту треугольника найдем, воспользовавшись формулой для площади треугольника $S = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|\cdot h_{AC}$, где h_{AC} – высота. Отсюда находим

$$h_{AC} = \frac{2S}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{\frac{3}{7}}\ .$$

Ответ. $S = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$, $\angle A = \pi - \arccos\dfrac{4}{\sqrt{70},}$ $h_{AC} = 3\sqrt{\dfrac{3}{7}}.$

Задание №5. Доказать, что четыре точки

$$A_1(3,\ 5,\ 1),\ A_2(2,\ 4,\ 7),\ \ A_3(1,\ 5,\ 3),\ A_4(4,\ 4,\ 5)$$

лежат в одной плоскости.

Решение. Достаточно показать, что три вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ лежат в одной плоскости (т. е. компланарны). Находим координаты указанных векторов, воспользовавшись формулами (2.1а):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (2-3,\ 4-5,\ 7-1) = (-1,\ -1,\ 6),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (1-3,\ 5-5,\ 3-1) = (-2,\ 0,\ 2),$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (4-3,\ 4-5,\ 5-1) = (1,\ -1,\ 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов (равенство нулю смешанного произведения векторов (2.17)):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0-2+12-0-8-2 = 0.$$

Итак, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ компланарны, следовательно, точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат в одной плоскости.

Задание № 6. Даны вершины пирамиды

$$A\ (5,\ 1,\ -4),\ B\ (1,\ 2,\ -1),\ C\ (3,\ 3,\ -4),\ D\ (2,\ 2,\ 2).$$

Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Объем пирамиды V равен:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|.$$

Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, воспользовавшись формулой (2.1а):

$$\overline{AB}=(1-5,\ 2-1,\ -1-(-4))=(-4,\ 1,\ 3),$$
$$\overline{AC}=(3-5,\ 3-1,\ -4-(-4))=(-2,\ 2,\ 0),$$
$$\overline{AD}=(2-5,\ 2-1,\ 2-(-4))=(-3,\ 1,\ 6).$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-48+0-6+18+12-0\right|=4.$$

Так как объем V пирамиды есть $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h,$ то $h=\frac{3V}{S_{ABC}}$, где h – высота пирамиды, S_{ABC} – площадь основания (грань ABC). Находим S_{ABC}:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\ \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}\ \right|=\frac{1}{2}\left|\left(\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\ \right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\ (-6,\ -6,\ -6)\ \right|=\frac{6}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h=\frac{3\cdot 4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Ответ. $V=4,\ h=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано: $\left|\bar{a}\right|=3,\ \left|\bar{b}\right|=4,\ \varphi=\left(\bar{a}\,^\wedge\,\bar{b}\right)=\frac{2\pi}{3},\ \bar{c}=3\bar{a}-\bar{b},\ \bar{d}=2\bar{a}+5\bar{b}.$ Найти $\bar{c}\cdot\bar{d}$ и длину вектора $\bar{c}$.

Ответ. $\bar{c}\cdot\bar{d}=85,\ \left|\bar{c}\right|=\sqrt{133}.$

2. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $\left|\bar{a}\right|=1,\ \left|\bar{b}\right|=3,\ \varphi=\bar{a}\,^\wedge\,\bar{b}=\frac{\pi}{6}.$ Найти $\left|\left(-3\bar{a}+4\bar{b}\right)\times\left(2\bar{a}+7\bar{b}\right)\right|.$

Ответ. $\left|\left(-3a+4b\right)\times\left(2a+4b\right)\right|=\frac{87}{2}.$

3. Даны вершины треугольника $A(-2,\ 1,\ 3)$, $B(1,\ 3,\ -1)$, $C(3,\ -2,\ 1)$ Найти площадь треугольника ABC, величину угла A и длину высоты, опущенной из вершины A на сторону AC.

Ответ. $S=\dfrac{\sqrt{813}}{2}$, $\angle A=\arccos\dfrac{17}{\sqrt{1102}}$, $h=\sqrt{\dfrac{813}{38}}$.

4. Даны вершины пирамиды $A(3,\ 2,\ –4)$, $D(2,\ –5,\ 1)$, $C(3,\ 1,\ –1)$, $D(4,\ 4,\ 2)$. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Ответ. $V=4,\ h=\dfrac{24}{\sqrt{266}}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задание № 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,\ 2)$ под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к оси абсцисс. Представить полученное уравнение в виде уравнения в отрезках и нормального уравнения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении (3.8). Полагаем здесь $x_0=1,\ y_0=2,\ k=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1,$ получим

$$y-2=1(x-1)\Rightarrow y=x+1.$$

Представляем это уравнение в виде уравнения в отрезках (3.2):

$$y=x+1\Rightarrow -x+y=1\Rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1.$$

Прямая пересекает оси координат в точках (0, 1) и (–1, 0).

Приводим полученное уравнение к нормальному виду:

$$y=x+1\Rightarrow -x+y-1=0\Rightarrow\left\{\text{умножая на множитель } \lambda=+\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Здесь $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. расстояние от 0 (0, 0) до прямой равно $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $y=x+1,\quad \dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1}=1,\quad -\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$.

Задание № 2. Даны вершины треугольника

$$A\ (1,2),\ B\ (3,-5), C\ (-2,-3).$$

Найти уравнение всех его сторон, уравнение высоты *CD*, медианы *BM*и угол между высотой *CD* и медианой *BM*.

Решение. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две заданные точки (3.4), находим:

прямая *AB*:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{-5-2}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}\Rightarrow -7x+7=2y-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x+2y-11=0;$$

прямая *AC*:

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{-2-1}\Rightarrow\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-5}\Rightarrow 5x-5=3y-6\Rightarrow -5x+3y-1=0;$$

прямая *BC*:

$$\frac{x-3}{-2-3}=\frac{y+5}{-3+5}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y+5}{2}\Rightarrow 2x-6=-5y-25\Rightarrow 2x+5y+19=0;$$

Уравнение высоты *CD* найдем, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении (3.8), где $x_0=x_c=-2,\ y_0=y_c=-3, k=-\frac{1}{k_{AB}}$ (условие перпендикулярности прямой *AB* и высоты *CD*), $k_{AB}=-\frac{7}{2}$ – угловой коэффициент прямой *AB*,

$$y+3=\frac{2}{7}(x+2)\Rightarrow 7y+21=2x+4\Rightarrow 2x-7y-17=0.$$

Для получения уравнения медианы *BM* найдем координаты точки *M*, как середины отрезка *AC*:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_c}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Далее, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (3.4), получим

$$\frac{x-3}{-\frac{1}{2}-3}=\frac{y+5}{-\frac{1}{2}+5}\Rightarrow\frac{x-3}{-\frac{7}{2}}=\frac{y+5}{\frac{9}{2}}\Rightarrow 9x-27=-7y-35\Rightarrow 9x+7y+8=0.$$

Для определения угла между высотой CD и медианой BM, воспользуемся формулой (3.18). Прежде найдем угловые коэффициенты высоты CD и медианы BM

$$2x-7y-17=0 \Rightarrow y=\frac{2}{7}x-\frac{17}{7} \Rightarrow k_{CD}=\frac{2}{7}.$$

$$9x+7y+8=0 \Rightarrow y=-\frac{9}{7}x-\frac{8}{7}, \Rightarrow k_{BM}=-\frac{9}{7}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|k_{BM}-k_{CD}|}{1+k_{BM}\cdot k_{CD}}=\frac{\frac{2}{7}+\frac{9}{7}}{1-\frac{18}{49}}=\frac{77}{31} \Rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\frac{77}{31}.$$

Ответ. AB: $7x+2y-11=0$, AC: $-5x+3y-1=0$, BC: $2x+5y+19=0$, CD: $2x-7y-17=0$, BM: $9x+7y+8=0$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{77}{31}$.

Задание № 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1{,}2)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2, 3, 5)$. Привести полученное уравнение плоскости к общему виду, в отрезках и нормальному виду.

Решение. Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору (3.25), найдем

$$2\cdot(x-1)+3\cdot(y+1)+5\cdot(z-2)=0.$$

Раскрываем скобки, приводим уравнение к общему виду (3.20):

$$2x-2+3y+3+5z-10=0 \Rightarrow 2x+3y+5z-9=0.$$

Приводим это уравнение к виду в отрезках (3.21):

$$2x+3y+5z-9=0 \Rightarrow 2x+3y+5z=9 \Rightarrow \frac{x}{9/2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9/5}=1.$$

Следовательно, плоскость пересекает оси координат в точках $\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right)$, $(0, 3, 0)$, $\left(0, 0, \frac{9}{5}\right)$.

Для получения нормального уравнения плоскости, умножим обе части общего уравнения плоскости на нормирующий множитель:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2^2+3+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{38}}.$$

Перед корнем взят знак «плюс», так как свободный член $D=-9$ общего уравнения отрицателен. Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{38}}\left(2x+3y+5z-9\right)=0 \quad \frac{1}{\sqrt{38}}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{38}}x+\frac{3}{\sqrt{38}}y+\frac{5}{\sqrt{38}}z-\frac{9}{\sqrt{38}}=0.$$

Здесь $p=9/\sqrt{38}$, т. е. расстояние от точки $O(0,\ 0,\ 0)$ до плоскости равно $\frac{9}{\sqrt{38}}$; $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{38}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{38}}$.

Ответ. $2x+3y+5z-9=0$, $\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}+\frac{z}{\frac{9}{5}}=1$,

$$\frac{2}{\sqrt{38}}x+\frac{3}{\sqrt{38}}y+\frac{5}{\sqrt{38}}z-\frac{9}{\sqrt{38}}=0.$$

Задание № 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,5,-7)$, $M_2(-3,6,3)$ $M_3(-2,7,3)$, и расстояние от точки $M_0(1,-1,2)$ до этой плоскости.

Решение. Находим уравнение плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки (3.22):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Разлагаем определитель}\\ \text{по 1-й строке}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}-(y-5)\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}+(z+7)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow-10(x-1)+10(y-5)-5(z+7)=0$$

$$\Rightarrow-2x+2+2y-10-z-7=0\Rightarrow2x-2y+z+15=0.$$

Для определения расстояния от точки M_0 до плоскости $M_1M_2M_3$ воспользуемся формулой (3.27), где

$A=2,\ B=-2,\ C=1,\ D=15,\ x'=x_0=1,\ y'=y_0=1,\ z'=z_0=2$:

$$d=\frac{2\cdot1+2\cdot1+2+15}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{21}{3}=7.$$

Ответ. $2x-2y+z+15=0,\ d=7$.

Задание № 5. Найти угол между плоскостями

$$-6x+2y-3z+1=0,\ x+6y+2z-10=0.$$

Решение. Двухгранный угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}=(-6, 2, -3)$, $\overrightarrow{n_2}=(1, 6, 2)$. Поэтому угол между плоскостями определяется равенством (3.42):

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{-6\cdot 1+2\cdot 6-3\cdot 2}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+6^2+2^2}}=0.$$

Таким образом, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, т. е. плоскости перпендикулярны.

Ответ. Угол между плоскостями $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Задание № 6. Написать каноническое уравнение прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общим уравнением).

$$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-3z+6=0. \end{cases}$$

Решение. Проверим, что нормальные вектора плоскостей $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,-3)$ неколлинеарны (см. формулу (2.8)). Имеем $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$. Нормальные вектора плоскостей неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны. Следовательно, две плоскости пересекаются по прямой. Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей. Следовательно, направляющий вектор $\vec{a}$ находим по формуле (2.14)

$$\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}\right]=\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(-2, 4, -2).$$

Теперь выберем какую-нибудь точку на прямой. Поскольку направляющий вектор прямой непараллелен ни одной из координатных плоскостей, то прямая пересекает все три координатные плоскости. Следовательно, в качестве точки на прямой может быть взята точка ее пересечения с координатными плоскостями, например, с плоскостью $z=0$. Координаты этой точки находим, решая систему трех уравнений

$$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-3z+6=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Получим $x_0 = -2,\ y_0 = 4,\ z = 0,$ т.е. $M_0(-2, 4, 0)$.

Подставляем найденные координаты направляющего вектора и точку в уравнение прямой (3.29), получим

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-2} \Rightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Ответ. Каноническое уравнение прямой имеет вид: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$.

Задание № 7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}$ и плоскости $x + y + 2z - 9 = 0$.

Решение. Найдем скалярное произведение направляющего вектора прямой $\vec{a} = (1, 1, -4)$ и нормального вектора плоскости $\vec{n} = (1, 1, 2)$

$$(\vec{a} \cdot \vec{n}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -6 \neq 0.$$

Следовательно, направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости неортогональны, т. е. прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Положим

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4} = t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 3 + t, \\ z = -1 - 4t. \end{cases}$$

Подставляем эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$2 + t + 3 + t + 2(-1 - 4t) - 9 = 0 \Rightarrow -6t - 6 = 0 \Rightarrow t_0 = -1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = -1$, получаем:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 3.$$

Ответ. Прямая и плоскость пересекаются в точке (1, 2, 3).

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,-1)$ под углом $\frac{3\pi}{4}$ к оси абсцисс. Представить полученное уравнение в виде уравнения в отрезках и нормального уравнения.

Ответ. $y=-x+1,\quad \frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1,\quad \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$

2. Даны вершины треугольника $A(3,-2)$, $B(-3,-1)$, $C(2,5)$. Найти уравнение всех его сторон, уравнение высоты *CD*, медианы *BM* и угол между высотой *CD* и медианой *BM*.

Ответ. *AB*: $x+6y+9=0$; *AC*: $7x+y-19=0$, *BC*: $6x-5y+13=0$, *CD*: $y=6x-7$, *BM*: $5x-11y+4=0$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{61}{41}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2,\ -3,\ 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(-1,2,5)$. Привести полученное уравнение плоскости к общему виду, в отрезках и нормальному виду.

Ответ.

$$-x+2y+5z+3=0,\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}+\frac{z}{-\frac{3}{5}}=1,\quad \frac{x}{\sqrt{30}}-\frac{2}{\sqrt{30}}y+\frac{5}{\sqrt{30}}z-\frac{3}{\sqrt{30}}=0.$$

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0,3,5)$, $M_2(0,-1,-3)$, $M_3(4,0,0)$, и расстояние от точки $M_0(-1,4,6)$ до этой плоскости.

Ответ. $x+8y-4z-4=0,\quad d=\frac{5}{9}.$

5. Найти угол между плоскостями $x-y+z\sqrt{2}-5=0$, $x+y-z\sqrt{2}+7=0$.

Ответ. $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

6. Написать каноническое уравнение прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общими уравнениями).

$$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}.$

7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$ и плоскости $x+2y-z+5=0$.

Ответ. Прямая и плоскость пересекаются в точке $(1;-1;4)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ И ПРОСТЕЙШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Задание № 1. Вычислить пределы числовых последовательностей

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2-(n+3)^2}{2n^2+n-3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$.

Решение.

а) Здесь $(3n+2)^2-(n+3)^2=9n^2+12n+4-n^2-6n-9=8n^2+6n-5$ – многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2) и $2n^2+n-3$ – многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2).

Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$8n^2+6n-5=n^2\left(8+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right).$$

Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$2n^2+n-3=n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2-(n+3)^2}{2n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(8+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}.$$

Сокращая на n^2 и используя свойство предела частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)-(n+3)^2}{2n^2+n-3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{6}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{8}{2}=4.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2-(n+3)^2}{2n^2+n-3}=4.$

б) Числитель $n\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}$ – бесконечно большая последовательность порядка n^2 и знаменатель $(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}$ – бесконечно большая последовательность порядка n^2.

Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$n\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}=n^2\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\sqrt[4]{4+\frac{1}{n^8}}\right).$$

Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}=n^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}+1}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\sqrt[4]{4+\frac{1}{n^8}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}+1}}=\left\{\begin{array}{l}\text{Сокращая на}\\ n^2 \text{ и используя свойства пределов, получим}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\sqrt[4]{4+\frac{1}{n^8}}}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\sqrt[4]{4+\frac{1}{n^8}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n}+1}}==\frac{\sqrt[4]{4}}{1}=\sqrt{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}=\sqrt{2}.$

в) При $n \to \infty$ выражение под знаком предела представляет собой степень, основание которой стремится к единице: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)=1$, а показатель – к бесконечности: $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$. Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы использовать формулу (4.1):

$$\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{n+2}{n-1}-1\right)^n=\left(1+\frac{n+2-(n-1)}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^n=$$

$$=\left(\left(\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right)^{\frac{3}{n-1}}\right)^n=\left(\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right)^{\frac{3n}{n-1}}.$$

Так как $\dfrac{3}{n-1}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}=e$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n-1}=3$, то окончательно имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n=e^3.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^n=e^3.$

Задание № 2. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{6-x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$

Решение.

а) Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т. е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x - 2$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-8}{6-x-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+4)}{(x-2)(-x-3)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x+3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x\to2$, поэтому можно применять свойство предела частного:

$$-\lim_{x\to2}\frac{3x+4}{x+3}=-\frac{\lim\limits_{x\to2}(3x+4)}{\lim\limits_{x\to2}(x+3)}=-\frac{6+4}{2+3}=-\frac{10}{5}=-2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-2x-8}{6-x-x^2}=-2.$

б) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\left\{\text{Сокращаем на } x-1\right\}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\dfrac{1}{6}.$

в) Снова встречаемся с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$ (так как $\lim\limits_{x\to0}\sin(\alpha x)=0$). Поделив числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin5x}{x}}{\frac{\sin3x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}}=\left\{\begin{array}{l}\text{Делаем замены; в числителе}\\ y=5x,\text{ а в знаменателе } 3x=z,\text{ тогда } y\to0 \text{ и } z\to0 \text{ при } x\to0\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin y}{y}}{5}}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin z}{z}}{3}}=\frac{5}{3}\,\frac{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}}=\left\{\text{Пользуемся первым замечательным преде-}\right.$$

лом (4.2) $\left.\right\}=\dfrac{5}{3}.$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=\dfrac{5}{3}.$

г) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^{∞}, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)=1$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x}=\infty$. Для ее раскрытия сделаем замену $y=\dfrac{x}{2}$. Тогда $y\to 0$ при $x\to 0$ и исходный предел сводится по второму замечательному пределу (4.3):

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{3}{2y}}=\lim_{y\to 0}\left(\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right)^{3/2}=\left(\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$

Задание № 3. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x\right)}{\operatorname{arctg}6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$.

Решение.

а) Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем ее, воспользовавшись таблицей эквивалентных бесконечно малых (см. таблица 4.1 лекции № 4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x\right)}{\operatorname{arctg}6x}=\left\{\begin{array}{l}\ln\left(1+3x\right)\propto 3x\\ \operatorname{arctg}6x\propto 6x\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\left\{\text{ Сокращаем на } x\right\}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\operatorname{arctg}6x}=\dfrac{1}{2}$.

б) Снова имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, так как

$$\lim_{x\to 0}\left(5^{x^2}-1\right)=0,\ \lim_{x\to 0}(1-\cos 2x)=0.$$

Пользуемся таблицей эквивалентных (см. табл. 4.1 лекции № 4), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{x^2}-1}{1-\cos 2x}=\left\{\begin{matrix}5^{x^2}-1\propto x^2\ln 5\\ 1-\cos 2x\propto 2x^2\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln 5}{2x^2}=$$

$$=\{\text{Сокращаем на } x^2\}=\frac{\ln 5}{2}.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x^2}-1}{1-\cos 2x}=\dfrac{\ln 5}{2}$.

Задание № 4. Найти производные заданных функций

а) $y=\dfrac{3}{2}x^4-3^x+2\ln x-\sin 2$;

б) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+2x\sqrt{x}-5\cdot\arcsin x$;

в) $y=\left(4\operatorname{tg}x+\dfrac{5}{x}\right)(\log_3 x-3\cos x)$;

г) $y=\dfrac{7e^x-\operatorname{arctg}x}{6\sin x+\sqrt{x}}$.

Решение.

а) Используя свойства (5.4) и (5.5) производной и таблицу производных (см. табл. 5.1 лекции № 5), получим

$$y'=\left(\frac{3}{2}x^4-3^x+2\ln x-\sin 2\right)'=\left(\frac{3}{2}x^4\right)'-\left(3^x\right)'-(2\ln x)'-(\sin 2)'=$$

$$=\frac{3}{2}\left(x^4\right)'-\left(3^x\right)'+2(\ln x)'-(\sin 2)'=\{\text{Применяем формулы таб. 5.1}\}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 4x^{4-1}-3^x\ln 3+2\cdot\frac{1}{x}-0=6x^3-3^x\ln 3+\frac{2}{x}.$$

Ответ. $y'=6x^3-3^x\ln 3+\dfrac{2}{x}$.

б) Преобразуем функцию к виду:

$$y = 3\cdot x^{-\frac{2}{3}} + 2\cdot x^{\frac{3}{2}} - 5\cdot \arcsin x.$$

Отсюда, используя свойства производной (5.4), (5.5) и таблицу производных (табл. 5.1), получим

$$y' = \left(3x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{3}{2}} - 5\arcsin x\right)' = \left(3x^{-\frac{2}{3}}\right)' + \left(2x^{\frac{3}{2}}\right)' - (5\arcsin x)' =$$

$$= 3\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' + 2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 5(\arcsin x)' = 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} + 2\cdot x^{\frac{3}{2}-1} - 5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -2\cdot x^{-\frac{5}{3}} + 2\cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} + 2\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ответ. $y' = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^5}} + 2\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}.$

в) Для нахождения производной воспользуемся формулой для производной произведения (5.6):

$$y' = \left(\left(4\operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right)(\log_3 x - 3\cos x)\right)' = \left(4\operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right)'\cdot(\log_3 x - 3\cos x) + \left(4\operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right)\times$$

$$\times(\log_3 x - 3\cos x)' = \{\text{Используем свойства (5.4), (5.5) и табл. 5.1}\} =$$

$$= \left(4(\operatorname{tg} x)' + 5\left(x^{-1}\right)\right)(\log_3 x - 3\cos) + \left(4\operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right)\left((\log_3 x)' - 3(\cos x)'\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5}{x^2}\right)(\log_3 x - 3\cos x) + \left(4\operatorname{tg} x + \frac{5}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x\ln 3} + 3\sin x\right).$$

Ответ. $y' = \left(\dfrac{4}{\cos^2 x} - \dfrac{5}{x^2}\right)(\log_3 x - 3\cos x) + \left(4\operatorname{tg} x + \dfrac{5}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x\ln 3} + 3\sin x\right).$

г) В данном примере для определения производной функции воспользуемся формулой для производной частного (5.7):

$$y' = \left(\frac{7e^x - \operatorname{arctg} x}{6\sin x + \sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(7e^x - \operatorname{arctg} x\right)'\left(6\sin x + \sqrt{x}\right) - \left(7e^x - \operatorname{arctg} x\right)\left(6\sin x + \sqrt{x}\right)'}{\left(6\sin x + \sqrt{x}\right)^2} =$$

={Используем свойства (5.4), (5.5) и таблицу производных (табл. 5.10)}=

$$=\frac{7\left(e^{x}\right)'-(\operatorname{arctg}x)'\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)-\left(7e^{x}-\operatorname{arctg}x\right)\cdot\left(6(\sin x)'+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\right)}{\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)^{2}}=$$

$$=\frac{\left(7\cdot e^{x}-\dfrac{1}{1+x^{2}}\right)\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)-\left(7e^{x}-\operatorname{arctg}x\right)\left(6\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)^{2}}.$$

Ответ. $y'=\dfrac{\left(7e^{x}-\dfrac{1}{1+x^{2}}\right)\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)-\left(7e^{x}-\operatorname{arctg}x\right)\cdot\left(6\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(6\sin x+\sqrt{x}\right)^{2}}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{3}-(n-1)^{3}}{n^{2}+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^{2}+n}-\sqrt{9n^{2}+2n}}{\sqrt[3]{n^{3}+1}-\sqrt[3]{8n^{3}+2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Ответ. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{3}-(n-1)^{3}}{n^{2}+1}=6$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^{2}+n}-\sqrt{9n^{2}+2n}}{\sqrt[3]{n^{3}+1}-\sqrt[3]{8n^{3}+2}}=2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n}{2}}=e.$

2. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^{2}-x-1}{5-3x-2x^{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x^{2})}{x\cdot\operatorname{tg}4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{5}x\right)^{\frac{5}{x}}$.

Ответы. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{5-3x-2x^2}=-\frac{3}{7}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=4$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{xtg4x}=\frac{1}{2}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{5}x\right)^{\frac{5}{x}}=e^3$.

3. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-1}{\sin\frac{x}{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x^2)}{1-\cos 6x}$;

Ответы. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-1}{\sin\frac{x}{2}}=7$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(3x^2)}{1-\cos 6x}=\frac{1}{6}$.

4. Найти производные заданных функций:

а) $y=\frac{5}{3}x^3-7^x+3\log_5 x-\mathrm{tg}\,5$;

б) $y=\frac{7}{3}\cdot\sqrt[5]{x^3}+\frac{\sqrt{x^5}}{x^2}-4\arccos x$;

в) $y=\left(3\,\mathrm{ctg}\,x-\frac{2}{x^2}\right)(6\cdot\arcsin x+2\,\mathrm{sh}\,x)$;

г) $y=\dfrac{\frac{1}{2}\ln x+3x^2}{5\cos x-e^x}$.

Ответы. а) $y'=5x^2-7^x\ln 7+\frac{3}{x\ln 5}$; б) $y'=\frac{7}{5\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y'=\left(-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{4}{x^3}\right)(6\arcsin x+2\,\mathrm{sh}\,x)+\left(3\,\mathrm{ctg}\,x-\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}+2\,\mathrm{ch}\,x\right)$;

г) $y'=\dfrac{\left(\frac{1}{2x}+6x\right)\left(5\cos x-e^x\right)-\left(\frac{1}{2}\ln x+3x^2\right)\cdot\left(-5\sin x-e^x\right)}{\left(5\cos x-e^x\right)^2}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Задание № 1. Найти производные заданных функций.

а) $y = \sin(\ln x)$;

б) $y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;

в) $y = \left(x^3 - 5\cos x\right)^2 \operatorname{arctg} e^x$.

Решение.

а) Данная функция является композицией двух функций, имеющих производные: $u = \ln x$ и $y(u) = \sin u$. Так как $u' = \dfrac{1}{x}$, а $y'(u) = \cos u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции (5.8) получим:

$$y'(x) = (\sin u)'_x = \cos u \cdot u' = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

б) Функция $2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ – композиция трех функций: $u = \operatorname{tg} x, v = \sqrt{u}$ и $y(v) = 2^v$. Так как $u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, v' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}, y'(v) = 2^v \ln 2$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции (5.8) получим:

$$y'(x) = \left(2^v\right)'_x = 2^v \ln 2 \cdot v' = 2^v \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \ln 2}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^2 x}.$$

в) Заданная функция представляет произведение двух сложных функций. Сначала используем правило дифференцирования произведения функций (5.6), получаем:

$$y' = \left(\left(x^3 - 5\cos x\right)^2 \operatorname{arctg} e^x\right)' = \left(\left(x^3 - 5\cos x\right)^2\right)' \times$$

$$\times \operatorname{arctg} e^x + \left(x^3 - 5\cos x\right)^2 \left(\operatorname{arctg} e^x\right)'.$$

Далее используем правило дифференцирования сложной функции (5.8):

$$u = x^3 - 5\cos x,\ f(u) = u^2,\ u' = 3x^2 + 5\sin x,\ f'(u) = 2u,\ \left(\left(x^3 - 5\cos x\right)^2\right)' =$$

$$= 2u \cdot u' = 2\left(x^3 - 5\cos x\right)\left(3x^2 + 5\sin x\right),$$

$$v = e^x,\ g(v) = \operatorname{arctg} v,$$

$$v' = e^x,\ g'(v) = \frac{1}{1+v^2},\ \left(\operatorname{arcctg} e^x\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

Окончательно получим:

$$y' = 2\left(x^3 - 5\cos x\right)\left(3x^2 + 5\sin x\right) \cdot \operatorname{arctg} e^x + \left(x^3 - 5\cos x\right)^2 \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

Ответ. а) $y' = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$, б) $y' = \dfrac{2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \ln 2}{2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos^2 x}$,

в) $y' = 2\left(x^3 - 5\cos x\right)\left(3x^2 + 5\sin x\right)\operatorname{arctg} e^x + \left(x^3 - 5\cos x\right)^2 \cdot \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

Задание № 2. Используя логарифмическую производную, найти производную функции $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\operatorname{tg} x}$. Тогда получим $\ln y = \ln x^{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем правило дифференцирование сложной функции (5.8), а в правой – правило дифференцирования произведения функций (5.6):

$$(\ln y)' = (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (\operatorname{tg} x)' \ln x + \operatorname{tg} x (\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \Rightarrow y' =$$

$$= y\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = \left\{\text{Учитываем, что } y = x^{\operatorname{tg} x}\right\} = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right).$$

Ответ. $y' = x^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$

Задание № 3. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Решение. Производную заданной функции $y(x)$ находим по формуле (5.12) $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, отсюда в нашем случае находим

$$y'(x)=\frac{\left(\cos^3 t\right)'}{\left(\sin^3 t\right)'}=\{\text{Используем правило дифференцирования сложной функции (5.8)}\}=$$

$$=\frac{3\cos^2 t(\cos t)'}{3\sin^2 t(\sin t)'}=\frac{3\cos^2 t(-\sin t)}{3\sin^2 t\cdot\cos t}=(\text{Сокращаем на } 3\cos t\cdot\sin t)=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

Ответ. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y'=-\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Задание № 4. Найти производную третьего порядка для функции

$$y=xe^x.$$

Решение. Находим производную первого порядка, используя правило дифференцирования произведения функций (5.6):

$$y'=\left(xe^x\right)'=x'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$$

Дифференцируя полученный результат еще раз, получим вторую производную

$$y''=\left((x+1)e^x\right)'=(x+1)'e^x+(x+1)\left(e^x\right)'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x.$$

Наконец, дифференцируя последнее выражение, найдем искомую производную третьего порядка:

$$y'''=\left((x+2)e^x\right)'=(x+2)'e^x+(x+2)\left(e^x\right)'=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x.$$

Ответ. $y'''=(x+3)e^x$.

Задание № 5. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x-x}{x^3}$.

Решение.

а) Поскольку $e^{2x}-1$ и $\sin x$ стремятся к нулю при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя (5.15), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\cos x}=2\frac{\lim\limits_{x\to 0} e^{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{2\cdot 1}{1}=2.$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=2.$

б) В этом примере снова имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{arctg} x - x\right)=\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$. Воспользуемся правилом Лопиталя (5.15):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg} x - x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=$$

$= \{$Неопределенность $\frac{0}{0}$ не исчезла, поэтому применяем правило

Лопиталя повторно$\}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{3}.$

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}=\frac{1}{3}.$

Задание № 6. Исследовать на экстремум функцию

$$y(x)=(2x-1)(2x+1)^2.$$

Решение: Согласно правилу исследования функции на экстремум (см. лекцию № 5):

1) Находим производную

$$y'=4(2x-1)(2x+1)^2+4(2x-1)^2(2x+1)=4(2x-1)(2x+1)(2x+1+2x-1)=$$
$$=16x(2x-1)(2x+1)$$

Полагаем $y'=0$, получаем уравнение

$$16x(2x-1)(2x+1)=0.$$

Решаем это уравнение, находим $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}$. Функция y определена и непрерывна на всей числовой оси, поэтому точки x_1, x_2, x_3 являются критическими.

Других критических точек нет, так как производная y' существует всюду.

2) Исследуем критические точки, определяя знак y' слева и справа от каждой критической точки (теорема 5.9 лекции № 5). Для сокращения вычислений и наглядности это исследование удобно записать в виде следующей таблицы

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y'	–	0	+	0	–	0	+
y	Убыв.$\downarrow$	min $\cup$	Возр. $\uparrow$	max $\cap$	Убыв.$\downarrow$	min$\cup$	Возр.$\uparrow$

В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси; между ними вставлены промежуточные точки, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в указанных промежуточных точках, т.е. знаки $y(-1), y'\left(-\frac{1}{4}\right), y'\left(\frac{1}{4}\right), y'(1)$.

В третьей строке – заключение о поведении функции. Исследуемая функция имеет три точки экстремума – две точки минимума $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$, где $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; одну точку максимума $x = 0$, где $y(0) = 1$.

В интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ функция убывает, а в интервале $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ функция возрастает.

Точки экстремума можно найти, пользуясь другим достаточным условием экстремума (следствие теоремы 5.10 лекции № 5). Для этого находим вторую производную y'' и ее значения в критических точках

$$y'' = 16(2x-1)(2x+1) + 32x(2x+1) + 32x(2x-1) =$$
$$= 16(4x^2 - 1 + 4x^2 + 2x + 4x^2 - 2x) = 16(12x^2 - 1);$$

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right)=y''\left(\frac{1}{2}\right)=32,\ y''(0)=-16.$$

Поскольку $y''\left(-\frac{1}{2}\right)=y''\left(\frac{1}{2}\right)=32>0,$ то $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_3=\frac{1}{2}$ – точки локального минимума. Аналогично, так как $y''(0)=-16<0,$ то $x=0$ – точка локального экстремума.

Ответ. Функция возрастает на интервале $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, а убывает на интервале $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Точки $x_1=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{2}$ являются точками минимума, $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)=0$; точка $x_2=0$ – точка максимума, $y(0)=1.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные заданных функций

а) $y=\arcsin x^2,$

б) $y=\cos^3(\log_2 x),$

в) $y=\dfrac{\arcsin\left(5^x\right)}{\left(5x^2+\mathrm{ctg}x\right)^3}.$

Ответы. а) $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$, б) $y'=-\dfrac{3\cos^2(\log_2 x)\sin(\log_2 x)}{x\ln 2},$

$$\text{в)}\ y'=\frac{\dfrac{5^x\cdot\ln 5\left(5x^2+\mathrm{ctg}\,x\right)^3}{\sqrt{1-25^x}}-3\left(5x^2+\mathrm{ctg}\,x\right)^2\left(10x-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin 5^x}{\left(5x^2+\mathrm{ctg}\,x\right)^6}.$$

2. Используя логарифмическую производную, найти производную функции

$$y=x^{\sin x}.$$

Ответ. $y'=x^{\sin x}\left\{\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right\}.$

3. Найти производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{t^3}{3} + 1. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = t - \operatorname{arctg} t, \\ y' = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

4. Найти производную третьего порядка для функции

$$y = x \ln x.$$

Ответ. $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

5. Найти пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 3x}{\ln x}$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x}$.

Ответы. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 3x}{\ln x} = 1$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x - \sin x} = 6$.

6. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-2)^2 (x+2)$.

Ответ. Функция возрастает на интервале $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, убывает на $(-1, 1)$. Точка $x = -1$ – точка максимума, $y_{\max} = y(-1) = 9$; точка $x = 1$ – точка минимума, $y_{\min} = y(1) = 3$.

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

ОБЗОРНЫЕ ЛЕКЦИИ

ЛЕКЦИЯ № 6
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции* $f(x)$ *найти ее производную (или дифференциал)*. Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию* $F(x)$*, зная ее производную* $F'(x) = f(x)$ *(или дифференциал).* Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение 6.1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)dx).$$

Пример. Первообразной функции $y = x^3$, $x \in R$, является функция $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$. Очевидно, что первообразными будут также любые функции $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$, где C – постоянная, поскольку $F'(x) = \left(\dfrac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 + 0 = f(x)$.

Теорема 6.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Определение 6.2. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции f(x)*** и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, $\int$ – *знаком неопределенного интеграла.*

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 6.2. Всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.

Отметим ряд ***свойств неопределенного интеграла***, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)dx\right)'=f(x).}$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Например, равенство $\int(3x^2+5)dx=x^3+5x+C$ верно, так как $\left(x^3+5x+C\right)'=3x^2+5$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\boxed{\int dF(x)=F(x)+C.}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\boxed{\int af(x)dx=a\int f(x)dx.}$$

($a \neq 0$ – постоянная).

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\boxed{\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.}$$

5. Инвариантность формулы интегрирования. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то и $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u=\varphi(x)-$ произвольная функция, имеющая непрерывную производную. В частности $\int f(ax+b)du=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Из последнего свойства следует, что формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

1.

6.2. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения соответствующих формул дифференциального исчисления и использования свойств неопределенного интеграла.

Например, так как $d(\sin u) = \cos u du,$ то

$$\int \cos u du = \int d(\sin u) = \sin u + C.$$

Интегралы в приводимой ниже таблице (табл. 6.1) называются табличными. Методы нахождения первообразных (т. е. интегрирования функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования *u* может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной (согласно свойству инвариантности формулы интегрирования).

В справедливости приведенных ниже формул можно убедиться, взяв дифференциал правой части, который будет равен подынтегральному выражению в левой части формулы.

Приведем таблицу основных интегралов.

Таблица 6.1

1	$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right)$
2	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
3	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
4	$\int e^u du = e^u + C$
5	$\int \sin u du = -\cos u + C \qquad (\int \mathrm{sh} u du = \mathrm{ch} u + C)$

Окончание табл. 6.1

6	$\int \cos u du = \sin u + C \qquad (\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C)$
7	$\int \mathrm{tg} u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
8	$\int \mathrm{ctg} u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
9	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C \qquad (\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th} u + C)$
10	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C \qquad (\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth} u + C)$
11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{u}{2} \right\rvert + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
13	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
14	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{a^2 + u^2} \right\rvert + C$
15	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$
16	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{a+u}{a-u} \right\rvert + C$
17	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$
18	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$

6.3. Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u+a), \quad a - \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 - \text{число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au+b), \quad a \neq 0,\ b - \text{ числа},$$

$$udu = \frac{1}{2}d(u^2), \qquad u^n du = \frac{1}{n+1}d(u^{n+1}),$$

$$\cos u du = d(\sin u), \qquad \sin u du = -\,d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u}du = \frac{du}{u} = d(\ln u),$$

$$e^u du = de^u, \qquad a^u du = \frac{1}{\ln a}da^u,$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}du = \frac{du}{\cos^2 u} = d(\mathrm{tg}\, u),$$

$$\frac{1}{1+u^2}du = \frac{du}{1+u^2} = d\mathrm{arctg}\, u.$$

Вообще, формула

$$\boxed{f'(u)du = d(f(u))}$$

очень часто используется при подведении под знак дифференциала.

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл должен приводиться к новому интегралу, который будет табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$, и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем ***формулу интегрирования подстановкой***

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.} \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) также называется ***формулой замены переменных*** в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда, когда функция $f(x)$ представляется в виде $f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, целесообразно подбирать подстановку в виде $t=\varphi(x)$, тогда

$$\boxed{\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int g(t)dt.} \tag{6.2}$$

Другими словами, формулу (6.1) можно применять справа налево.

Пример.

Найти $\int x\cdot\sqrt[3]{x-5}dx.$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x-5}=t,$ тогда $x=t^3+5,$ $dx=3t^2dt.$ Имеем

$$\int x\cdot\sqrt[3]{x-5}dx=\int(t^3+5)\cdot t\cdot 3t^2dt=3\int t^6dt+15\int t^3dt=3\frac{t^7}{7}+15\frac{t^4}{4}+C=$$
$$=\frac{3}{7}(x-5)^{7/3}+\frac{15}{4}(x-5)^{4/3}+C.$$

Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=udv+vdu$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu$$

или

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu.} \tag{6.3}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)a^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Формула (6.3) применяется один раз, если многочлен $P(x)$ первой степени, в противном случае каждое применение формулы (6.3) понижает степень многочлена $P(x)$ на единицу.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin kxdx$, $\int P(x)\arccos kxdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} kxdx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} kxdx$, $\int P(x)\ln xdx$. Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где a и b – числа. За u можно принять любую из функций $u = e^{ax}$, $u = \sin bx$ или $u = \cos bx$. Данные интегралы относятся к тому типу интегралов, вычисление которых приводит к исходному интегралу, после чего исходный интеграл может быть выражен из полученного уравнения.

Примеры.

1. Найти $\int (3x+1)e^{2x}dx$.

Решение. Пусть $\left[\begin{array}{l} u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$).

Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (3x+1)e^{2x}dx = (3x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}3dx = \frac{1}{2}(3x+1)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

2. Найти $\int x\operatorname{arctg} xdx$.

Решение. Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]$. Поэтому,

$$\int x\operatorname{arctg} xdx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

6.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Многочлен

Определение 6.3. Функция вида:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{6.4}$$

где n – натуральное число, $a_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ – постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется степенью многочлена.

Корнем многочлена (6.4) называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 6.3. Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делиться без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n - 1)$.

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 6.4 ***(основная теорема алгебры).*** Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Следствие. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \tag{6.5}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при x^n.

Например, легко проверить, что выражение $x^3 - x^2 + 9x - 9$ представляется в виде произведения линейных множителей следующим образом: $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x - 3i)(x + 3i)$.

Если в разложении многочлена (6.5) какой-либо корень встретился k раз, то он называется ***корнем кратности*** k. В случае $k = 1$ (т. е. корень встретился один раз) корень называется ***простым***.

С учетом повторяющихся корней разложение многочлена (6.5) можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r},$$

если корень x_1 имеет кратность k_1, корень x_2 – кратность k_2 и так далее. При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, а r – число различных корней.

Для многочленов с действительными коэффициентами справедлива следующая теорема.

Теорема 6.5. Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена (6.5) комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители $(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$, получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$.

Теорема 6.6. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$ и все квадратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Примеры разложений:

1) $x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$;

2) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$.

Дробно-рациональная функция

Определение 6.4. ***Дробно-рациональной функцией*** (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, а $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ *можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена* $L(x)$ *и правильной рациональной дроби* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, т. е. $\dfrac{R(x)}{Q(x)} = L(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Пример. Представить неправильную рациональную дробь $\dfrac{2x^4-4x+7}{x-3}$ в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Решение.

Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{}\,2x^4 \qquad\qquad -4x+7 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4-6x^3} \qquad\qquad\qquad & 2x^3+6x^2+18x+50 \\
\underline{}\,6x^3 \qquad -4x+7 & \\
\underline{6x^3-18x^2} \qquad\quad & \\
\underline{}\,18x^2-4x+7 & \\
\underline{18x^2-54x} \quad & \\
\underline{}\,50x+7 & \\
\underline{50x-150} & \\
157 &
\end{array}
$$

Получим частное $L(x)=2x^3+6x^2+18x+50$ и остаток $R(x)$ = 157. Следовательно, $\dfrac{2x^4-4x+7}{x-3}=2x^3+6x^2+18x+50+\dfrac{157}{x-3}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x-a}$,

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k}\,(k\geq 2, k\in N)$,

(III). $\dfrac{M_x+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2-4q<0$),

(IV). $\dfrac{M_x+N}{(x^2+px+q)^k}\,(k\geq 2,$ корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.*

Теорема 6.7. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{M_{1x}+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_{2x}+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m x}+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \qquad (6.6)$$

где $A_1, A_2,\ldots,B_1, B_2,\ldots,C_1, D_1,\ldots,M_1, N_1,\ldots$ – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $$\frac{x^2+3}{(x-3)(x-5)^3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{(x-5)^2}+\frac{D}{(x-5)^3};$$

2) $$\frac{2x^2+5x-1}{x^2(x^2+2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}+\frac{Fx+P}{(x^2+x+1)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2,\ldots,B_1, B_2,\ldots$ в равенстве (6.6) можно применить ***метод неопределенных коэффициентов***. Суть метода такова:

1. В правой части равенства (6.6) приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т. е.

$$P(x) = S(x). \qquad (6.7)$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (6.7), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2,\ldots,B_1, B_2,\ldots$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Приведем выражения для интегралов от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$.

3.

$$\boxed{J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \mathrm{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.}$$

4. Интеграл вида $J_k = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$, $\quad k \geq 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$:

$$\boxed{J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).}$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный выше материал позволяет сформулировать ***общее правило интегрирования рациональных дробей.***

1. Если дробь неправильная, то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}dx$.

Решение. Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель. Получим

$$\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=x^2-2x+2+\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$-3x^3-2x^2-2\equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2,$$

т. е.

$$-3x^3-2x^2-2\equiv(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases}A+C=-3,\\ 2A+B+D=-2,\\ 2A+2B=0,\\ 2B=-2,\end{cases}$$

из которой находим коэффициенты: $B=-1$, $A=1$, $C=-4$, $D=-3$. Таким образом,

$$\frac{-3x^3-2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}$$

и

$$\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}=x^2-2x+2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x^2-2x+2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4x+3}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\ln|x|+\frac{1}{x}-\int\frac{4x+3}{(x+1)^2+1}dx.$$

Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int\frac{4x+3}{(x+1)^2+1}dx=\int\frac{4t-4+3}{t^2+1}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\mathrm{arctg}t+C=2\cdot\ln(x^2+2x+2)-\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^6-3x^3+2x^2-2}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln(x^2+2x+2)+\mathrm{arctg}(x+1)+C.$$

6.5. Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными sin$x$ и cos$x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, умножение, возведение в степень и деление), принято обозначать R(sin$x$, cos$x$), где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x;\cos x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, которая называется ***универсальной***.

Так как $\sin x=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x=2\mathrm{arctg}t$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$, то

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\mathrm{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.}$$

Поэтому $\int R(\sin x;\cos x)dx=\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2};\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, где

$R_1(t)$ – рациональная функция от t.

Пример. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Решение. Сделаем универсальную подстановку $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int \frac{dt}{t+1}=$$

$$=\int \frac{d(t+1)}{t+1}=\ln(t+1)+C=\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)+C.$$

Универсальная подстановка зачастую приводит к громоздким выражениям, к дробям, в числителе и знаменателе которых стоят многочлены высоких степеней, которые трудно раскладывать на простейшие дроби. Поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x;\ \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x;\ \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x;\ \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ или $\int R\left(\sin^2 x;\cos^2 x\right)dx$:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\quad \operatorname{tg} x=t,\\ x=\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.\end{gathered}}$$

Интегралы типа $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) Подстановка $\sin x = t$, если n – целое положительное *нечетное* число.

2) Подстановка $\cos x = t$, если m – целое положительное *нечетное* число.

3) Формулы понижения порядка: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, если m или n – целые *неотрицательные четные* числа.

4) Подстановка $\mathrm{tg}\,x = t$, если $m+n$ – есть целое четное отрицательное число. В частности, к этому же случаю сводятся и интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin^m \frac{x}{2} \cos^m \frac{x}{2}}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

5) Иногда, если среди чисел m и n есть отрицательные, помогают формулы:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + 1, \qquad \mathrm{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}^2 x + 1.$$

Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

6.6. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где a, b, c, d – действительные числа, α, $\beta, \ldots,$ δ, γ – натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем ***дробно-линейной подстановки*** $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \ldots, \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}$ и $dx = \frac{-dkt^{k-1}\left(ct^k - a\right) - \left(b - dt^k\right)ckt^{k-1}}{\left(ct^k - a\right)^2} dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}}$.

Решение. Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x-1=t^6$, $x=t^6+1$, $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x-1}$. Следовательно,

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^4+t^3}=6\int\frac{t^2dt}{t+1}=6\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{x-1}-6\cdot\sqrt[6]{x-1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C.$$

Интегралы, содержащие квадратичные иррациональности

Интегралы типа $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$, $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ называют неопределенными интегралами от ***квадратичных иррациональностей***. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Тригонометрические и гиперболические подстановки

Интегралы типа $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических или гиперболических функций, с помощью следующих ***тригонометрических и гиперболических подстановок***:

1) $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x = a\sin t,\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t,\ dx = a\cos t dt$$

или

$$x = a\,\mathrm{th}t,\ \ \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\mathrm{ch}t},\ \ dx = \frac{a}{\mathrm{ch}^2 t}dt;$$

2) $\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x = a\,\mathrm{tg}t,\ \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t},\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$$

или

$$x = a\,\mathrm{sh}t,\ \ \sqrt{a^2 + x^2} = a\,\mathrm{ch}t,\ \ dx = a\,\mathrm{ch}t dt;$$

3) $\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, используем подстановки

$$x = \frac{a}{\cos t},\ \sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}t,\ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$$

или

$$x = a\,\mathrm{ch}t,\ \ \sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}t,\ \ dx = a\,\mathrm{sh}t dt.$$

Контрольные вопросы

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных неопределенных интегралов.
4. Непосредственное интегрирование.
5. Метод интегрирования подстановкой.
6. Метод интегрирования по частям.
7. Многочлен.
8. Дробно-рациональная функция.
9. Интегрирование простейших рациональных дробей.
10. Интегрирование рациональных дробей.
11. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.
12. Вычисление интегралов типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
13. Интегрирование тригонометрических функций с использованием тригонометрических преобразований.
14. Интегрирование иррациональных функций. Дробно-линейная подстановка.

15. Интегрирование функций, содержащих квадратичные иррациональности.

16. Интегрирование иррациональных функций с использованием тригонометрических и гиперболических функций.

ЛЕКЦИЯ № 7
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1. Определение и свойства определенного интеграла

Определенный интеграл Римана

Пусть $f(x)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Произведем разбиение R отрезка $[a,b]$ на n частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Выберем на каждом из получившихся отрезков по точке $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Составим сумму

$$S_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i ,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

Сумма S_R называется ***интегральной суммой Римана***, соответствующей разбиению R. Геометрически S_R представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис. 7.1).

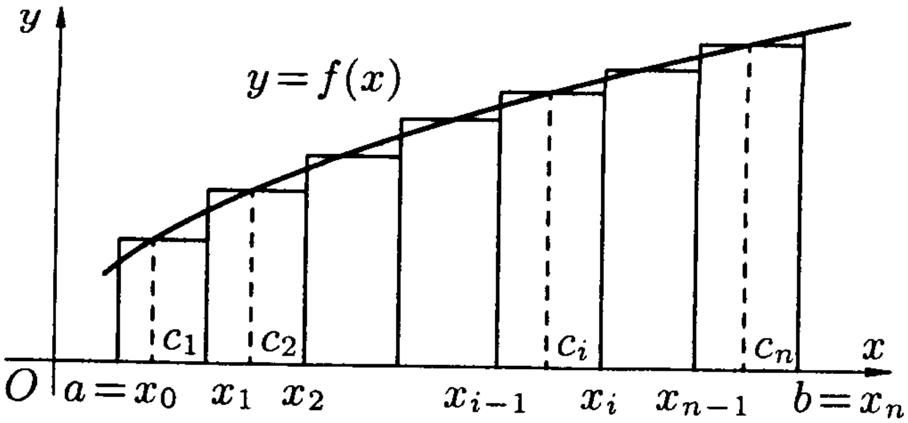


Рис. 7.1

Определение 7.1. Пусть $n \to \infty$ так, чтобы все $\Delta x_i \to 0$, т. е. $\max \Delta x_i \to 0$. Если при этом последовательность интегральных сумм S_R стремится к конечному пределу, не зависящему от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек c_i, то этот предел называется ***опре-***

деленным интегралом от функции f **(*x*)** ***на отрезке*** $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_R = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i . \qquad (7.1)$$

Геометрически определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если существует определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то говорят, что функция $f(x)$ ***интегрируема*** на этом отрезке.

Теорема 7.1. Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Таким образом, ограниченность является необходимым условием интегрируемости. Достаточным условием интегрируемости является непрерывность функции.

Теорема 7.2. Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

На самом деле интегрируемыми будут также функции, имеющие на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода. Такие функции называются кусочно-непрерывными.

Определение 7.2. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется ***кусочно-непрерывной*** на этом отрезке, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) и существуют конечные пределы на концах интервала

$$\lim_{x \to x_i + 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_{i+1} - 0} f(x).$$

Свойства определенного интеграла

1. Свойство аддитивности: Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ интегрируема и на $[a, c]$ и на $[b, c]$, и при этом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx .$$

2. Справедливо следующее:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0 , \qquad \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx .$$

3. Свойство линейности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то $\alpha f(x)+\beta g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, и при этом

$$\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

4. Свойство монотонности: если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $\forall x\in[a,b]\ f(x)\le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\left|f(x)\right|$ также интегрируема на $[a, b]$, и при этом

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx.$$

6. Теорема о среднем

Теорема 7.3 (**теорема о среднем**). Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a). \qquad (7.2)$$

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует число $\xi\in[a,b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

7.2. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 7.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi(x)$ – некоторая (любая) ее первообразная, тогда справедлива ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).} \qquad (7.3)$$

Эта теорема является центральной теоремой интегрального исчисления. Первообразная $F(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x)+C$. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла, или первообразной, и простой подстановке пределов интегрирования.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ – функция верхнего предела. Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$. В этом случае справедливо равенство $\Phi(x)-F(x)=C$ или $\Phi(x)=F(x)+C$, где $C=\mathrm{const}$. Тогда

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C. \tag{7.4}$$

Подставим в равенство (7.4) $x = a$. Получим $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C$ или $F(a)+C=0$. Отсюда находим $C = –F(a)$. Тогда равенство (7.4) примет вид

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$$

Подставим теперь в последнее равенство $x = b$. Получим формулу (7.3).

Замечание. Отметим еще раз, что формула Ньютона-Лейбница применима только в том случае, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Например, при вычислении интеграла $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ формулу (7.3) применять нельзя, так как функция $f(x)=\frac{1}{x}$ разрывна в точке $x=0\in[-1,1]$.

7.3. Методы вычисления определенного интеграла

Методы вычисления определенного интеграла аналогичны методам вычисление неопределенного интеграла.

1. ***Замена переменной интегрирования***.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и $\forall t\in[\alpha,\beta]\quad a\le\varphi(t)\le b$. Тогда справедлива формула

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.} \tag{7.5}$$

2. ***Формула интегрирования по частям***.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.} \tag{7.6}$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл $I=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

Решение. Положим $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x}=dt$. Если $x=1$, то $t=0$. Если $x=e$, то $t=1$. Следовательно,

$$I=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2. Вычислить интеграл $I=\int_0^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим

$$u=x \quad\Rightarrow\quad du=dx,$$

$$dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \quad\Rightarrow\quad v=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда находим

$$I=\frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos x}=\frac{\pi}{3\cos(\pi/3)}-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

7.4. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Все подынтегральные функции, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются непрерывными.

Вычисление площадей плоских фигур основано на геометрическом смысле определенного интеграла. Площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу — отрезком $[a, b]$ оси Ox (см. рис. 7.2), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a; b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Эти формулы можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{7.7}$$

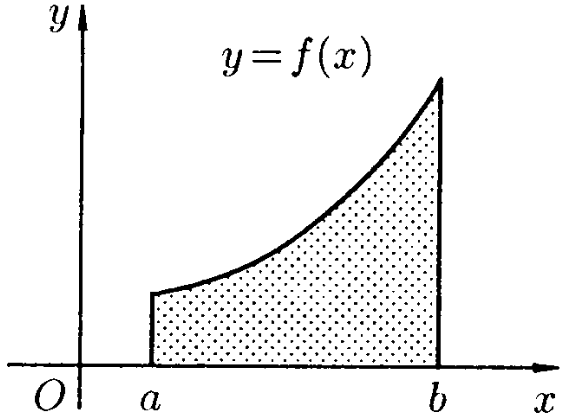


Рис. 7.2

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{7.8}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ и отрезком $[c, d]$ оси Oy. Тогда площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy. \tag{7.9}$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху *кривой, заданной параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $y(t) \geq 0,$ $t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$и отрезком $[a, b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \tag{7.10}$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Площадь *криволинейного сектора*, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (см. рис. 7.3), вычисляется по формуле

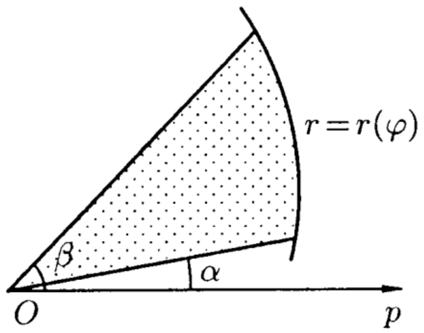


Рис. 7.3

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (7.11)$$

Отметим, что площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной (полярной) системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций (секторов).

Вычисление длины дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки *A* и *B* с координатами: $A(a;c), B(b;d)$. Длина *l* дуги кривой от точки *A* до точки *B* вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad (7.12)$$

$$l = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy. \qquad (7.13)$$

Если кривая задана *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \le t \le t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt. \qquad (7.14)$$

Если кривая задана уравнением в *полярных координатах* $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi. \qquad (7.15)$$

Вычисление объемов тел

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси *Ox* и проходящими через точки $x \in [a;b]$ на ней (см. рис. 7.4). Площадь фигуры, образующейся в сечении, зависит от точки *x*, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a;b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, находящейся между плоскостями $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{7.16}$$

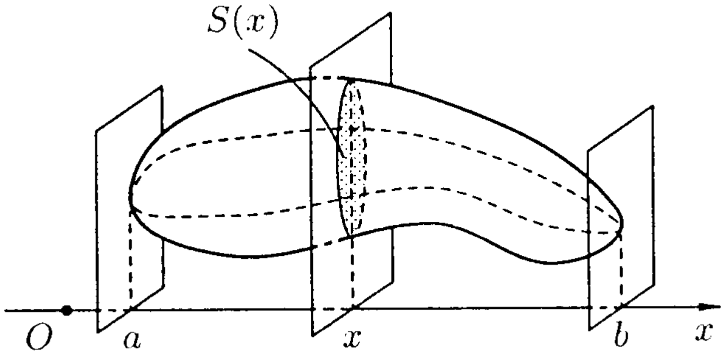


Рис. 7.4

Пример. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее ($-a\le x\le a$), получим эллипс (см. рис. 7.5):

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

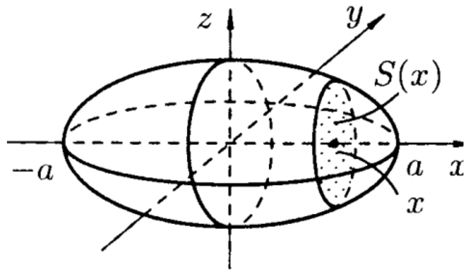


Рис. 7.5

Площадь этого эллипса равна $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (7.16) имеем

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$) кривой и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx, \tag{7.17}$$

$$V_y = 2\pi\int_a^b xydx, \quad a \geq 0. \tag{7.18}$$

Заметим, что если тело образуется при вращении вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d$, то объем тела вращения равен

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy. \tag{7.19}$$

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $y = f(x), a \leq x \leq b,$ вращается вокруг оси *Ox*, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx, \tag{7.20}$$

где a и b – абсциссы начала и конца дуги.

Если дуга кривой, заданная неотрицательной функцией $x = \varphi(y), c \leq y \leq d$, вращается вокруг оси *Oy*, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy, \tag{7.21}$$

где c и d – ординаты начала и конца дуги.

Если дуга кривой задана *параметрическими уравнениями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \leq t \leq t_2$, причем $y(t) \geq 0$, то

$$S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \tag{7.22}$$

Если дуга задана *в полярных координатах* $r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta,$ то

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r|\sin\varphi|\sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}d\varphi. \tag{7.23}$$

Физические (механические) приложения определенного интеграла

1. *Путь, пройденный телом,* перемещающимся со скоростью $\upsilon=\upsilon(t)$, за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$, выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)dt. \tag{7.24}$$

2. *Работа переменной силы*, заданной функцией $F=F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, равна интегралу

$$A=\int_a^b F(x)dx. \tag{7.25}$$

3. *Давление жидкости* на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости (закон «Паскаля»), т. е. $P=g\gamma Sh$, где g – ускорение свободного падения, γ – плотность жидкости, S – площадь пластинки, h – глубина ее погружения.

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $x=a,\ x=b,\ y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, вычисляется по формуле

$$P=g\gamma\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))xdx. \tag{7.26}$$

4. Статистические моменты, относительно координатных осей, моменты инерции и координаты центра тяжести плоской дуги $y=f(x), a\le x\le b$, находятся соответственно по формулам

$$\begin{aligned} S_x&=\int_a^b\gamma y dl, \quad S_y=\int_a^b\gamma x dl,\\ M_x&=\int_s^b\gamma y^2 dl, \quad M_y=\int_a^b\gamma x^2 dl, \end{aligned} \tag{7.27}$$

где $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx\left(\sqrt{(x'_y)^2+(y'_x)^2}dt,\ \sqrt{r^2+(r'_\varphi)^2}d\varphi\right)$ – дифференциал дуги;

$$x_c=\frac{S_y}{m}, \quad y_c=\frac{S_x}{m}, \quad m=\int_a^b\gamma\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \tag{7.28}$$

(здесь x_c, y_c – координаты центра тяжести, а m – масса кривой).

Контрольные вопросы

1. Определение определенного интеграла по Риману.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Методы вычисления определенного интеграла.
5. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур.
6. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой.
7. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел.
8. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади поверхности вращения.
9. Физические приложения определенного интеграла.

ЛЕКЦИЯ № 8
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных

Введем понятие функции двух переменных.

Определение 8.1. Пусть дано открытое множество $D \subset \mathbf{R}^2$ и указано правило, по которому каждой точке $(x, y) \in D$ соответствует некоторое число $z \in \mathbf{R}$. В этом случае говорят, что ***задана функция двух переменных*** $z = f(x, y)$ с областью определения D и областью значений $E \in \mathbf{R}$.

Функцию $z = f(x, y)$ часто записывают в виде $f : D \to \mathbf{R},\ D \subset \mathbf{R}^2$**.**

При этом x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), а z – *зависимой переменной*.

Как и в случае функции одной переменной, способы задания функции двух переменных могут быть самыми различными: аналитический (с помощью формулы), табличный, словесный.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называют геометрическое место точек пространства $(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$. Обычно графиком в этом случае является некоторая поверхность. Например, функция $z = x^2 + y^2$ задает в пространстве $\mathbf{R}^3$ параболоид, см. рис. 8.1.

Аналогично можно ввести понятие функции многих переменных.

Определение 8.2. Пусть дано открытое множество $D \subset \mathbf{R}^n$ и указано правило, по которому каждой точке $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ соответствует некоторое число $u \in \mathbf{R}$. В этом случае говорят, что задана ***функция многих переменных*** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с областью определения D и областью значений $E \in \mathbf{R}$.

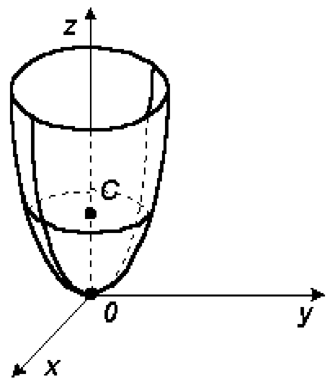


Рис. 8.1

Графиком функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Предел функции нескольких переменных

Дадим понятие предела функции многих переменных для функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение 8.3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D. Число a называют ***пределом функции двух переменных*** $z = f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ и любой точки $(x, y) \in D$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon,$$

как только

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a, \text{ или } f(x, y) \to a \text{ при } (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Следует отметить, что стремление к предельной точке (x_0, y_0) на плоскости Oxy может происходить по бесконечному числу направлений и не обязательно по прямой линии. Предел существует, если он не зависит от направления, т. е. предел должен иметь одно и то же значение при любом стремлении к предельной точке (x_0, y_0). Если предел имеет разные значения, то говорят, что предел не существует.

Введем понятие предела для функции многих переменных.

Определение 8.4. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в области D. Число a называют ***пределом функции многих переменных***

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ и любой точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a | < \varepsilon,$$

как только

$$0 < \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2} < \delta .$$

В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a ,$$

или

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to a \text{ при } \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Сформулируем условие Коши существования предела функции многих переменных.

Критерий Коши. Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке x^0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлась окрестность точки x^0 такая, чтобы для всех x, x' из этой окрестности, отличных от точки x^0, имело место неравенство $| f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Здесь $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $x' = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$, $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Для пределов функции многих переменных выполняются те же арифметические свойства, что и для функции одной переменной. Перечислим их для функции двух переменных.

1. Если существуют $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x, y) = b$, то

а) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (f(x, y) \pm g(x, y)) = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) g(x, y) = ab$;

в) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.

2. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$ и $g(x)$ – некоторая функция, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g\big(f(x,y)\big)=g\left(a\right).$$

Для функций многих переменных справедливы аналоги и других теорем о свойствах пределов функций одной переменной.

Непрерывность функции нескольких переменных

Введем понятие непрерывности для функции двух переменных $z=f(x,y)$ с областью определения D.

Определение 8.5. Функция $z=f(x,y)$ называется ***непрерывной в предельной точке*** (x_0, y_0), если она определена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке (x_0, y_0), и предел функции $z=f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Можно ввести другое, эквивалентное определение непрерывности. Обозначим приращения аргументов x, y через

$$\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0,$$

отсюда ***полное приращение*** функции $z=f(x,y)$ запишется в виде

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0).$$

Определение 8.6. Функция $z=f(x,y)$ называется ***непрерывной в предельной точке*** (x_0, y_0), если она определена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке (x_0, y_0), и

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0.$$

Аналогично можно ввести определение непрерывности и для функции многих переменных.

Определение 8.7. Функция $u=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$, определенная в области D, называется *непрерывной в предельной точке* $x^0=\left(x_1^0, x_2^0,\dots, x_n^0\right)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке, причем

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right).$$

Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***непрерывна в области G*** (или в замкнутой области), если она непрерывна в каждой точке этой области.

8.2. Частные производные функции многих переменных

Перейдем теперь к определению производной функции многих переменных. Для функции многих переменных, в отличие от функции одной переменной, существует понятие частной производной.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в области D. Пусть точка $(x_0, y_0) \in D$. Дадим приращение этой функции только по переменной x, при этом переменную y зафиксируем, пусть $y = y_0$. Получим

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Такое приращение называют ***частным приращением по переменной x***. Аналогично вводится ***частное приращение по переменной y***:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 8.8. ***Частной производной первого порядка функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной x*** в точке (x_0, y_0) называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если он существует.

Аналогично, ***частной производной первого порядка функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной y*** в точке (x_0, y_0) называется предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если он существует.

Частная производная по x обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x, частная производная по y обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Вычисление частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ от функции $z = f(x, y)$ по переменной x сводится к вычислению обычной производной от функции $z = f(x, y)$ по x, при этом переменная y считается фиксированной, т. е. равной постоянному числу. И, наоборот, при вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ по переменной y, переменную x считают равной постоянному числу.

При этом правила дифференцирования функции многих переменных те же, что и для функции одной переменной.

Определение 8.9. *Частной производной первого порядка функции многих переменных* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *по переменной* x_i в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_i},$$

если он существует.

Вычисление частной производной от функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по одной из переменных сводится к вычислению обычной производной по этой переменной, при этом остальные переменные фиксируются, т. е. считаются равными постоянным числам.

Отметим также, сколько переменных у функции, столько и частных производных первого порядка.

Пример. Найти все частные производные первого порядка функции $z = 2xy^2 + 4x^3 \sin y - x + 5y^4 + 1$.

Решение. Частных производных будет две:

$$z'_x = 2(x)'y^2 + 4(x^3)' \sin y - (x)' + (5y^4 + 1)'_x = 2y^2 + 12x^2 \sin y - 1,$$

$$z'_y = 2x(y^2)' + 4x^3 (\sin y)' - (x)'_y + (5y^4 + 1)'_y = 4xy + 4x^3 \cos y + 20y^3.$$

8.3. Частные производные высших порядков

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ во всех точках $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G$. Тогда эти производные можно рассматривать как новые функции, заданные на множестве *G*, и у этих функций, возможно, существуют частные производные по какому-либо переменному x_i.

Определение 8.10. Если у функции $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ существует снова частная производная по переменной x_k, то она называется ***частной производной второго порядка*** от функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_k и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. Таким образом, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$.

Если у функции $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ существует частная производная по другой переменной x_i, то она называется ***смешанной частной производной второго порядка*** и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ существует четыре частных производных второго порядка:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, или, что то же самое, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}.

Частные производные второго порядка можно еще раз продифференцировать по переменным x_i, тогда мы получим частные производные третьего порядка.

Вообще, ***частной производной n-го порядка*** называют частную производную по какому-либо переменному от некоторой производной (n-1)-го порядка.

Пример. Найти все частные производные второго порядка функции $z = 2xy^2 + 4x^3 + 1$.

Решение. Находим частные производные 1-го порядка $z'_x = 2y^2 + 12x^2$, $z'_y = 4xy$. Теперь находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=24x,\quad z''_{xy}=4y,\quad z''_{yx}=4y,\quad z''_{yy}=4x.$$

Из этого примера видно, что $z''_{xy}=z''_{yx}$. Возникает вопрос, будут ли равны между собой частные производные, взятые по одним и тем же переменным, одно и то же число раз, но в разном порядке. В этом случае справедлива следующая теорема о смешанных производных (сформулируем ее для функции двух переменных).

Теорема 8.3. Если функция $z=f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ непрерывны в этой точке, тогда $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$, т. е. результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Эта теорема справедлива для любых непрерывных смешанных частных производных, отличающихся друг от друга только порядком дифференцирования. Например, $z'''_{xyy}=z'''_{yxy}$.

8.4. Дифференциал функции нескольких переменных

Введем понятие дифференцируемости функции многих переменных. Пусть на открытом множестве $G\subset \mathbf{R}^2$ задана функция $z=f(x,y)$, имеющая в точке $(x,y)\in G$ непрерывные частные производные первого порядка. Составим полное приращение функции $z=f(x,y)$ в точке $(x,y)\in G$:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y). \tag{8.1}$$

Определение 8.11. Функция $z=f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке (x, y), если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \tag{8.2}$$

где A и B – некоторые числа, $o(\rho)/\rho\to 0$ при $\rho\to 0$, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Определение 8.12. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x, y), то главная линейная часть приращения (8.2) $A\Delta x+B\Delta y$ называется ***полным дифференциалом 1-го порядка*** и обозначается $dz=A\Delta x+B\Delta y$. Также по определению полагают $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y$. Тогда полный дифференциал запишется как $dz=Adx+Bdy$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.4. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), тогда в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, причем $A = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $B = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Обратная теорема неверна, т. е. *существование частных производных является необходимым условием дифференцируемости, но не достаточным*.

Из предыдущей теоремы следует, что полный дифференциал 1-го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$ может быть записан в виде

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.} \qquad (8.3)$$

Аналогично определяется полный дифференциал 1-го порядка для функции любого числа переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.}$$

Теорема 8.5. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y). Тогда она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно, т. е. *непрерывность является только необходимым условием дифференцируемости*, но не достаточным. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ является непрерывной в точке (0, 0), но ее частные производные $z'_x = x / \sqrt{x^2 + y^2}$, $z'_y = y / \sqrt{x^2 + y^2}$ не существуют в точке (0, 0).

Установим ***достаточные условия дифференцируемости функции*** $z = f(x, y)$ в точке через ее частные производные.

Теорема 8.6. Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x, y), то она дифференцируема в этой точке.

Аналогичные теоремы имеют место и для функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Любые две функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $v = v(x_1, x_2, ..., x_n)$, имеющие непрерывные частные производные в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, подчиняются обычным ***правилам дифференцирования***:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$, 2) $d(uv) = udv + vdu$, 3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $(v \neq 0)$.

8.5. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим дифференциалы высших порядков.

Определение 8.13. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вторые непрерывные частные производные. Тогда *дифференциалом второго порядка* d^2u функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала первого порядка $d^2u = d(du)$, или

$$d^2u = d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}dx_k\right)dx_i .$$

В частности, для функции двух переменных $u = f(x_1, x_2)$ получим

$$d^2u = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}dx_k\right)dx_i = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}dx_2\right)dx_i =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2\right)dx_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}dx_2\right)dx_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2 .$$

Таким образом,

$$\boxed{d^2 f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2.} \qquad (8.4)$$

Дифференциалом m-го порядка $d^m u$ функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется дифференциал от дифференциала (m–1)-го порядка $d^m u = d(d^{m-1}u)$.

Дифференциал m-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выражается символически формулой

$$\boxed{d^m u = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m f,}$$

которая формально раскрывается по биноминальному закону. Например, для функции $z = f(x, y)$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f=\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3\right)f=$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

8.6. Производная и дифференциал сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(u,v)$, где u,v являются функциями независимых переменных x, y, т. е. $u=u(x,y), v=v(x,y)$. В этом случае функция $z=f(u,v)$ является сложной функцией от аргументов x, y: $z=f(u(x,y),v(x,y))$.

Теорема 8.7. Пусть функция $z=f(u,v)$ дифференцируема в точке $(u,v)\in G$, а функции $u=u(x,y), v=v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x, y). Тогда частные производные по переменным x, y от сложной функции $z=f(u(x,y),v(x,y))$ вычисляются по формулам

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}} \qquad (8.5)$$

Пример. Вычислить частные производные сложной функции $z=u^2v$, $u=x^2\sin y, v=x^3e^y$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2uv\cdot 2x\sin y+u^2\cdot 3x^2e^y=$$

$$=2x^2\sin y\cdot x^3e^y\cdot 2x\sin y+x^4\sin^2 y\cdot 3x^2e^y=7x^6e^y\sin^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2uv\cdot x^2\cos y+u^2\cdot x^3e^y=$$

$$=2x^2\sin y\cdot x^3e^y\cdot x^2\cos y+x^4\sin^2 y\cdot x^3e^y=x^7e^y(\sin 2y+\sin^2 y).$$

В случае большего числа переменных полученные формулы легко обобщаются. Например, пусть задана функция многих переменных $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, где аргументы $x_1,x_2,...,x_n$ являются функциями независимых переменных $t_1,t_2,...,t_m$, т. е.

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, ..., t_m),$$
$$x_2 = x_2(t_1, t_2, ..., t_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = x_n(t_1, t_2, ..., t_m),$$

тогда справедливы следующие формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.$$

В случае если $x_1, x_2, ..., x_n$ являются функциями одной переменной t, то имеет место формула

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},} \tag{8.6}$$

т. е. частные производные по переменной t обращаются в обыкновенные производные.

8.7. Производная неявно заданной функции нескольких переменных

Рассмотрим производные неявно заданной функции.

Определение 8.14. Уравнение вида $F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0$ определяет ***неявно заданную функцию***. В частности, в случае двух переменных имеем $F(x, y) = 0$. Отметим, что последнее уравнение определяет некоторую функцию одной переменной $y = f(x)$.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 8.9. Пусть непрерывная функция y от x задается неявно уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку (x, y), координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, и в этой точке $F'_y(x, y) \neq 0$. Тогда в этой точке функция y от x имеет производную

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.} \tag{8.7}$$

Если неявно заданная функция имеет вид $F(x,y,z)=0$, то каждой паре чисел x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$. Например,

$$x^2+y^2+z^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

В этом случае справедливы формулы:

$$\boxed{z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},} \tag{8.8}$$

где $F'_z(x,y,z)\neq 0$. Напомним, что при вычислении $F'_x(x,y,z)$ переменные y и z считаются постоянными, при вычислении $F'_y(x,y,z)$ переменные x и z считаются постоянными и при вычислении $F'_z(x,y,z)$ переменные x и y считаются постоянными.

Аналогично определяются ***частные производные неявной функции многих переменных*** $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0$:

$$u'_{x_k}=-\frac{F'_{x_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)}{F'_u(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)}.$$

Пример. Найти частные производные функции $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Решение. По формулам (8.7) находим

$$z'_x=-\frac{(x^2+y^2+z^2-1)'_x}{(x^2+y^2+z^2-1)'_z}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},$$

$$z'_y=-\frac{(x^2+y^2+z^2-1)'_y}{(x^2+y^2+z^2-1)'_z}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

8.8. Производная по заданному направлению, градиент. Касательная плоскость, нормаль

Пусть в области D задана непрерывная функция $u=f(x,y,z)$. Известно, что в физике производная от какой-то величины определяет скорость изменения этой величины. Например, изменение расстояния в зависимости от времени – это механическая скорость, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$. Поэтому частные производные функции $u=f(x,y,z)$ по x, y и z выражают некоторую скорость изменения данной функции по направлению координатных осей. С точки зрения физики могут быть интересны скорости изменения какихлибо физических величин по любому заданному направлению. Таким образом, введем понятие производной функции по любому заданному направлению.

Пусть точка $A_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. Проведем из этой точки вектор *l*, направляющие косинусы которого cosα, cosβ и cosγ. Напомним, что α, β, γ – это углы, которые образует вектор *l* соответственно с осями *x, y* и *z*. Также если вектор *l* является единичным вектором, т. е. его длина равна единице, то координаты данного вектора совпадают с направляющими косинусами.

Пусть $A(x, y, z)$ – другая точка, лежащая на векторе *l*. Обозначим расстояние между точками как $|A_0A|$.

Определение 8.15. ***Производной от функции*** $u = f(x, y, z)$ ***по направлению l*** *называется предел*

$$\lim_{A \to A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{|AA_0|}.$$

Данная производная обозначается $\dfrac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}$ и выражает скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ в точке A_0 по направлению *l*.

Приведем формулу для вычисления производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке A_0 по направлению *l*:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Теперь выясним, по какому направлению скорость изменения функции $u = f(x, y, z)$ в заданной точке наибольшая. Для этого введем новое понятие.

Определение 8.16. ***Градиентом*** функции $u = f(x, y, z)$ в области *D* называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k.$$

Тогда производную по направлению можно переписать в виде скалярного произведения вектора grad *u* и единичного вектора *l*:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = |\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)| \cos(\text{grad } u, l),$$

где $|\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)|$ – длина вектора grad *u* в точке A_0, cos (grad *u*, *l*) – косинус угла между векторами grad *u* и *l*, исходящие из точки A_0.

Из последней формулы видно, что наибольшее значение производная по направлению принимает при cos (grad *u*, *l*) = 1, т. е. когда угол между векторами grad u и l равен нулю, а значит, когда направление векторов grad u и l совпадает.

Таким образом, функция $u = f(x, y, z)$ в точке A_0 быстрее всего будет меняться по направлению вектора grad $u(x_0, y_0, z_0)$, причем значение скорости изменения равно длине вектора grad $u(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = |\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|.$$

Перейдем теперь к понятиям касательной плоскости и нормали. Рассмотрим функцию $F(x, y, z) = 0$, имеющую непрерывные частные производные в некоторой области D. Эта функция задает поверхность S в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Определение 8.17. Прямая линия называется ***касательной*** к поверхности S в точке $A_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности S и проходящей через точку A_0.

Через заданную точку A_0 проходит множество кривых, лежащих на поверхности, поэтому касательных прямых к поверхности, проходящих через данную точку, будет бесконечное множество, причем эти касательные прямые могут лежать в одной плоскости, а могут не лежать. В связи с этим различают два типа точек. Точка A_0 называется ***особой***, если все частные производные F'_x, F'_y, F'_z в этой точке равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует. Точка A_0 называется ***обыкновенной***, если все частные производные F'_x, F'_y, F'_z в этой точке существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из этих производных отлична от нуля.

Справедливо следующее утверждение: *все касательные прямые к данной поверхности S в ее обыкновенной точке A_0 лежат в одной плоскости*.

Определение 8.18. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к кривым на поверхности, проходящие через заданную точку, называется ***касательной плоскостью***.

Уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \quad (8.9)$$

а уравнение ***нормали***, т. е. прямой, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к касательной плоскости:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (8.10)$$

Отсюда легко заметить, что вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \{F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\}$$

направлен по нормали к поверхности S.

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, то ***касательная плоскость*** к поверхности S в ее точке $A_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет уравнение

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (8.11)$$

8.9. Экстремумы функции нескольких переменных

Определение 8.19. Пусть функция нескольких переменных $u = f(x_1, \dots, x_n)$ определена в области D, и точка $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ принадлежит данной области. Функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет ***максимум*** в точке x^0, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x^0) \geq f(x)$, и имеет ***минимум***, если $f(x^0) \leq f(x)$. Максимум и минимум называют ***экстремумами*** функции.

Из данного определения следует, что в окрестности точки максимума приращение функции $\Delta u = f(x) - f(x^0) \leq 0$, а в окрестности точки минимума $\Delta u = f(x) - f(x^0) \geq 0$.

Если точка x^0 является точкой минимума, то значение $f(x^0)$ называют ***наименьшим значением функции*** $u = f(x_1, \dots, x_n)$ в области D, и если точка x^0 является точкой максимума, то значение $f(x^0)$ называют ***наибольшим значением функции*** $u = f(x_1, \dots, x_n)$ в области D.

Теорема 8.10 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция* $u = f(x_1, \dots, x_n)$ *имеет экстремум в точке* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. *Тогда, если существуют частные производные первого порядка* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k = 1, \dots, n)$ *в точке* x^0, *то все они равны нулю в этой точке, т.е.* $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_k} = 0$ $(k = 1, \dots, n)$.

Из этой теоремы следует, что «подозрительными» на экстремум являются точки, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называют ***стационарными***.

Отметим, что встречаются функции, в отдельных точках которых некоторые частные производные первого порядка имеют бесконечные значения или не существуют. Такие точки тоже надо исследовать на экстремум.

Итак, *у функции* $u = f(x_1, ..., x_n)$ *«подозрительной» на экстремум является точка* x^0, *в которой: 1) все частные производные первого порядка данной функции равны нулю, 2) некоторые частные производные данной функции равны бесконечности или не существуют.*

Но не обязательно, что точки, «подозрительные» на экстремум, являются таковыми. Например, у функции двух переменных $u = x^2 y$ частные производные $u'_x = 2xy, u'_y = x^2$ равны нулю в точке (0, 0). Но в любой окрестности этой точки приращение функции $\Delta u = x^2 y - 0 = x^2 y$ может принимать и положительные и отрицательные значения. Поэтому точка (0, 0) не является точкой экстремума.

Чтобы проверить, является ли точка x^0 точкой экстремума, надо проверить достаточные условия экстремума.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 8.11. *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности точки* (x_0, y_0), *которая является стационарной, т. е. удовлетворяет условиям* $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. *Введем обозначения:*

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда в точке (x_0, y_0)

1) функция $z = f(x, y)$ *имеет максимум, если*

$$A \cdot C - B^2 > 0, A < 0,$$

2) функция $z = f(x, y)$ *имеет минимум, если*

$$A \cdot C - B^2 > 0, A > 0,$$

3) функция $z = f(x, y)$ *не имеет экстремума, если*

$$A \cdot C - B^2 < 0,$$

4) функция $z = f(x, y)$ *может иметь экстремум, а может и не иметь, т. е. требуется дополнительное исследование, если*

$$A \cdot C - B^2 = 0.$$

В общем случае для функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ со стационарной точкой $(x_1^0, ..., x_n^0)$ введем обозначения $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0, ..., x_n^0)$, $i, k = 1, ..., n$. Тогда функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ имеет ***минимум*** в точке $(x_1^0, ..., x_n^0)$, если

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

и имеет ***максимум***, если

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} > 0, ...$$

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Найдем стационарные точки:

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0), \ (x_0, y_0) = (1, 1).$$

Тогда для первой точки $(x_0, y_0) = (0,0)$ получим

$$A = z''_{xx}(0,0) = 0, \ B = z''_{xy}(0,0) = -3, \ C = z''_{yy}(0,0) = 0,$$

следовательно, $A \cdot C - B^2 = -9 < 0$, т. е. точка $(x_0, y_0) = (0,0)$ не является экстремумом.

Для второй точки $(x_0, y_0) = (1, 1)$ найдем

$$A = z''_{xx}(1,1) = 6, \ B = z''_{xy}(1,1) = -3, \ C = z''_{yy}(1,1) = 6,$$

отсюда $A \cdot C - B^2 = 27 > 0$, т. е. точка $(x_0, y_0) = (1, 1)$ является точкой минимума, так как $A > 0$.

Контрольные вопросы

1. Определение функции нескольких переменных.
2. Предел функции нескольких переменных. Критерий Коши.
3. Непрерывность функции нескольких переменных.
4. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных.
5. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.

6. Дифференциал функции нескольких переменных.

7. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных.

8. Производная и дифференциал сложной функции нескольких переменных.

9. Производная неявно-заданной функции нескольких переменных.

10. Производная по заданному направлению, градиент.

11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

12. Определение точек экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

13. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

ЛЕКЦИЯ № 9
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

Определение9.1. ***Дифференциальными уравнениями*** называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных и в которые входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одной переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***.

Начнем с дифференциальных уравнений ***первого порядка***. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции, и они могут быть записаны в виде

$$F(x, y, y') = 0,$$

где x – независимая переменная; y – её неизвестная функция; $y' = dy/dx$ – производная функции y; F – заданная функция трех переменных.

Функция F может быть задана не для всех значений её аргументов, поэтому можно говорить об области определения функции F координатного пространства, т. е. о множестве точек координатного пространства трех переменных x, y, y'. Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка: $y' + xy = 2$, $\sin y' = x^2 - 2y$, $y' = 2xy + \ln x$.

Определение 9.2. ***Решением уравнения*** $F(x, y, y') = 0$ называется такая функция $y = y(x)$, определенная на некотором промежутке (a, b), что при подстановке её вместо y в уравнение получается верное равенство на всем промежутке $(a,\ b)$. Очевидно, что подстановка $y = y(x)$ возможна только тогда, когда функция $y(x)$ на промежутке $(a,\ b)$ имеет первую производную. Необходимо также, чтобы при любом значении переменной x из промежутка (a, b) точка с координатами x, y, y' принадлежала множеству B, на котором определена функция F. Решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ может быть записано и в неявном виде: $q(x, y) = 0$.

Процесс нахождения решений называется ***интегрированием дифференциального уравнения.***

В некоторых случаях уравнение $F(x,\ y,\ y') = 0$ определяет переменную y' как функцию независимых переменных x и y:

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Последнее дифференциальное уравнение называется ***уравнением, разрешенным относительно производной***.

Определение 9.3. Пусть функция $y = y(x, c)$ определена в некоторой области изменения переменных x и c и имеет непрерывную частную производную по переменной x. Эта функция называется ***общим решением*** уравнения $y' = f(x,\ y)$ в заданной области D изменения переменных x и y. Функция $y = y(x, c)$ является решением уравнения при всех значениях произвольной постоянной c, когда точка (x, y) пробегает область D.

Если общее решение уравнения $y' = f(x,\ y)$ записано в неявном виде $q(x, y, c) = 0$, или $q(x, y) = c$, то оно называется ***общим интегралом*** этого уравнения.

Задача Коши

Во многих задачах требуется среди всех решений дифференциального уравнения найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где x_0 и y_0 – заданные числа. Это такое решение, в котором функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0, если независимую переменную x заменить заданным значением x_0 так, что $y(x_0) = y_0$. Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0). Условие $y(x_0) = y_0$ называется ***начальным условием***.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется ***задачей Коши***.

Чтобы найти решение уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ с помощью формулы общего решения $y = y(x, c)$, поступают следующим образом:

1) подставляют в общее решение вместо переменных x, y числа x_0, y_0: $y_0 = y(x_0, c)$;

2) решают полученное уравнение относительно c и находят $c = c_0$;

3) подставляют полученное значение c_0 в общее решение: $y = y(x, c_0)$.

Это и есть искомое решение, его называют ***частным решением***. Оно будет единственным, что следует из приведенной ниже теоремы.

Теорема 9.1. Если $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по переменной y в области D, то через каждую точку, принадлежащую D, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$.

Теорему 9.1 называют ***теоремой существования и единственности*** решения уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым***. Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $c = \pm\infty$, но при этом оно является решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

9.2. Уравнения с разделяющимися переменными

К уравнениям с разделяющимися переменными относятся следующие дифференциальные уравнения.

1. Уравнения, не содержащие искомой функции:

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале (a, b). Тогда общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \int f(x)dx + C,$$

где C – произвольное постоянное число.

Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0.$$

2. Уравнения, не содержащие независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Составим перевернутое уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ или перепишем его в виде $dx = \frac{1}{f(y)}dy$. Пусть функция $f(y)$ непрерывна и не равна нулю в некотором интервале (c, d). Тогда

$$x = \int \frac{1}{f(y)}dy + C$$

является общим решением данного уравнения, где C – произвольное постоянное число, а

$$x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{f(y)}dy + x_0$$

– частным решением.

Уравнение вида $y' = f(ax + by)$, где $b \neq 0$, приводится к уравнению, не содержащему независимую переменную, с помощью подстановки $u = ax + by$. Здесь u – новая неизвестная функция. Дифференцируя функцию u по переменной x, найдем $u' = a + by'$, или $u' = a + bf(u)$.

3. Уравнения с разделенными переменными:

$$\boxed{f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0.}$$

Здесь коэффициент при dx зависит только от переменной x, а коэффициент при dy зависит только от переменной y. В этом случае говорят, что переменные разделены. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ непрерывны, тогда решением рассматриваемого уравнения будет общий интеграл

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C$$

или частный интеграл (частное решение)

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} f_2(y)dy = 0.$$

4. Уравнения с разделяющимися переменными:

$$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.}$$

Здесь коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от переменных x и y. Данное уравнение можно привести к уравнению с разделенными переменными путем деления на $f_2(x)g_1(y)$. Получаем общий интеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Заметим, что при делении можно потерять частные решения, обращающие в нуль произведение $f_2(x)g_1(y) = 0$. В этом случае, если одно или оба уравнения $f_2(x) = 0$ и $g_1(y) = 0$ имеют решения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, то равенства $x = x_1, x = x_2, \ldots$ и $y = y_1, y = y_2, \ldots$ нужно присоединить к ответу, так как они являются интегральными кривыми дифференциального уравнения.

9.3. Однородные уравнения

Определение 9.4. Функция $A(x, y)$ называется ***однородной*** функцией степени n, если для всех $m > 0$ имеем $A(mx, my) = m^n A(x, y)$.

Определение 9.5. Уравнение

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

в котором функции A и B – однородные функции одной и той же степени, называется ***однородным***. Однородное уравнение может быть записано в виде:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{9.1}$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$u = \frac{y}{x}.$$

Отсюда $y = ux$, следовательно, $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Тогда однородное уравнение (9.1) перепишется в виде

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Если $f(u) = u$, то $u(x) = C$, следовательно, решениями последнего уравнения будут $y = Cx$, $x \neq 0$ и особое решение $x = 0$, $y \neq 0$. Положим

$f(u) \neq u$. Разделим переменные: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{f(u) - u}$. Проинтегрировав данное равенство, найдем $x = cz(u)$, $z(u) = e^{-\int \frac{du}{u - f(u)}}$. Далее необходимо вернуться к прежней переменной и записать общее решение в виде

$$x = Cz\left(\frac{y}{x}\right).$$

Особыми решениями здесь могут быть полуоси $x = 0$, $y \neq 0$ и полупрямые $y = u_i x$, $x \neq 0$, где u_i – корни уравнения $u - f(u) = 0$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

Решение. Это уравнение является однородным. Сделаем замену $u = \dfrac{y}{x}$. Тогда $y = xu$, $y' = u + xu'$ и уравнение примет вид $u + xu' = e^{u} + u$ или $x\dfrac{du}{dx} = e^{u}$. Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными: $e^{-u}du = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя его, получим $-e^{-u} = \ln x + \ln C$. Отсюда получаем решение уравнения $-e^{-y/x} = \ln(Cx)$ или $e^{-y/x} = \ln\dfrac{1}{Cx}$.

9.4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Определение 9.6. ***Линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x).} \tag{9.2}$$

Если правая часть уравнения равна нулю, то это уравнение называется ***однородным***, в противном случае – ***неоднородным***.

Если в уравнении функции $p(x)$ и $q(x)$ являются постоянными числами, то уравнение называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами***.

Для нахождения общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка существует два метода: метод вариации постоянной (метод Лангранжа) и метод подстановки (метод Бернулли). Рассмотрим второй метод.

В этом случае общее решение неоднородного линейного уравнения (9.2) ищем в виде

$$y(x) = u(x)v(x),$$

тогда

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Подставив $y(x), y'(x)$ в уравнение $y' + p(x)y = q(x)$, получим

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x).$$

Так как мы имеем одно уравнение на две неизвестные функции $u(x)$, $v(x)$, то необходимо принять произвольно какое-либо условие, дающее нам второе уравнение. Пусть, например, функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u'(x) + u(x)p(x) = 0.$$

Тогда

$$u(x)v'(x) = q(x).$$

Уравнение $u'(x) + u(x)p(x) = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными, нам достаточно найти любое его частное решение, например,

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Общим решением уравнения $u(x)v'(x) = q(x)$ будет

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

где C – произвольное постоянное число.

Следовательно, общее решение линейного неоднородного уравнения (9.2) запишется в виде

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C). \tag{9.3}$$

Уравнение вида

$$x' + p(y)x = q(y)$$

также является линейным, но относительно неизвестной функции $x(y)$ теперь y считается переменной, при этом $x' = dx/dy$. Методы, рассмотренные выше, применимы и в этом случае. Основная задача здесь – распознать, что заданное вам уравнение является линейным относительно $x(y)$. Например, уравнение $y'(3x + \sqrt{y}) - y = 0$ не является линейным относительно функции $x(y)$, но если его переписать в виде

$$dy(3x+\sqrt{y})-ydx=0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=\frac{1}{\sqrt{y}},$$

то видно, что оно является линейным относительно $x(y)$.

9.5. Уравнение в полных дифференциалах

Определение 9.7. Уравнение

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \tag{9.4}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, т. е. это уравнение можно переписать в виде $dU(x,y)=0$. Отсюда общий интеграл будет

$$U(x, y) = C.$$

Пусть функции $P(x,y), Q(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области, а также имеют непрерывные частные производные по переменным x, y. Тогда имеет место следующее: *для того чтобы уравнение* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.} \tag{9.5}$$

Общий интеграл уравнения (9.4) имеет вид

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=c,$$

где $(x_0,y_0)\in D$, D – область определения функций $A(x,y), B(x,y)$.

Рассмотрим еще один способ нахождения общего решения уравнения в полных дифференциалах (9.4). Так как, с одной стороны,

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

а, с другой стороны,

$$dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

то отсюда следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y).$$

Интегрируя первое уравнение по переменной x (при этом y считаем постоянным числом), получим

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция. Для нахождения $\varphi(y)$ нужно подставить найденную функцию $U(x,y)$ во второе уравнение $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$ и проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение.

9.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Общие понятия

Определение 9.8. Дифференциальное уравнение

$$F(x,y,y',y'',y''',...,y^{(n)})=0 \qquad (9.6)$$

называется ***дифференциальным уравнением*** n***-го порядка***. Здесь (n) означает порядок производной.

В некоторых случаях уравнение (9.6) можно переписать в виде

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',y''',...,y^{(n-1)}).$$

Решением уравнения (9.6) называется такая функция $y=y(x)$, определенная на некотором промежутке $(a,\, b)$, которая обращает уравнение в тождество. Ясно, что в этом случае $y=y(x)$ должна иметь в $(a,\, b)$ непрерывные производные до n-го порядка и при любом значении переменной x из промежутка $(a,\, b)$ точка с координатами $(x,y,y',y'',y''',...,y^{(n-1)})$ должна принадлежать множеству B, на котором определена функция f. Совокупность всех решений дифференциального уравнения является его общим решением.

Общим решением уравнения (9.6) называется такая функция

$$y=y(x,c_1,c_2,...,c_n),$$

которая при любых значениях постоянных $c_1,c_2,...,c_n$ является решением этого уравнения. Если общее решение записано в неявном виде

$$q(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0,$$

то оно называется ***общим интегралом***. Иногда решение записывается в ***параметрической форме***:

$$x=x(t,c_1,c_2,...,c_n),\ y=y(t,c_1,c_2,...,c_n).$$

Определение 9.9. Задача нахождения решения дифференциального уравнения n-го порядка при заданных ***начальных условиях***

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

называется ***задачей Коши***. Здесь $x_0, y_0, y'_0, y''_0,..., y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Геометрически это означает, как и раньше, что ищется интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0). Также заметим, что число равенств в начальных условиях совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Вопрос о ***существовании и единственности решения задачи Коши*** дает приведенная ниже теорема.

Теорема 9.2. Если функция $f(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)})$ в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'},..., \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в области D изменения своих аргументов, то в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, y''_0,..., y_0^{(n-1)}) \in D$ существует, и притом единственное, решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, y''(x_0)=y''_0,..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Чтобы найти решение уравнения с заданными начальными условиями с помощью формулы общего решения, поступают следующим образом:

1) находят у функции $y = y(x, c_1, c_2,..., c_n)$ производные по переменной x до $(n–1)$-го порядка, получают систему

$$\begin{cases} y(x) = y(x, c_1, c_2,..., c_n), \\ y'(x) = y'(x, c_1, c_2,..., c_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x, c_1, c_2,..., c_n); \end{cases}$$

2) подставляют в полученную систему, соответственно, вместо $x, y, y',..., y^{(n-1)}$ числа $x_0, y_0, y'_0, y''_0,..., y_0^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, c_1, c_2,..., c_n), \\ y'_0 = y'(x_0, c_1, c_2,..., c_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2,..., c_n); \end{cases}$$

3) решают полученную систему уравнений относительно $c_1, c_2,..., c_n$;

4) подставляют полученные значения $c_1, c_2, ..., c_n$ в формулу общего решения и тем самым находят искомое решение, которое называется ***частным решением***.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.*

9.7. Уравнения, допускающие понижения порядка

Иногда уравнения n-го порядка интегрируется путем сведения к уравнению более низкого порядка. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Уравнение, содержащее независимую переменную и производную порядка* n.

Одно из простейших уравнений n-го порядка имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} = f(x).}$$

Общее решение его находится путем последовательного интегрирования, в итоге получим

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_{n-1}x + c_n. \qquad (9.7)$$

Отметим: каков порядок уравнения, таково и число произвольных постоянных в общем решении уравнения.

2. *Уравнение, не содержащее искомой функции*.

Пусть уравнение высших порядков представлено в виде

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0} \quad (1 \le k < n), \qquad (9.8)$$

т. е. не содержит функцию y и ее производные до (k–1)-го порядка включительно. В этом случае очевидна замена $y^{(k)} = z(x)$, которая позволяет понизить порядок уравнения (9.8) на k единиц. При этом получится следующее уравнение:

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

Допустим, мы смогли его проинтегрировать и найти общее решение

$$z = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k}),$$

отсюда получим уравнение на функцию y

$$y^{(k)} = q(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k}).$$

Таким образом, путем k-кратного интегрирования находим общее решение уравнения (9.8), при этом у нас еще добавится k произвольных постоянных, поэтому в ответе в итоге их будет n штук.

3. *Уравнение, не содержащее независимой переменной*.

Это уравнение вида

$$\boxed{F(y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0.} \tag{9.9}$$

Это довольно непростое уравнение, можно понизить его порядок лишь на единицу с помощью подстановки

$$y' = p(y).$$

При этом y, как мы видим, принимается за переменную. Пересчитаем остальные производные:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} p\right) = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) p$$

и т. д. Отметим, что функция $p(y(x))$ дифференцировалась по x, как сложная функция. Подставив эти производные в уравнение (9.9), получим дифференциальное уравнение (n–1)-го порядка на новую неизвестную функцию $p(y)$. Предположим, что решением полученного уравнения будет

$$p = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1}),$$

следовательно, $y' = q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$. Проинтегрировав последнее уравнение, найдем

$$x + c_n = \int \frac{dy}{q(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})}.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' - y' = 0$.

Решение. Это уравнение, не содержащее искомой функции, рассмотренное во втором пункте. Сделаем замену $y' = z(x)$. Получим уравнение первого порядка $xz' - z = 0$. Проинтегрировав его, найдем $z = xc_1$. Отсюда $y' = xc_1$ или $y = \int xc_1 dx + c_2$. Следовательно, общее решение уравнения: $y = c_1 x^2 / 2 + c_2$.

9.8. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение 9.10. ***Линейным уравнением*** n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{9.10}$$

где $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ – произвольные функции от переменной x. Если правая часть уравнения равна нулю, т. е. $f(x) = 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***, в противном случае при $f(x) \neq 0$ уравнение называется ***неоднородным***.

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0. \tag{9.11}$$

Заметим, что данное уравнение всегда имеет хотя бы одно решение, это *тривиальное решение* $y = 0$. Если заданы начальные условия, то уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее этим условиям, при этом предполагается, что произвольные функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b).

Если $y = y_1$ является решением однородного линейного уравнения (9.11), то $y = cy_1$, где c – произвольное постоянное число, не равное нулю, также будет решением этого уравнения.

Если y_1, y_2 – два частных решения однородного линейного уравнения (9.11), то $y = c_1y_1 + c_2y_2$ – также решение этого уравнения. Это легко проверить путем непосредственной подстановки $y = c_1y_1 + c_2y_2$ в данное уравнение.

Итак, имеем вывод: ***если*** $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ***решения линейного однородного уравнения (9.11), то их линейная комбинация*** $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ ***также является решением этого уравнения.***

Введем следующие понятия: частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, не равные все одновременно нулю, называются ***линейно независимыми***, если равенство

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n = 0$$

справедливо только в том случае, когда все постоянные $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны нулю. В противном случае система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется ***линейно зависимой.***

Всякую линейно независимую систему из n решений уравнения (9.11) называют ***фундаментальной системой решений этого уравнения***.

Теорема 9.3. Для того чтобы система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (9.12)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала (a, b).

В действительности, в этом случае определитель (9.12) отличен от нуля во всех точках интервала (a, b).

Определение 9.11. Определитель (9.12) называется ***определителем Вронского***. Если определитель Вронского равен нулю, то система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ будет линейно зависимой.

Пусть $y_1, y_2, ..., y_n$ является фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения (9.11), тогда ***общим решением*** данного уравнения будет

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,} \qquad (9.13)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные числа.

Основная трудность в решении однородных линейных уравнений, это найти линейно независимые частные решения. Общего метода для этого нет. Но если известно одно частное решение y_1, то с помощью подстановки $y = y_1 z$ можно привести уравнение к линейному однородному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому, сделав вторую замену $z'(x) = u(x)$, мы получим линейное однородное уравнение $(n$–$1)$-го порядка.

9.9. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = 0, \qquad (9.14)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ – вещественные постоянные числа.

Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ образуют фундаментальную систему данного уравнения, то общим решением уравнения будет

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные числа.

Для нахождения линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного уравнения с постоянными коэффициентами используется приведенный ниже метод.

Метод Эйлера. Рассмотрим этот метод для линейного уравнения 2-го порядка, а затем обобщим его на уравнение n-го порядка.

1. *Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{9.15}$$

где коэффициенты a_1, a_2 – вещественные постоянные числа.

Ищем частное решение данного уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторое постоянное вещественное или комплексное число, которое необходимо найти.

Подставив это решение в уравнение (9.15), получим квадратное уравнение на неизвестное число k:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0,$$

которое называется ***характеристическим уравнением***. После решения этого уравнения возможны три случая.

1) Корни k_1, k_2 – вещественные, не равные друг другу числа. Тогда частными решениями уравнения (9.15) будут

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Видно, что y_1, y_2 линейно независимые решения, так как их отношение не равно постоянному числу:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \quad (k_1 \neq k_2).$$

Общее решение имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.}$$

2) Корни k_1, k_2 –комплексно сопряженные: $k_1 = p + iq$, $k_2 = p - iq$. Частные решения запишутся в виде

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx,$$

$$y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx.$$

Заметим, что функции $e^{px}\cos qx$, $e^{px}\sin qx$ также являются частными решениями рассматриваемого уравнения, причем они линейно независимые. Поэтому примем за частные решения уравнения (9.15)

$$y_1 = e^{px}\cos qx,\ \ y_2 = e^{px}\sin qx$$

тогда общим решением будет

$$\boxed{y = c_1 e^{px}\cos qx + c_2 e^{px}\sin qx.}$$

3) Корни совпадают, т. е. $k_1 = k_2 = k$. За одно частное решение можно принять $y_1 = e^{kx}$. Второе решение должно от него отличаться, так как они должны быть линейно независимые. Найдем второе частное решение. Предположим, что k_2 немного отличается от числа k_1. Вычтем из второго решения первое и поделим на число $k_2 - k_1$, мы получим вновь решение

$$\bar{y} = \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}.$$

Перейдем к пределу при $k_2 \to k_1$:

$$\lim_{k_2 \to k_1} \bar{y} = \lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1} = \frac{de^{kx}}{dk} = xe^{kx}.$$

Здесь мы воспользовались определением производной. Таким образом, вторым частным решением в этом случае может быть $y_2 = xe^{kx}$, отсюда общее решение уравнения (9.15) имеет вид

$$\boxed{y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}.}$$

2. Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Обобщим результаты 1-го пункта для линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (9.14). Здесь характеристическое уравнение будет следующим:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{9.16}$$

Решив его, получим четыре случая.

1) Корни $k_1, k_2, ..., k_n$ – вещественные, не равные друг другу числа. Тогда частными решениями рассматриваемого уравнения будут

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}, ...,\ y_n = e^{k_n x},$$

которые попарно линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (9.16) имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x}$.

2) Корни $k_1, k_2, ..., k_n$ – не равны между собой, но среди них есть комплексно сопряженные корни. Каждой паре $k_{m1,m2} = p_m \pm iq_m$ соответствуют два частных решения

$$y_{m1} = e^{p_m x} \cos q_m x,\quad y_{m2} = e^{p_m x} \sin q_m x.$$

Всего частных решений будет снова n. Тогда общим решением будет линейная комбинация всех частных решений.

3) Корни $k_1, k_2, ..., k_n$ – все вещественные, но среди них некоторые совпадают, например, $k_1 = k_2 = ... = k_s = k$ (в этом случае говорят, что *корень k имеет кратность s*). Совпадающим s корням соответствует s линейно независимых частных решений:

$$y_1 = e^{kx},\quad y_2 = xe^{kx},\quad y_3 = x^2 e^{kx},\quad ...,\quad y_s = x^{s-1} e^{kx}.$$

Общее решение запишется в виде $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

4) Корни $k_1, k_2, ..., k_n$ содержат s равных комплексно сопряженных пар $p \pm iq$, тогда им соответствуют $2s$ частных решений:

$$e^{px}\cos qx,\quad xe^{px}\cos qx,\quad x^2 e^{px}\cos qx,\quad ...,\quad x^{s-1} e^{px}\cos qx,$$

$$e^{px}\sin qx,\quad xe^{px}\sin qx,\quad x^2 e^{px}\sin qx,\quad ...,\quad x^{s-1} e^{px}\sin qx.$$

Общее решение есть линейная комбинация всех частных решений, т. е. $c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

Уравнения с правой частью специального вида

Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_n y = f(x), \tag{9.17}$$

где коэффициенты $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ – вещественные постоянные числа.

Общим решением такого уравнения является сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения (9.14) и какого-либо частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения (9.17): $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

Нахождение общего решения однородного уравнения (9.17) было рассмотрено выше. Для определения частного решения можно воспользоваться методом вариации постоянной (метод Лагранжа).

Иногда частное решение удается найти в зависимости от правой части неоднородного уравнения (9.17), т. е. от вида функции $f(x)$. Рассмотрим разные случаи.

1) Если $f(x) = P(x) -$ полином k-й степени и если число нуль не является корнем характеристического уравнения (9.16) соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = Q(x),$$

где $Q(x)$ – полином k-й степени, но с неопределенными коэффициентами.

Для нахождения неизвестных коэффициентов надо воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Для этого следует подставить частное решение $\bar{y} = Q(x)$ в уравнение (9.17), в полученном равенстве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в правой и левой частях. Получится система алгебраических уравнений на неизвестные коэффициенты. Решив ее, найдем коэффициенты полинома $Q(x)$, а значит, частное решение $\bar{y}$.

Если нуль является корнем характеристического уравнения (9.16) кратности s, тогда частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x^s Q(x).$$

2) Если $f(x) = e^{ax} P(x)$ и если число a не является корнем характеристического уравнения (9.16) соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = e^{ax} Q(x).$$

Здесь полином $Q(x)$ с неопределенными коэффициентами, причем той же степени, что и полином $P(x)$.

Если a является корнем характеристического уравнения кратности s, тогда частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = x^s e^{ax} Q(x).$$

3) Если $f(x)=e^{ax}(A(x)\cos bx+B(x)\sin bx)$, где $A(x), B(x)$ – полиномы, причем их степени могут не совпадать, и если комплексное число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения (9.16), то частное решение ищем в том же виде:

$$\bar{y}=e^{ax}(C(x)\cos bx+D(x)\sin bx),$$

здесь степень полиномов $C(x),\ D(x)$ с неопределенными коэффициентами совпадает с наибольшей из степеней полиномов $A(x),\ B(x)$.

Если комплексное число $a+ib$ является корнем характеристического уравнения кратности s, то частное решение ищем в виде

$$\bar{y}=x^s e^{ax}(C(x)\cos bx+D(x)\sin bx).$$

4) Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)$, где $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)$ есть функции рассмотренного выше вида, и если $\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m$ – соответствующие им частные решения, то $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2+\ldots+\bar{y}_m$ является частным решением всего уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''+y=x\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2+1=0$ имеет корни $k=\pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть заданного уравнения представляет собой функцию вида $f(x)=e^{ax}(A(x)\cos bx+B(x)\sin bx)$, где $a=0, b=1, A(x)=0, B(x)=x$. Видно, что число $k=\pm i$ совпадает с числом $a\pm ib=0\pm 1i=\pm i$, т. е. $a\pm ib$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Полином $B(x)$ есть полином первой степени. Таким образом, ищем частное решение в виде

$$\bar{y}=x\big((C_1x+C_2)\cos x+(D_1x+D_2)\sin x\big),$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 – неопределенные коэффициенты. Дифференцируем частное решение два раза, и результат подставляем в заданное уравнение. В полученном равенстве, приравняв коэффициенты в левой и правой частях при $\cos x,\ x\cos x,\ \sin x,\ x\sin x$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2C_1 + 2D_2 = 0, \\ 4D_1 = 0, \\ -2C_2 + 2D_1 = 0, \\ -4C_1 = 1, \end{cases}$$

решением которой являются $C_1 = -\frac{1}{4}, C_2 = 0, D_1 = 0, D_2 = \frac{1}{4}$. Отсюда частное решение имеет вид $\bar{y} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$. Тогда общим решением заданного уравнения будет

$$y = y_0(x) + \bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Контрольные вопросы

1. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения.
4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод Бернулли.
5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.
6. Дифференциальные уравнения высших порядков: общие понятия, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка.
8. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
9. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
10. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.
11. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

ЛЕКЦИЯ № 10
РЯДЫ

10.1. Числовые ряды. Основные понятия

Бесконечные ряды широко используются в теоретических исследованиях математического анализа, имеют разнообразные практические применения.

Определение 10.1. ***Числовым рядом*** (или просто рядом) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{10.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – действительные или комплексные числа, называемые членами ряда, u_n – общим членом ряда.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Определение 10.2. Сумма первых n членов ряда называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается через S_n, т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$

Определение 10.3. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называют ***суммой ряда*** и говорят, что ряд ***сходится***. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, то ряд называют ***расходящимся***. Такой ряд суммы не имеет.

Рассмотрим некоторые важные свойства рядов.

Свойство 1. Если ряд (10.1) сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots,$$

где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд расходится и $c \neq 0$, то и ряд расходится.

Свойство 2. Если сходится ряд (10.1) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n,$$

а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm \upsilon_n),$$

причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Из свойства 2 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Заметим, что сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд сходятся или расходятся одновременно.

Из свойства 3 также следует, что если ряд сходится, то его остаток $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim r_n = 0$.

Необходимый признак сходимости числового ряда

Нахождение n-й частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные признаки сходимости. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 10.1. Если ряд (10.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0,$$

т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда.

10.2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Необходимый признак сходимости не дает, вообще говоря, возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью так называемых ***достаточных признаков***.

Рассмотрим некоторые из них для ***знакоположительных*** рядов, т. е. рядов с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (–1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда).

Признаки сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 10.2. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,, \tag{10.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n. \tag{10.3}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \le \upsilon_n,$$

то из сходимости ряда (10.3) следует сходимость ряда (10.2), из расходимости ряда (10.2) следует расходимость ряда (10.3).

Теорема 10.3 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (10.2) и (10.3). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\upsilon_n} = A \quad (0 < A < \infty)$, то ряды (10.2) и (10.3) сходятся или расходятся одновременно.

«Эталонные» ряды

Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots (a \ne 0), \tag{10.4}$$

который называется ***рядом геометрической прогрессии***. Ряд часто используется при исследовании рядов на сходимость.

Ряд геометрической прогрессии сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$.

Пример. Показать, что ряд $2^3+2^2+2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-3}}+\ldots$ сходится.

Решение. Данный ряд можно переписать так:

$$2^3\cdot 1+2^3\cdot\frac{1}{2}+2^3\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+2^3\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Как видно, он представляет собой ряд геометрической прогрессии с $a=2^3$ и $q=\frac{1}{2}<1$. Этот ряд сходится согласно свойству 1 числовых рядов.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots, \qquad (10.5)$$

где $p>0$ – действительное число, называется ***обобщенным гармоническим рядом***. При p = 1 имеем ***гармонический ряд*** с $u_n=\frac{1}{n}$, который расходится. Ряд (10.5) сходится при p > 1, расходится при $p\le 1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится $\left(q=\frac{1}{2}<1\right)$. Имеем $\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}$. Следовательно, данный ряд сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Здесь $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Возьмем ряд с общим членом $\upsilon_n=\frac{1}{n}$, который расходится (гармонический ряд). Имеем $\frac{1}{n}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}$.

Решение: Применим предельный признак сравнения. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{5}\neq 0$, то по теореме исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом.

Признак Даламбера

В отличие от признаков сравнения, где все зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Теорема 10.4. Пусть дан ряд с положительными членами (10.2) и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Замечания.

1. Если $l=1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Решение. Находим

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $l=0<1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$.

Решение: Вычисляем

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=3.$$

Так как $l=3>1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится.

Радикальный признак Коши

Иногда удобно пользоваться радикальным признаком Коши для исследования сходимости знакоположительного ряда. Этот признак во многом схож с признаком Даламбера, о чем говорят его формулировка и доказательство.

Теорема 10.5. Пусть дан ряд с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$ Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим радикальный признак Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Вычисляем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд, согласно свойству рядов.

Интегральный признак Коши

Теорема 10.6. Если члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$, то:

1) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд;

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится также и ряд.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Решение: Воспользуемся интегральным признаком Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ удовлетворяет условиям теоремы. Находим

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big|_{2}^{\infty} = \infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u_n = \frac{1}{x \ln x}$ расходится.

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) знакоположительных рядов позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда. Необходимые навыки приобретаются на практике.

10.3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим важный класс рядов, называемых знакочередующимися.

Определение 10.4. ***Знакочередующимся рядом*** называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathrm{N}$ (т. е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следует друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости (установленный в 1714 г. Лейбницем).

Теорема 10.7 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1.$$

Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется ***знакопеременным***.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема 10.8. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{10.6}$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{10.7}$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (10.6), то это не означает, что будет сходиться ряд (10.7).

Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Определение 10.5. Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм (переместительность, сочетательность, распределительность).

***Основные свойства абсолютно сходящихся рядов*:**

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$)

3. Под произведением двух рядов $u_1 + u_2 + \ldots$ и $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots$ понимают ряд вида

$$(u_1\upsilon_1) + (u_1\upsilon_2 + u_2\upsilon_1) + (u_1\upsilon_3 + u_2\upsilon_2 + u_3\upsilon_1) + \ldots + (u_1\upsilon_n + u_2\upsilon_{n-1} + \ldots + u_n\upsilon_1) + \ldots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 \cdot S_2$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды суммируются, вычитаются, перемножаются как обычные ряды. Суммы таких рядов не зависят от порядка записи членов.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения (свойства), вообще говоря, не имеют места.

Так, переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда изменится. Например, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ условно сходится по признаку Лейбница. Пусть его сумма равна S. Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Сумма уменьшилась вдвое!

Более того, путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой или расходящийся ряд (теорема Римана).

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для установления абсолютной сходимости используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя всюду общий член ряда его модулем.

10.4. Функциональные ряды. Основные понятия

Определение 10.6. Ряд, членами которого являются функции от x, называется ***функциональным:***

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x_1)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда; если же ряд расходится – ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Определение 10.7. Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости.***

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x; $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (10.8)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ называются коэффициентами ряда, $x \in R$ – действительная переменная.

Ряд расположен по степеням x Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_n (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (10.9)$$

где x_0 – постоянное число.

Ряд легко приводить к виду, если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида.

10.5. Сходимость степенных рядов

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда (10.8) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (10.9) сходится в точке $x = x_0$).

Теорема Н.Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 10.9 (Абель). Если степенной ряд (10.8) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если ряд (10.8) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд расходится (рис. 10.1).

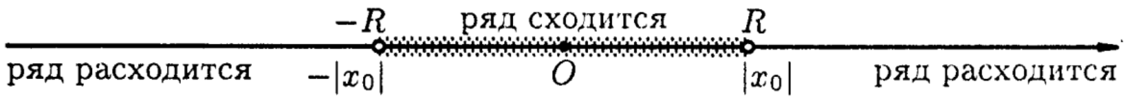


Рис. 10.1

Интервал $\left(-|x_0|;|x_0|\right)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ – это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R,$ ряд абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд сходится при всех значениях $x \in R$ (т.е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, x \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $|x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых

$$x < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

ряд, составленный из модулей членов ряда, расходится при тех значениях x, для которых $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Таким образом, для ряда радиус абсолютной сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (10.10)$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (10.11)$$

Замечания:

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы), а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}.$$

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x+2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок [–4; 0).

Свойства степенных рядов

Сформулируем без доказательства основные свойства степенных рядов.

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R; R)$.

2. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

при $-R < x < R$ выполняется равенство

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots$$

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда при $-R < a < x < R$ выполняется равенство

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n dt + \ldots$$

Ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Свойства степенных рядов широко используются в теоретических исследованиях и в приближенных вычислениях.

10.6. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена

Для приложений важно уметь данную функцию разлагать в степенной ряд, т. е. функцию представлять в виде суммы степенного ряда.

Как известно, для любой функции, определенной в окрестности точки и имеющей в ней производные до n-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c\in(x_0,x)$ – остаточный член в форме Лагранжа. Число c можно записать в виде $c=x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$. Формулу кратко можно записать в виде

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

где $P_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков (т. е. бесконечно дифференцируема) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\right)$, то из формулы Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$, называемое ***рядом Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (10.12)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (10.13)$$

Отметим, что ряд Тейлора можно формально построить для любой бесконечно дифференцируемой функции (это необходимое условие) в окрестности точки x_0. Но отсюда еще не следует, что он будет сходиться к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходиться, но не к функции $f(x)$. Так, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0)=0$ при всяком n. Ряд Маклорена имеет вид

$$0+\frac{0}{2!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

Он сходится, но его сумма $S(x)$ в любой точке x равна нулю, а не $f(x)$.

Пусть для функции $f(x)$ составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема 10.10. Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Замечание. Если ряд Тейлора сходится к порождающей функции $f(x)$, то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора, т.е. $R_n(x)=r_n(x)$. Напомним, что $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, а $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$, а $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$– сумма ряда Тейлора.

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x)\to 0$ (при $n\to\infty$). Если сделать это не просто, то следует каким-нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд Тейлора сходится к данной функции.

На практике часто пользуются следующей теоремой, которая дает простое достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 10.11. Если модули всех производных функций $f(x)$ ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом $M > 0$, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$, т. е. имеет место разложение (10.12).

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена нужно:

а) найти производные $f'(x), f''(x),\ldots f^{(n)}(x),\ldots$;

б) вычислить значения производных в точке $x_0 = 0$;

в) написать ряд для заданной функции и найти его интервал сходимости;

г) найти интервал $(-R;\ R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Маклорена совпадают.

Замечание. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n\to\infty$.

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),\tag{10.14а}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),\tag{10.14б}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),\tag{10.14в}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\qquad x\in(-1;1),\tag{10.14г}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\qquad x\in(-1;1],\tag{10.14д}$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ldots,\qquad x\in[-1;1],\tag{10.14е}$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\qquad x\in[-1;1],\tag{10.14ж}$$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),\tag{10.14з}$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty;\infty),\tag{10.14и}$$

Пример. Выписать ряд Маклорена функции $f(x)=\ln(4-x)$.

Решение: Так как

$$f(x)=\ln(4-x)=\ln 4+\ln\left[1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right],$$

то, воспользовавшись формулой (10.14д), в которой заменим x на $\left(-\frac{x}{4}\right)$, получим:

$$\ln(4-x)=\ln 4+\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3}-\ldots,$$

или

$$\ln(4-x)=\ln 4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots,$$

если $-1<-\frac{x}{4}\leq 1$, т. е. $-4\leq x<4$.

10.7. Приложения степенных рядов

Приближенное вычисление значений функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_1$ с заданной точностью $\varepsilon>0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R;\ R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

и $x_1\in(-R;\ R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, т.е.

$$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n+\ldots,$$

а приближенное – частичной сумме $S_n(x_1)$, т. е.

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n. Абсолютная погрешность этого приближенного равна модулю остатка ряда, т. е.

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1)=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+\ldots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1)-S_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)|=|u_{n+1}(x_1)+u_{n+2}(x_1)+u_{n+3}(x_1)+\ldots|<|u_{n+1}(x_1)|.$$

В остальных случаях (ряд знакопеременный или знакоположительный) составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти (подобрать) положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. В качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon>0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R;\ R)$ включит в себя отрезок $[a;\ b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Познакомимся с двумя способами решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y''=f(x;y;y'),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0}=y_0, \qquad y'\big|_{x=x_0}=y'_0.$$

Способ последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ уравнения ищем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий. Подставив в уравнение значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \ldots$ находим путем последовательного дифференцирования уравнения по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство. Ряд представляет искомое частное решение уравнения для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближенным решением дифференциального уравнения.

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения, если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = x^2 + y^2, \; y(-1) = 2, \; y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots$$

Здесь $y(-1) = 2, y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$

$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \ldots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22{,}5,$$

$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \ldots$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \ldots$$

Способ неопределенных коэффициентов

Этот способ приближенного решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \, y'(x_0) = y_0'$.

Предполагая, что коэффициенты $p_1(x), p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

с неопределенными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0, c_1 = y_0'$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и ее производных в уравнение, заменив в нем $p_1(x), p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределенных коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения.

Контрольные вопросы

1. Числовой ряд: определение, сходимость, свойства.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, «эталонные» ряды.
4. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признак Даламбера.
5. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: радикальный признак Коши.
6. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: интегральный признак Коши.
7. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
8. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
9. Понятие функционального и степенного рядов.
10. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Свойства степенных рядов.
12. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.
13. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена).
14. Приложение степенных рядов: приближенное вычисление значений функций.
15. Приложение степенных рядов: приближенное вычисление определенных интегралов.
16. Приложение степенных рядов: приближенное решение дифференциальных уравнений (способ последовательного дифференцирования).
17. Приложение степенных рядов: приближенное решение дифференциальных уравнений (способ неопределенных коэффициентов).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6
ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Задание № 1. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интегралы:

а) $\int\left(3^x - 5\cos x + \dfrac{4}{x^2+4} - \ln 2\right)dx,$

б) $\int\left(\dfrac{2}{x^2} - 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{7}{\cos^2 x}\right)dx.$

Решение.

а) Используя свойства неопределенного интеграла (свойства 3 и 4 лекции № 6), находим

$$\int\left(3^x - 5\cos x + \frac{4}{x^2+4} - \ln_2\right)dx = \int 3^x dx - \int 5\cos x dx + \int \frac{4}{x^2+4}dx - \int \ln 2 dx =$$

$$= \int 3^x dx - 5\int \cos x dx + 4\int \frac{1}{x^2+2^2}dx - \int \ln 2 dx = \{\text{Используем формулы табл. 6.1}\} =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} - 5\sin x + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} - \ln 2 \cdot x + C.$$

Ответ.

$$\int\left(3^x - 5\cos x + \frac{4}{x^2+4} - \ln 2\right)dx = \frac{3^x}{\ln 3} - 5\sin x + 2\cdot \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} - \ln_2 \cdot x + c.$$

б) Перепишем подынтегральную функцию в виде, удобном для применения табл. 6.1

$$\frac{2}{x^2} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{\cos^2 x} = 2\cdot x^{-2} - 3x^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{\cos^2 x}.$$

Снова, используя свойства 3 и 4 неопределенного интеграла и табл. 6.1, находим

$$\int\left(2x^{-2} - 5x^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx = \int 2x^{-2}dx - \int 3x^{\frac{2}{3}}dx + \int \frac{7}{\cos^2 x}dx =$$

$$=2\int x^{-2}dx-3\int x^{\frac{2}{3}}dx+7\int\frac{dx}{\cos^2 x}=2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-5\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+7\cdot\operatorname{tg}x+C=$$

$$=-\frac{2}{x}-3\cdot\sqrt[3]{x^5}+7\operatorname{tg}x+C.$$

Ответ. $\int\left(\frac{2}{x^2}-5\sqrt[3]{x^2}+\frac{7}{\cos^2 x}\right)dx=-\frac{2}{x}-3\sqrt[3]{x^5}+7\operatorname{tg}x+C.$

Задание № 2. Найти «почти табличные» интегралы

а) $\int(5x+3)^{24}dx,$

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$

Решение.

а) Для вычисления данного интеграла воспользуемся свойством 5 неопределенного интеграла. Имеем

$$f(x)=x^{24},\ a=5,\ b=3,\ \int x^{24}dx=\frac{x^{25}}{25}+C.$$

Следовательно, $\int(5x+3)^{24}dx=\frac{(5x+3)^{25}}{5\cdot 25}+C=\frac{(5x+3)^{25}}{125}+C.$

Ответ. $\int(5x+3)^{24}dx=\frac{(5x+3)^{25}}{125}+C.$

б) Поскольку $\sqrt{25-9x^2}=\sqrt{25-(3x)^2}$, то данный интеграл отличается от табличного $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}=\arcsin\frac{x}{5}+C,$ заменой x на $3x$.

Поэтому в соответствии со свойством 5 интеграла имеем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.$$

Ответ. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C.$

Задание № 3. Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

а) $\int\sin^3 x\cdot\cos x dx,$

б) $\int \frac{xdx}{25+x^4}$.

Решение:

а) Поскольку $\cos xdx = d\sin x$ и в подынтегральном выражении содержится выражение $\sin^3 x$, то целесообразно сделать замену $\sin x = t$. Тогда

$$\int \sin^3 x \cdot \cos xdx = \int t^3 dt = \{\text{Используем формулу 1 табл. 6.1}\} = \frac{t^4}{4} + C =$$

$$= \{\text{Подставляем вместо } t = \sin x\} = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Ответ. $\int \sin^3 x \cdot \cos xdx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

б) Поскольку $xdx = \frac{1}{2}dx^2$, а $25 + x^4 = 25 + (x^2)^2$, то целесообразно сделать замену $x^2 = t$.

Тогда

$$\int \frac{xdx}{25+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{5^2+t^2} = \{\text{Используем формулу 15 табл. 6.1}\} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C =$$

$$= \left\{\text{Подставляем } t = x^2\right\} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{5} + C.$$

Ответ. $\int \frac{xdx}{25+x^4} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{5} + C.$

Задание № 4. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

а) $\int (2x+3)\sin 3xdx$,

б) $\int x \cdot \operatorname{arctg} xdx$,

в) $\int \left(3x^2 - 5x + 2\right)e^{2x}dx$.

Решение.

а)

$$\int (2x+3)\sin 3xdx = \left\{\begin{matrix} u = 2x+3, & du = d(2x+3) = 2dx \\ dv = \sin 3xdx, & v = \int \sin 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin 3xd3x = -\frac{\cos 3x}{3} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{2x+3}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{2x+3}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\int \cos 3xd(3x) =$$

$$=-\frac{2x+3}{3}\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C.$$

Ответ. $\int(2x+3)\sin 3x dx=-\frac{2x+3}{3}\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C.$

б) Поскольку подынтегральная функция содержит обратную функцию arctg$x$, то при применении формулы интегрирования по частям (6.3) примем $u=\operatorname{arctg}x,\ dv=xdx,$ получим

$$\int x\cdot\operatorname{arctg}x dx=\left\{\begin{aligned}&u=\operatorname{arctg}x,\ du=\frac{dx}{1+x^2}\\&dv=xdx,\ v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{aligned}\right\}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\left\{\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\{\text{Используем формулы 1 и 15 табл. 6.1}\}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ. $\int x\operatorname{arctg}x dx=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C.$

в) Подынтегральная функция содержит полином второй степени $P_2(x)=3x^2-5x+2$ и функцию e^{2x}, поэтому в соответствии с правилом, указанным в параграфе 6.3 лекции № 6, примем $u=3x^2-3x+2,$ а $dv=e^{2x}dx,$ причем процедуру интегрирования по частям нужно провести дважды. Имеем

$$\int(3x^2-5x+2)e^{2x}dx=\left\{\begin{aligned}&u=3x^2-5x+2,\ du=(6x-5)dx\\&dv=e^{2x}dx,\qquad v=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}\end{aligned}\right\}=$$

$$=(3x^2-5x+2)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int(6x-5)e^{2x}dx=\left\{\begin{aligned}&u=6x-5,\ du=6dx\\&dv=e^{2x}dx,\ v=\frac{e^{2x}}{2}\end{aligned}\right\}=$$

$$=(3x^2-5x+2)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\left\{(6x-5)\frac{e^{2x}}{2}-3\int e^{2x}dx\right\}=$$

$$=(3x^2-5x+2)\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{4}(6x-5)e^{2x}+\frac{3}{4}e^{2x}+C=$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{2}+1-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)e^{2x}+C=\left(\frac{3x^2}{2}-4x+3\right)e^{2x}+C.$$

Ответ. $\int\left(3x^2-5x+2\right)e^{2x}dx=\left(\frac{3x^2}{2}-4x+3\right)e^{2x}+C.$

Задание № 5. Вычислить интегралы

а) $\int\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}dx,$

б) $\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}.$

Решение.

а) Так как числитель подынтегральной дроби полином первой степени (n = 1), а знаменатель – второй (m = 2), то дробь – правильная $(n<m)$. Разложим ее на сумму простейших дробей:

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, отсюда

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Приравниваем числители слева и справа $2x-3=A(x+2)+B(x-1)$. Находим коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов. Раскроем скобки в правой части последнего равенства и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$2x-3=(A+B)x+(2A-B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases}A+B=2,\\2A-B=-3.\end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{7}{3}$. Таким образом,

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}=-\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{\frac{7}{3}}{x+2},$$

и стало быть,

$$\int\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x+2}=\left\{\text{Применяем формулу }\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C\right\}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C.$$

Ответ. $\int\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}dx=-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C.$

б) Подынтегральная дробь правильная, так как числитель дроби – полином первой степени, а знаменатель – третьей $(3>1)$. Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приводим дробь в правой части этого равенства к общему знаменателю, получим

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A(x^2+4)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2+4)}.$$

Приравниваем числитель слева и справа:

$$x=A(x^2+4)+Bx(x+1)+C(x+1).$$

Для определения неизвестных коэффициентов A, B и C используем метод частных значений. Положим $x=-1$, тогда $-1=5\cdot A\Rightarrow A=-\frac{1}{5}$.

Аналогично, положим $x=0$, тогда $0=4A+C=-\frac{4}{5}+C\Rightarrow C=\frac{4}{5}$.

Осталось найти коэффициент B. Поскольку «удобных» частных значений не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам.

Пусть $x=1$, тогда получим

$$1=5\cdot A+2\cdot B+2\cdot C\Rightarrow 1=-1+2B+\frac{8}{5}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(2-\frac{8}{5}\right)=\frac{1}{5},$$

итак,

$$\frac{x}{(x+1)\left(x^2+4\right)}=\frac{-\frac{1}{5}}{x+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+4}{x^2+4},$$

тогда

$$\int\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{10}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+2^2}=$$

= {Используем формулы 2 и 15 табл. 6.1} =

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Ответ. $\int\frac{x}{(x+1)\left(x^2+4\right)}dx=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln\left|x^2+4\right|+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

Задание № 6. Найти интегралы от тригонометрических функций.

а) $\int\frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$,

б) $\int\cos^4x\cdot\sin^2 xdx$.

Решение.

а) Для вычисления данного интеграла воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Подставляем в подынтегральное выражения $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, получим

$$\int\frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}-\frac{3\cdot 2t}{1+t^2}-5}=\int\frac{2dt}{4(1-t^2)-6t-5(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4-4t^2-6t-5-5t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=-\int\frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=-\int(t-2)^{-2}d(t-2)=-\frac{(t-2)^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{t-2}+C=\left(t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+C.$$

Ответ. $\int \frac{dx}{4\cos - 3\sin x - 5} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C.$

б) Сначала упрощаем подынтегральное выражение, используя формулы понижения степени:

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^2 x (\cos x \cdot \sin x)^2 =$$

$$= \left\{ \cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2},\ \cos x \cdot \sin x = \frac{\sin 2x}{2} \right\} = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \frac{\sin^2 2x}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx =$$

$$= \left\{ \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2};\ \ t = \sin(2x) \Rightarrow dt = 2\cos 2x dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int t^2 dt = \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x dx\right) + \frac{t^3}{48} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + \frac{\sin^3 2x}{48} + C = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C.$$

Ответ. $\int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C.$

Задание № 7. Найти интегралы от иррациональных функций

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$,

б) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2} dx}{x}$.

Решение.

а) В подынтегральном выражении есть корни второй и третьей степени от *x*, поэтому делаем подстановку $x = t^6$ (6 – наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Отсюда $dx = 6t^5 dt$ и значит,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt = 6\int \frac{t^3+1}{t+1} dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{t+1} dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = 6\int (t^2 - t + 1) dt - 6\ln|t+1| =$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln|t+1|+C=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$= \{$Подставляем $t=\sqrt[6]{x}\}$ $= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

Ответ. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$

б) Чтобы избавить от радикала в подынтегральном выражении, воспользуемся подстановкой $x=3\sin t$. Тогда $dx=3\cos t dt$ и $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\sqrt{1-\sin^2 t}=3\cos t.$

Сделаем замену переменной в неопределенном интеграле.

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx=\int\frac{3\cos t\cdot 3\cos t dt}{3\sin t}=3\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=3\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=$$

$$=3\int\frac{dt}{\sin t}-3\int\sin t dt=3\int\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}+3\cos t=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\cos^2\frac{t}{2}}+3\cos t=$$

$$=3\int\frac{d\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}+3\cos t=3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+3\cos t+C=3\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|+3\cos t+C=$$

$=3\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-9\sin^2 t}}{3\sin t}\right|+3\cos t+C=$ {Возвращаемся к переменной x, подставляя $3\sin t=x$} $=3\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-x^2}+C.$

Ответ. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx=3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-x^2}+C.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интегралы:

а) $\displaystyle\int\left(3\sin x+\frac{7}{x}-\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}+e^2\right)dx,$

б) $\int\left(4x\sqrt{x^3}-\frac{6}{x^3}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx.$

Ответы.

а) $\int\left(3\sin x+\frac{7}{x}-\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}+e^2\right)dx=-3\cos x+7\ln|x|-5\arcsin\frac{x}{3}+e^2\cdot x+C,$

б) $\int\left(4x\sqrt{x^3}-\frac{6}{x^3}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{8}{7}\sqrt{x^7}+\frac{3}{x^2}-3\operatorname{ctg}x+C.$

2. Найти «почти табличные» интегралы.

а) $\int\frac{dx}{(2x-1)^7},$

б) $\int\frac{dx}{16x^2+9}.$

Ответы. а) $\int\frac{dx}{(2x-1)^7}=-\frac{1}{12(2x-1)^6}+C,$ б) $\int\frac{dx}{16x^2+9}=\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{4x}{3}+C.$

3. Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

а) $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx,$ б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^6}}.$

Ответы. а) $\int\frac{\ln^5 x}{x}dx=\frac{\ln^6 x}{6}+C,$ б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^6}}=\arcsin\frac{x^3}{3}+C.$

4. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int(7x+4)e^{-2x}dx,$

б) $\int x\ln x dx,$

в) $\int\left(x^2-5x+6\right)\cos\frac{x}{2}dx.$

Ответы. а) $\int(7x+4)e^{-2x}dx=-\frac{1}{4}(14x+15)e^{-2x}+C,$

б) $\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C,$

в) $\int\left(x^2-5x+6\right)\cos\frac{x}{2}dx=2\left(x^2-5x-2\right)\sin\frac{x}{2}+4(2x-5)\cos\frac{x}{2}+C.$

5. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx$,

б) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

Ответы. а) $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx = 5\ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C$,

б) $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

6. Найти интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1}$, б) $\int \sin^4 4x dx$.

Ответы. а) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + C$,

б) $\int \sin^4 4x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 16x}{128} + C$.

7. Найти интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

Ответы. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x+1} + C$,

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Задание № 1. Используя формулу Ньютона – Лейбница, найти интегралы:

а) $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x)dx$,

б) $\int_0^2 x\sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $f(x)=2x+\sin 2x$ на отрезке $[0;\pi]$ имеет первообразную $F(x)=x^2-\dfrac{\cos 2x}{2}$. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница (7.3) имеем

$$\int_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx=\left(x^2-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\left(\pi^2-\frac{\cos 2\pi}{2}\right)-\left(0^2-\frac{\cos 0}{2}\right)=\pi^2.$$

Ответ. $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)dx=\pi^2.$

б) Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной воспользуемся приемом заноса под знак дифференциала

$$\int_0^2 x\sqrt{9-\frac{9x^2}{4}}dx=-\frac{2}{9}\int_0^2\left(9-\frac{9x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(9-\frac{9x^2}{4}\right)=-\frac{2}{9}\,\frac{\left(9-\frac{9x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{4}{3}\left(9-\frac{9x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=-\frac{4}{3}\left(9-\frac{9\cdot 2^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}\left(9-\frac{9\cdot 0^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}=36.$$

Ответ. $\int\limits_0^2 x\sqrt{9-\dfrac{9x^2}{4}}dx=36.$

Задание № 2. Найти интеграл от рациональной дроби $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{x^3+x}$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Для нахождения первообразной используем правила, примененные в предыдущем занятии. Для этого разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей.

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\Rightarrow A(x^2+1)+Bx^2+Cx=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 & A=1\\ C=0 & \Rightarrow B=-1\\ A=1 & C=0\end{cases}$$

Итак, $\dfrac{1}{x^3+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$.

Первое слагаемое имеет табличный интеграл, а второе – «почти табличный», легко вычисляется после внесения x под знак дифференциала. Поэтому

$$\int_1^3 \frac{1}{x^3+x}dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \ln x\Big|_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$$

$$= \ln 3 - \ln 1 - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^3 = \ln 3 - \frac{1}{2}\left(\ln(10) - \ln 2\right) = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$$

Ответ. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x} = \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5.$

Задание № 3. Вычислить интегралы с помощью замены переменной.

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$,

б) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos x}$.

Решение.

а) Применим подстановку $\sqrt{5-4x} = t.$ Тогда

$$5-4x = t^2 \Rightarrow x = \frac{5-t^2}{4},\ dx = -\frac{tdt}{2}.$$

Находим новые пределы интегрирования:

x	-1	1
$t=\sqrt{5-4x}$	3	1

Применяя формулу (7.5), получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{\frac{5-t^2}{4}\left(-\frac{t}{2}\right)dt}{t} = -\frac{1}{8}\int_3^1 \left(5-t^2\right)dt = \frac{1}{8}\int_1^3 \left(5-t^2\right)dt = \frac{1}{8}\left(5t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{8}\left(5\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) -$$

$$-\frac{1}{8}\left(5\cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{8}(15-9) - \frac{1}{8}\left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{7}{12} = \frac{1}{6}.$$

Ответ. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \frac{1}{6}.$

б) Помножим $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t.$ Тогда получаем $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Находим новые пределы интегрирования:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	0	1

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+3\cos x}=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+3(1-t^2)}{1+t^2}}=2\int_0^1\frac{dt}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}=2\int_0^1\frac{dt}{2t^2+8}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+3\cos x}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

Задание № 4. При помощи формулы интегрирования по частям вычислить интегралы

а) $\int_0^{2\pi}(2x-5)\cos\frac{x}{2}dx,$

б) $\int_0^1\arcsin x dx.$

Решение.

а) Так как подынтегральная функция имеет вид $P(x)\cos(kx)$ (см. параграф 6.3 лекции № 6), то полагаем $u=2x-5,\ dv=\cos\frac{x}{2}dx.$ Тогда $du=2dx,\ v=2\sin\frac{x}{2}.$ По формуле (7.6) находим

$$\int_0^{2\pi}(2x-5)\cos\frac{x}{2}dx=2(2x-5)\sin\frac{x}{2}\bigg|_0^{2\pi}-4\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx=$$

$$=2(4\pi-5)\sin\pi-2(0-5)\sin 0+8\cos\frac{x}{2}\bigg|_0^{2\pi}=8\cos\pi-8\cos 0=-8-8=-16.$$

Ответ. $\int_0^{2\pi}(2x-5)\cos\frac{x}{2}dx=-16.$

б) Поскольку подынтегральная функция имеет вид $P(x)\arcsin(kx)$ (см. параграф 6.3 лекции № 6), то полагаем $u=\arcsin x,\ dv=dx.$ Тогда $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=x$. По формуле (7.6) имеем

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x\cdot\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

= { Применяем прием заноса под знак дифференциала} =

$$=1\cdot\arcsin 1-0\cdot\arcsin 0+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}+(0-1)=\frac{\pi}{2}-1.$$

Ответ. $\int_0^1 \arcsin x dx=\dfrac{\pi}{2}-1.$

Задание № 5. Найти площади фигур, ограниченных линиями.

а) $y=32-x^2,\ y=-4x,$

б) $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

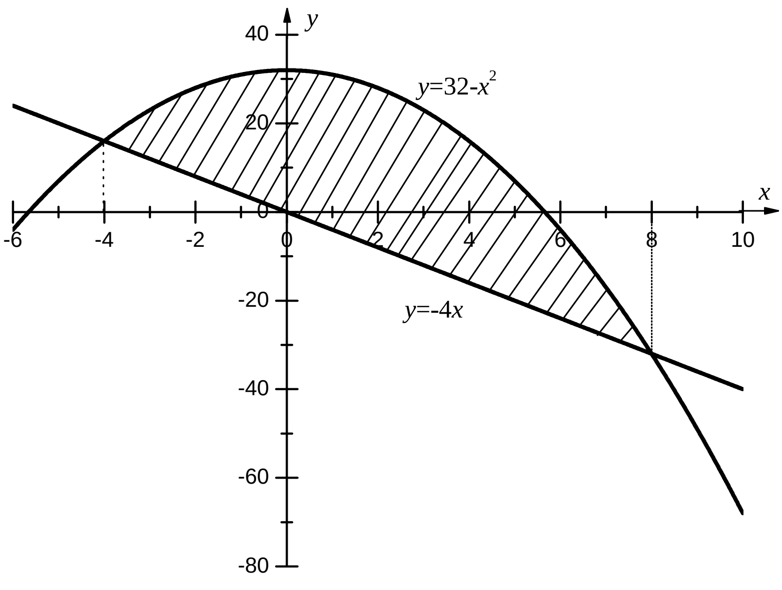


Рис. 1

Решение. а) Фигура имеет вид, изображенный на рис. 1. Прежде чем находить площадь фигуры, найдем абсциссы точек пересечения графиков (x_1 и x_2 на рисунке). Для этого решаем уравнение

$$32-x^2=-4x \Rightarrow x^2-4x-32=0 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=8.$$

По формуле (7.8) находим площадь фигуры

$$S=\int_{-4}^{8}(32-x^2-(-4x))dx=\int_{-4}^{8}(32-x^2+4x)dx=\left(32x-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_{-4}^{8}=$$

$$=32\cdot 8-\frac{8^3}{3}+2\cdot 8^2-\left(32(-4)-\frac{(-4)^3}{3}+2(-4)^2\right)=288.$$

Ответ. $S=288$.

б) Линия задана в полярной системе координат. На рис. 2 показана фигура, площадь которой требуется найти. Фигура симметрична относительно вертикальной оси, поэтому можно найти площадь правой половины и затем ее умножить на 2.

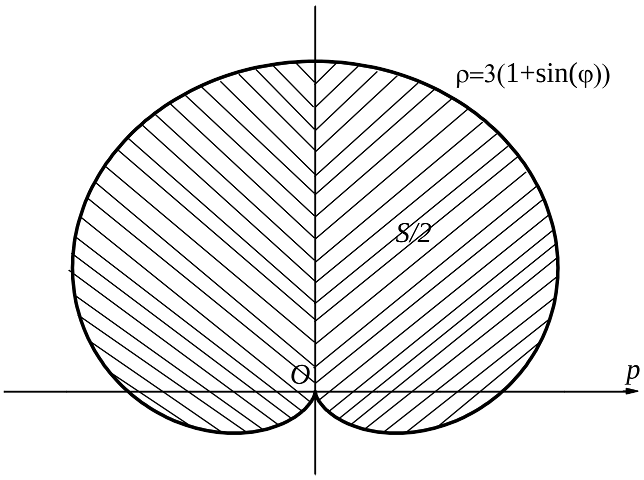


Рис. 2

Для правой половинки $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. По формуле (7.11) находим искомую площадь фигуры

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3(1+\sin\varphi))^2d\varphi=\frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)d\varphi=9\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2\varphi)d\varphi=$$

$=\{$Применяем формулу понижения порядка $\sin^2\varphi=\frac{1-\cos2\varphi}{2}\}=$

$$=9\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=9\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=\frac{27}{2}9\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{9}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos2\varphi d\varphi=$$

$$= \frac{27}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{2}\frac{\pi}{2} - 0 - \left(\frac{9}{4}\sin\pi - \frac{9}{4}\sin 0\right) = \frac{27\pi}{4},$$

следовательно, $S = \frac{27\pi}{2}$.

Ответ. $S = \frac{27\pi}{2}.$

Задание № 6. Найти длины дуг кривых.

а) $y = \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6},$

б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

Решение.

а) Изобразим часть графика функции $y = \ln\cos x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ (см. рис. 3).

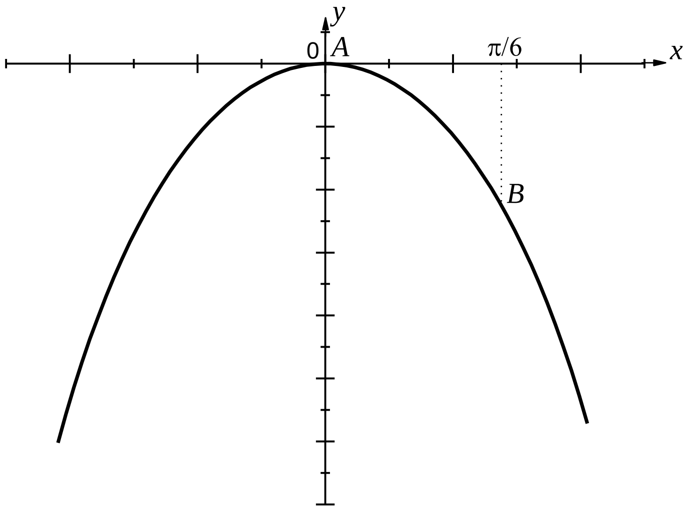


Рис. 3

Воспользуемся формулой (7.12), предварительно найдя выражение $\sqrt{1+(y')^2}$:

$$y = \ln\cos x,\ y' = -\frac{\sin x}{\cos x},\ \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x},$$

так как $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ (здесь $\cos x > 0$). Находим длину l дуги AB:

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(2-\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|\Bigg|_0^{\pi/6}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/6}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=$$

$$=\ln\sqrt{3}-\ln 1=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Ответ. $l=\frac{\ln 3}{2}$.

б) Находим x'_t и y'_t.

$$x'_t=1-\cos t,\ y'_t=\sin t.$$

Вычисляем $\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}$.

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}=\sqrt{2(1-\cos t)}=$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}=2\sin\frac{t}{2}=2\sin\frac{t}{2},\ \text{так как}\ t\in[0;2\pi]\ \left(\text{Здесь}\ \sin\frac{t}{2}\geq 0\right).$$

Находим длину дуги по формуле (7.14):

$$l=2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4(\cos\pi-\cos 0)=4.$$

Ответ. $l=4$.

Задание № 7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ x=1,\ x=3,\ y=0,$ вокруг оси Ox.

Решение. Изобразим плоскую фигуру, ограниченную заданными линиями (см. рис. 4), и тело, образованное ее вращением.

По формуле (7.17) находим объем

$$V=\pi\int\limits_1^3\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2}=-\frac{16\pi}{x}\Bigg|_1^3=16\pi\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{32\pi}{3}.$$

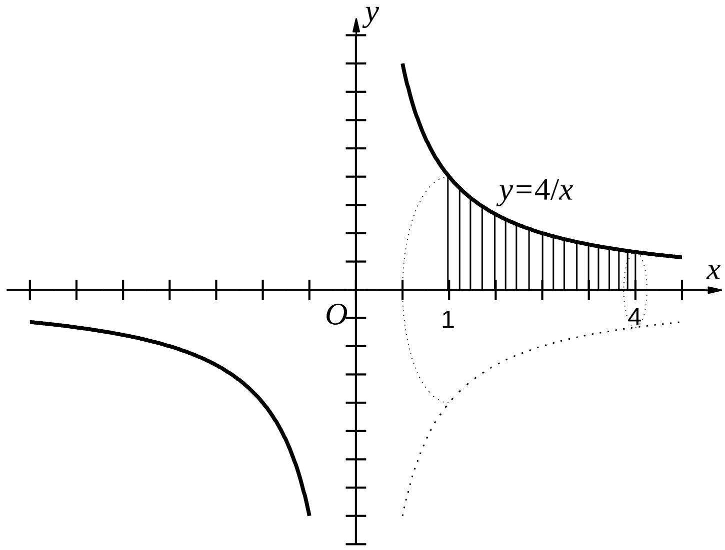


Рис. 4

Ответ. $V = \dfrac{32\pi}{3}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя формулу Ньютона – Лейбница, найти интегралы

а) $\int\limits_0^2 \left(x^2 + 3^x\right)dx,$

б) $\int\limits_1^e \dfrac{\sin \ln x}{x} dx.$

Ответы. а) $\int\limits_0^2 \left(x^2 + 3^x\right)dx = \dfrac{8}{3} + \dfrac{8}{\ln 3}$; б) $\int\limits_1^e \dfrac{\sin \ln x}{x} dx = 1 - \cos 1.$

2. Найти интеграл от рациональной дроби.

$$\int\limits_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx.$$

Ответ. $\int\limits_2^3 \dfrac{x^2+1}{x^3-x} dx = \ln \dfrac{16}{9}.$

3. Вычислить интегралы с помощью замены переменной

а) $\int\limits_1^9 \dfrac{xdx}{\sqrt{2x+7}},$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Ответы. а) $\int\limits_1^9 \frac{xdx}{\sqrt{2x+7}} = \frac{28}{3}$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} = \frac{1}{5}\ln\frac{8}{3}$.

4. При помощи формулы интегрирования по частям вычислить интегралы.

а) $\int\limits_0^{\pi} (3x+4)\sin x dx$,

б) $\int\limits_1^{e} x\ln x dx$.

Ответы. а) $\int\limits_0^{\pi} (3x+4)\sin x dx = 3\pi+8$, б) $\int\limits_1^{e} x\ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$.

5. Найти площади фигур, ограниченных линиями

а) $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 2x + 3$,

б) $\rho = a\sin 3\varphi$.

Ответы. а) $S = 9$; б) $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

6. Найти длины дуг кривых

а) $y = 1 - \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 3$,

б) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$

Ответы. а) $l = \operatorname{sh} 3$, б) $l = 4$.

7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 6x$, $x = 3$, $x = 5$ вокруг оси OX.

Ответ. $V = 48\pi$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задание № 1. Найти и изобразить область определения функции $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Найти множество значений функции и линии уровня.

Решение. Поскольку выражение, стоящее под корнем, должно удовлетворять условию $4-x^2-y^2\ge 0$, то областью определения является замкнутый круг с центром в начале координат и радиуса $R=2$: $x^2+y^2\le 2^2$. Область определения изображена на рис. 5. Данная функция определяет уравнение верхней полусферы (см. рис. 5). Линиями уровня являются окружности. Действительно, полагаем

$$z=c\Rightarrow\sqrt{4-x^2-y^2}=c\Rightarrow 4-x^2-y^2=c^2\Rightarrow x^2+y^2=4-c^2.$$

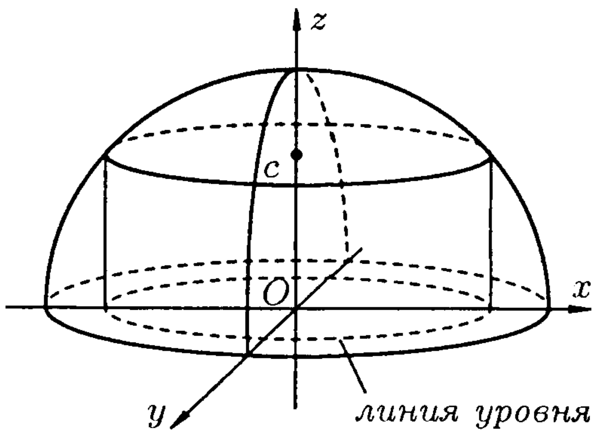


Рис. 5

При этом должно выполняться условие $0\le c\le 2$. Отсюда, в частности, следует и то множество значений функции – отрезок $z\in[0;2]$.

Ответ: Область определения функции – круг радиуса 2 и с центром в точке (0, 0); линии уровня окружности $x^2+y^2=4-c^2, 0\le c\le 2$; область значения – отрезок $[0;2]$.

Задание № 2. Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал заданных функций:

а) $z=x^3+3xy^2+\dfrac{5}{x^2y}$,

б) $z=e^{x^2+y^2}$.

Решение.

а) Для того, чтобы найти частную производную по x, фиксируем y и дифференцируем заданную функцию одной переменной x. Используя формулу для производной степенной функции $\left(\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}\right)$, получим

$$z'_x = \left(x^3\right)' + 3(x)' y^2 + \frac{5}{y}\left(x^{-2}\right)' = 3x^2 + 3y^2 - \frac{10}{x^3 y}.$$

Для того чтобы найти частную производную по y, фиксируем x и дифференцируем заданную функцию z как функцию одной переменной y. Снова, используя формулу для производной степенной функции, получим

$$z'_y = 3x\left(y^2\right)' + \frac{5}{x^2}\left(y^{-1}\right)' = 6xy - \frac{5}{x^2 y^2}.$$

Полный дифференциал функции найдем по формуле (8.3):

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \left(3x^2 + 3y^2 - \frac{10}{x^3 y}\right)dx + \left(6xy - \frac{5}{x^2 y^2}\right)dy.$$

Ответ.

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - \frac{10}{x^3 y}, \quad z'_y = 6xy - \frac{5}{x^2 y^2},$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \left(3x^2 + 3y^2 - \frac{10}{x^3 y}\right)dx + \left(6xy - \frac{5}{x^2 y^2}\right)dy.$$

б) При нахождении частных производных в заданном примере, снова пользуемся правилом, описанным в предыдущем примере, а также правилом дифференцирования сложной функции. Имеем

$$z'_x = \left(e^{x^2+y^2}\right)'_x = e^{x^2+y^2}\left(x^2 + y^2\right)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \left(e^{x^2+y^2}\right)'_y = e^{x^2+y^2}\left(x^2 + y^2\right)'_y = 2ye^{x^2+y^2},$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy).$$

Ответ. $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$, $dz = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$.

Задание № 3. Найти частные производные до второго порядка включительно и дифференциал второго порядка заданных функций.

а) $z = 2x^2\sqrt{y} + \dfrac{6}{x^3y^2} - y^3$,

б) $z = e^{xy}$.

Решение.

а) Находим частные производные первого порядка, руководствуясь правилом, указанным в задании № 2,

$$z'_x = 2\left(x^2\right)'\sqrt{y} + \frac{6}{y^2}\left(x^{-3}\right)' = 4x\sqrt{y} - \frac{18}{y^2x^4},$$

$$z'_y = 2x^2\left(\sqrt{y}\right)' + \frac{6}{x^3}\left(y^{-2}\right)' - \left(y^3\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{y}} - \frac{12}{x^3y^3} - 3y^2.$$

Частную производную второго порядка z''_{xy} вычисляем, дифференцируя z'_x по y (при фиксированном x), т. е.

$$z''_{xy} = \left(4x\sqrt{y} - \frac{18}{y^2x^4}\right)_y = 4x\left(\sqrt{y}\right)' - \frac{18}{x^4}\left(y^{-2}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{y}} + \frac{36}{x^4y^3}.$$

Частную производную второго порядка z''_{xy} вычисляем, дифференцируя z'_y по x (при фиксированном y), т. е.

$$z''_{yx} = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y}} - \frac{12}{x^3y^3} - 3y^2\right)'_x = \frac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{y}} - \frac{12}{y^3}\left(x^{-3}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{y}} + \frac{36}{x^4y^3}.$$

Частную производную второго порядка z''_{yy} вычисляем, дифференцируя z'_y по y (при фиксированном x) т. е.

$$z''_{yy} = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y}} - \frac{12}{x^3y^3} - 3y^2\right)_y = x^2\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{12}{x^3}\left(y^{-3}\right) - 3\left(y^2\right)' = -\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}} + \frac{36}{x^3y^4} - 6y.$$

Дифференциал второго порядка d^2z находим по формуле (8.4):

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dx \cdot dy + z'''_{yy}dy^2 = \left(4\sqrt{y} + \frac{72}{x^5y^2}\right)dx^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{2x}{\sqrt{y}} + \frac{36}{x^4y^3}\right)dxdy + \left(-\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}} + \frac{36}{x^3y^4} - 6y\right)dy^2.$$

Ответ. $z''_{xx} = 4\sqrt{y} + \dfrac{72}{x^5y^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{2x}{\sqrt{y}} + \dfrac{36}{x^4y^3}$,

$$z''_{yy} = -\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}} + \frac{36}{x^3y^4} - 6y,$$

$$d^2z = \left(4\sqrt{y} + \frac{72}{x^5y^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{2x}{\sqrt{y}} + \frac{36}{x^4y^3}\right)dxdy + \left(-\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}} + \frac{36}{x^3y^4} - 6y\right)dy^2.$$

б) Заданная функция является сложной, поэтому используем правило дифференцирования сложной функции

$$z'_x = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy}(xy)'_x = ye^{xy},$$

$$z'_y = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy}(xy)'_y = xe^{xy},$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(ye^{xy}\right)'_x = y\left(e^{xy}\right)'_x = y\left(e^{xy}\right)'_x = ye^{xy}(xy)'_x = y^2e^{xy},$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(ye^{xy}\right)'y = (y)'e^{xy} + y\left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} + ye^{xy}(xy)'_y = (1+xy)e^{xy},$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(xe^{xy}\right)'_x = (x)'e^{xy} + x\left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} + xe^{xy}(xy)'_x = (1+xy)e^{xy},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(xe^{xy}\right)'_y = x\left(e^{xy}\right)'_y = x\left(e^{xy}\right)'_y = xe^{xy}(xy)'_y = x^2e^{xy},$$

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dx\cdot dy + z''_{yy}dy^2 = y^2e^{xy}dx^2 + 2(1+xy)e^{xy}dxdy + x^2e^{xy}dy^2.$$

Ответ. $z''_{xx} = y^2e^{xy}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = (1+xy)e^{xy}$,

$z''_{yy} = x^2e^{xy}$, $d^2z = y^2e^{xy}dx^2 + 2(1+xy)e^{xy}dxdy + x^2e^{xy}dy^2$.

Задание № 4. Вычислить приближенно $1{,}04^{2{,}03}$.

Решение. Число $1{,}04^{2{,}03}$ есть частное значение функции $z(x,y) = x^y$ при $x = 1{,}04$, $y = 2{,}03$. Известно, что $z(1,2) = 1^2 = 1$. Принимаем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 0{,}04$, $\Delta y = y - y_0 = 0{,}03$.
Значение $z(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$ вычислим при помощи формулы

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Имеем

$$z'_x=\left(x^y\right)'_x=yx^{y-1},\ z'_y=\left(x^y\right)'_y=x^y\ln x,\ z'_x(1{,}2)=2\cdot 1^1=2,\ z'_y(1{,}2)=1^2\ln 1=0.$$

$$dz(1{,}2)=2\cdot 0{,}04+0\cdot 0{,}03=0{,}08.$$

Таким образом, $1{,}04^{2{,}03}\approx 1+0{,}08=1{,}08.$

Ответ. $1{,}04^{2{,}03}\approx 1{,}08.$

Задание № 5. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z=xy+\frac{y}{x}$, если $x=e^{2t},\ y=\ln(t^2+1)$.

Решение. Действуем, согласно формуле (8.6):

$$z'_x=\left(xy+\frac{y}{x}\right)'_x=y-\frac{y}{x^2},$$

$$z'_y=\left(xy+\frac{y}{x}\right)'_y=x+\frac{1}{x},$$

$$\frac{dx}{dt}=2e^{2t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}.$$

Подставляем найденные выражения для производных в формулу (8.6), получаем

$$\frac{dz}{dt}=z'_x\cdot\frac{dx}{dt}+z'_y\frac{dy}{dt}=\left(y-\frac{y}{x^2}\right)\cdot 2e^{2t}+\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{2t}{t^2+1}.$$

Можно ответ оставить в таком виде, а можно заменить x и y через t (в зависимости от того, что проще). Ответ оставим в таком виде.

Ответ. $\frac{dz}{dt}=2y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{2t}+\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{2t}{t^2+1}.$

Задание № 6. Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy,\ v=\frac{x}{y}$.

Решение. Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\left(u^2+v^2\right)'_u}{u^2+v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\left(u^2+v^2\right)'_u}{u^2+v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(xy)_x{}'=y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=(xy)_y{}'=x,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)_x{}',\ \frac{\partial v}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)_y{}'=-\frac{x}{y^2}.$$

Подставляем полученные результаты в формулы (8.5), и получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot y+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot x+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Ответ. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2u}{u^2+v^2}\cdot y+\dfrac{2v}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{1}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot x+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),\ \text{где } u=x\cdot y,\ v=\frac{x}{y}.$$

Задание № 7. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x+y=e^{x-y}$.

Решение. В данном примере $F(x,y)=x+y-e^{x-y}$. Вычисляем ее частные производные:

$$F'_x=1-e^{x-y},\ F'_y=1+e^{x-y}.$$

Находим y' по формуле (8.7):

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=\frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}.$$

Ответ. $y'=\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}.$

Задание № 8. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M_0.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0,\ \ M_0(4{,}3{,}4).$$

Решение. Уравнение поверхности имеет вид $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}$. Находим частные производные F'_x, F'_y и F'_z в точке $M_0(4{,}3{,}4)$:

$$F'_x = \frac{x}{8}, \quad F'_x(4{,}3{,}4) = \frac{1}{2};$$

$$F'_y = \frac{2y}{y}, \quad F'_y(4{,}3{,}4) = \frac{2}{3};$$

$$F'_z = -\frac{z}{4}, \quad F'_z(4{,}3{,}4) = -1.$$

Подставляя найденные значения в уравнения (8.9) и (8.10), получим уравнение касательной плоскости

$$\frac{1}{2}(x-4) + \frac{2}{3}(y-3) - (z-4) = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 6z = 0$$

и уравнение нормали

$$\frac{x-4}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{2}{3}} = \frac{z-4}{-1} \Rightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ответ. Уравнение касательной к плоскости: $3x + 4y - 6z = 0.$ Уравнение нормали: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{-6}.$

Задание № 9. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Решение. Вычисляем частные производные

$$z'_x = 3x^2 - 2x - 2y, \quad z'_y = 3y^2 - 2x - 2y.$$

Приравниваем найденные частные производные к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которой находим стационарные точки,

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2y = 0, \\ 3y^2 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Получаем два решения: $x_1 = 0, y_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{4}{3}, y_2 = \dfrac{4}{3}.$ Следовательно, стационарные точки функции $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$: $M_1(0{,}0)$ и $M_2\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right).$

Вычисляем производные второго порядка

$$z''_{xx} = 6x - z,\ z''_{xy} = -2,\ z''_{yy} = 6y - 2.$$

В каждой стационарной точке вычисляем выражение

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$$

и определяем его значение.

В точке $M_1(0{,}0)$

$$z''_{xx}(0{,}0) = -2,\ z''_{yy}(0{,}0) = -2, \quad z''_{yy}(0{,}0) = -2 \Rightarrow z''_{xx} z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 2 > 0.$$

Следовательно, точка $M_1(0{,}0)$ является точкой экстремума. Так как $z''_{xx}(0{,}0) = -2 < 0,$ то $M_1(0{,}0)$ – точка максимума.

В точке $M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$z''_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 6,\ z''_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -2,\ z''_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 6 \Rightarrow z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 32 > 0.$$

Следовательно, точка $M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ также является точкой экстремума. Так как $z''_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) > 0,$ то $M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – точка минимума.

Ответ. Функция $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$ имеет две стационарные точки: $M_1(0{,}0)$ – точка максимума, $z_{\max} = z(0{,}0) = 0$; точка $M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – точка минимума, $z_{\min} = z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал заданных функций.

а) $z = x^2 - 5x^3 y + \frac{7}{xy^3},$

б) $z = \mathrm{arctg}(xy).$

Ответы.

а) $z'_x = 2x - 15x^2 y - \frac{7}{x^2 y^3},\ z'_y = -5x^3 - \frac{21}{xy^4},$

$$dz=\left(2x-15x^2y-\frac{7}{x^2y^3}\right)dx+\left(-5x^3-\frac{21}{xy^4}\right)dy.$$

б) $z'_x=\dfrac{y}{1+x^2y^2},\ z'_y=\dfrac{x}{1+x^2y^2},\ dz=\dfrac{ydx+xdy}{1+x^2y^2}.$

2. Найти частные производные до второго порядка включительно и дифференциал второго порядка заданных функций.

а) $z=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{y^2}}-\dfrac{\sqrt{x^3}}{2y}+2x^5,$

б) $z=\left(x^2+y^2\right)^3.$

Ответы.

а)

$$z''_{xx}=-\frac{3}{8\sqrt{xy}}+40x^3,\ z''_{xy}=z''_{yx}=-\frac{2}{\sqrt[3]{y^5}}+\frac{3\sqrt{x}}{4y^2},\ z''_{yy}=\frac{10x}{3\sqrt[3]{y^8}}-\frac{\sqrt{x^3}}{y^3},$$

$$d^2z=\left(-\frac{3}{8\sqrt{xy}}+40x^3\right)dx^2+2\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{y^5}}+\frac{3\sqrt{x}}{4y^2}\right)dxdy+\left(\frac{10x}{3\sqrt[3]{y^8}}-\frac{\sqrt{x^3}}{y^3}\right)dy^2.$$

б)

$$z''_{xx}=6\left(x^2+y^2\right)\left(5x^2+y^2\right),\ z''_{xy}=z''_{yx}=24xy\left(x^2+y^2\right),\ z''_{yy}=6\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+5y^2\right),$$

$$d^2z=6\left(x^2+y^2\right)\left[\left(5x^2+y^2\right)dx^2+8xydxdy+\left(x^2+5y^2\right)dy^2\right]$$

3. Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

Ответ. $1{,}07^{3{,}97}\approx 1{,}28.$

4. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$ функции $z=x^4+y^4-4x^2y^2$, если $x=\operatorname{tg}t,\ y=\ln t.$

Ответ. $\dfrac{dz}{dt}=\left(4x^3-8xy^2\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}+\left(4y^3-8x^2y\right)\cdot\dfrac{1}{t}.$

5. Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, где $u=x\sin y,\ v=x\cos y.$

Ответ. $z'_x=\dfrac{v}{u^2+v^2}\sin y-\dfrac{u}{u^2+v^2}\cos y,$

$$z'_y = \frac{v}{u^2+v^2} x\cos y - \frac{u}{u^2+v^2} x\sin y.$$

6. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.

Ответ. $y' = \dfrac{y\left(2x + e^{xy} - \cos xy\right)}{x\left(\cos xy - e^{xy} - x\right)}$.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M_0.

$$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8, \quad M_0(2,2,1).$$

Ответ. Уравнение касательной плоскости: $x + y - 4z = 0$. Уравнение нормали $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$.

8. Исследовать на экстремум функцию.

$$z = x^3 + y^3 - 15xy.$$

Ответ. $M_1(0, 0)$, $M_2(5, 5)$ – стационарные точки. В точке $M_1(0, 0)$ экстремума нет. $M_2(5, 5)$ – точка минимума, $z_{\min} = z(5,5) = -125$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9
РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание № 1. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$ydx + \left(1 + x^2\right)dy = 0.$$

Решение. Считая, что $y \neq 0$, умножаем обе части уравнения на функцию $\dfrac{1}{y(1+x^2)}$ и таким образом разделяем переменные в уравнении:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Интегрируем обе части уравнения, имеем

$$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{y} = C \Rightarrow \operatorname{arctg} x + \ln|y| = C.$$

При делении на $y(1+x^2)$ мы потеряли особое решение $y = 0$.

Ответ. Общее решение дифференциального уравнения $\operatorname{arctg} x + \ln|y| = C.$ Особое решение $y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$xy' - \frac{y}{\ln x} = 0,\ y(e) = 1.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перепишем уравнение в виде $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\ln x}$. Разделяем переменные, получаем $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x\ln x}$. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \ln|y| = \int\frac{d\ln x}{\ln x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\ln x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|C\cdot\ln x| \Rightarrow y = C\cdot\ln x$$

– общее решение. Подставляем в найденное общее решение $x = e,\ y = 1$ (используем начальное условие), находим постоянную C. А именно:

$$1 = C\cdot\ln e = C \Rightarrow C = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = \ln x$.

Ответ. Частное решение $y = \ln x$.

Задание № 3. Решить однородное дифференциальное уравнение

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. Преобразуем данное дифференциальное уравнение к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$: $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ (мы разделили обе части уравнения на x). Полагаем $y = u\cdot x,$ тогда $y' = u'\cdot x + u.$

Подставляем значение y и y' в данное уравнение, приходим к уравнению с разделяющимися переменными.

$$u'\cdot x + u = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'\cdot x = \sqrt{1+u^2}\ .$$

Разделяем переменные $(x \neq 0)$: $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = \ln x + \ln C \Rightarrow u+\sqrt{1+u^2} = C \cdot x.$$

Заменяя u на $\dfrac{y}{x}$, получаем $y+\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot x^2$.

Ответ. Общий интеграл уравнения имеет вид $\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = C$.

Задание № 4. Решить линейное дифференциальное уравнение

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Полагаем $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – некоторые функции от x, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Данное уравнение принимает вид

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

Поскольку теперь мы имеем две неизвестные функции, а уравнение, которому они должны удовлетворять, только одно, то еще одно мы можем принять произвольно, лишь бы оно не сужало множество решений y.

Пусть функция v удовлетворяет уравнению $v' - v \operatorname{tg} x = 0$ (приравнивали нулю выражение в скобках). Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем здесь переменные, находим

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \ln|v| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \ln|v| =$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln C \Rightarrow v = \frac{C}{\cos x},$$

где C – произвольная постоянная ($C \neq 0$, чтобы не сужать множество решений). Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = \dfrac{1}{\cos x}$ (положим $C = 1$). Подставляя $v = \dfrac{1}{\cos x}$ в уравнение (1), получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем $u(x)$: $u' \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = \int dx = x + C$. Таким образом, $y = u \cdot v = \dfrac{x+c}{\cos x}$ – общее решение.

Ответ. Общее решение $y = \dfrac{x+c}{\cos x}$.

Задание № 5. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$$

Решение. В данном случае $P(x,y) = xy^2 + \dfrac{x}{y^2}$, $Q(x,y) = x^2 y - \dfrac{x^2}{y^3}$.

Проверяем выполнение условия (9.5):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - \frac{2x}{y^3},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - \frac{2x}{y^3},\ \text{т. е. } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

и, значит, условие (9.5) выполнено. Следовательно, данное дифференциальное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах и $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – дифференциал некоторой функции $U(x, y)$. Найдем функцию U, используя равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) = xy^2 + \frac{x}{y^2} \ \text{ и } \ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = x^2 y - \frac{x^2}{y^3}. \qquad (2)$$

Интегрируя первое равенство в (2) по x (считая y постоянным), находим $U(x,y) = \int\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right)dx = \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2y^2} + \varphi(y)$, где $\varphi(x)$ – произвольная дифференцируемая (по y) функция. Найдем $\varphi(y)$. Продифференцировав полученное равенство по y и учитывая второе равенство в (2), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 y - \frac{x^2}{y^3} + \varphi'(y) = x^2 y - \frac{x^2}{y^3} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow C_1.$$

Следовательно, $U(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2y^2} + C_1$.

Общим интегралом является соотношение $\dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2y^2} + C_1 = C_2$ или

$x^2\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) = C$, где $C = (C_2 - C_1)\cdot 2$.

Ответ. Общий интеграл уравнения имеет вид $x^2\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) = C$.

Задание № 6. Решить дифференциальное уравнение $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$.

Решение. Поскольку дифференциальное уравнение не содержит явно y, то полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'(x)$.

Получаем дифференциальное уравнение первого порядка (с разделяющимися переменными)

$$(1+x^2)p' - 2xp = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = \int\frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln p = \ln(1+x^2) + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1(1+x^2).$$

Так как $p = y'(x)$, имеем

$$y' = C_1(1+x^2).$$

Интегрируя, получим общее решение

$$y = C_1\int(1+x^2)dx = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

Ответ. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Задание № 7. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $y'' + 3y' + 2y = 2x + 10\cos x$,

б) $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$.

Решение.

а) Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

и ищем его решение в виде $y = e^{kx}$, где k – неизвестное число.

Подставляя $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ в данное дифференциальное уравнение и сокращая на e^{kx}, получаем характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных корня $k = -2, k_2 = -1$. Имеем фундаментальную систему решений $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$ и общее решение однородного уравнения

$$y_0 = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}.$$

Ищем какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. В нашем случае правая часть исходного уравнения имеет вид $P_1(x)e^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x}(P_2(x)\cos\beta x + P_3(x)\sin\beta x)$, где $P_1(x) = 2x$ – многочлен первой степени, $\alpha_1 = 0$ (не является корнем характеристического уравнения), $P_2(x) = 10$, $P_3(x) = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = 1$ ($\alpha_2 \pm i\beta -$ не являются корнями характеристического уравнения). Поэтому частное решение неоднородного уравнения пишем в виде $y_ч = Ax + B + C\cos x + D\sin x$, где A, B, C, D – неизвестные числа (неопределенные коэффициенты).

Находим неопределенные коэффициенты, дифференцируя $y_ч$ два раза и подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в уравнение

$$y'_ч = A - C\sin x + D\cos x,$$

$$y''_ч = -C\cos x - D\sin x,$$

$$y''_ч + 3y'_ч + 2y_ч = -C\cos x - D\sin x + 3(A - C\sin x + D\cos x) + 2(Ax + B + C\cos x +$$
$$+ D\sin x) = 2Ax + (2B + 3A) + (C + 3D)\cos x + (D - 3C)\sin x = 2x + 10\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты в обеих частях последнего равенства при x, x^0, $\cos x$ и $\sin x$, получаем четыре уравнения

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 2B + 3A = 0, \\ C + 3D = 10, \\ D - 3C = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнения и находим $A = 1$, $B = -\dfrac{3}{2}$, $C = 1$, $D = 3$.

Таким образом $y_ч = x - \dfrac{3}{2} + \cos x + 3\sin x$.

Общее решение примет вид

$$y = y_0 + y_ч = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + x - \frac{3}{2} + \cos x + 3\sin x.$$

Ответ. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + x - \dfrac{3}{2} + \cos x + 3\sin x.$

б) Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y''' - 4y'' + 3y' = 0.$$

В соответствии с предыдущим примером, записываем характеристическое уравнение

$$k^3 - 4k^2 + 3k = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет три корня $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$. Фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{3x}$. Общее решение однородного уравнения примет вид

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x}.$$

Ищем какое-либо частное решение неоднородного уравнения. В нашем случае правая часть исходного уравнения имеет вид $P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x) = -4x$ – полином первой степени, а $\alpha = 1$ – корень кратности 1 характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде $y_ч = x(Ax + B)e^x$, где A, B – неопределенные коэффициенты. Находим неопределенные коэффициенты, дифференцируя $y_ч$ три раза и подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в уравнение:

$$y'_ч = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y''_ч = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y'''_ч = 6Ae^x + 3(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y'''_ч - 4y''_ч + 3y'_ч = -2Ae^x - 2(2Ax + B)e^x = -4xe^x.$$

Приравниваем коэффициенты в обеих частях последнего равенства при e^x и xe^x, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} -2A - 2B = 0, \\ -4A = -4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Таким образом, $y_ч = x(x-1)e^x$.

Общее решение примет вид $y = y_0 + y_ч = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x} + x(x-1)e^x$.

Ответ. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{3x} + x(x-1)e^x$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0.$$

Ответ. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$1+y^2=xy\cdot y',\ y(2)=1.$$

Ответ: $x^2-2y^2=2.$

3. Решить однородное дифференциальное уравнение $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$

Ответ: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=C.$

4. Решить линейное дифференциальное уравнение

$$xy'+y=4x^3.$$

Ответ. $y=x^3+\frac{C}{x}.$

5. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0.$$

Ответ. $x^3+3x^2y^2+y^4=C.$

6. Решить дифференциальное уравнение

$$(x+1)y''=y'-1.$$

Ответ. $y=C_1(x+1)^2+x+C_2.$

7. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $y''-4y=4x^2-5\sin x,$

б) $y''+4y'+4y=(1-4x)e^{-2x}.$

Ответ. а) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-x^2-\frac{1}{2}+\sin x,$

б) $y=(\ C_1+C_2x\ )e^{-2x}+\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)e^{-2x}.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10
РЯДЫ

Задание № 1. Найти сумму ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Решение. Находим корни знаменателя:

$$n^2+3n+2=0 \Rightarrow n_1=-1, n_2=-2.$$

Тогда $n^2+3n+2=0=(n+1)(n+2)$.

Разлагаем общий член ряда на элементарные дроби:

$$u_n=\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

и выписываем несколько членов ряда:

$$u_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, u_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, u_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\cdots, u_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Сокращая все слагаемые, какие возможно, находим n-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

Вычисляем сумму ряда по формуле

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится, и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Ответ. Сумма $S=\frac{1}{2}$, ряд сходится.

Задание № 2. Исследовать на сходимость ряды, используя теоремы сравнения.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)$.

Решение.

а) Проверяем необходимый признак сходимости ряда (теорема 10.1):

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}=\{\text{По правилу Лопиталя}\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{9}{4} n^{\frac{5}{4}}} = \frac{4}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{4}}} = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполнено. Делаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя первую теорему сравнения. Так как $\ln n < n$ при всех $n \geq 2,$ то имеем $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}} < \frac{1}{n^{5/4}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ сходится как ряд Дирихле (10.5) с $\alpha = 5/4 > 1$. Следовательно, в силу первой теоремы сравнения (теорема 10.2) данный числовой ряд сходится.

Ответ. Ряд сходится.

б) Проверяем необходимый признак сходимости ряда (теорема 10.1):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \right) = \left\{ \frac{1}{n} = x \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2} =$$

$$= \{\text{Применяем правило Лопиталя}\} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 e^{x^3}}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} x e^{x^3} = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Делаем вывод о сходимости или расходимости данного ряда, используя вторую теорему сравнения (теорема 10.3). Имеем $e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \propto \frac{1}{n^3}$ при $n \to \infty$, значит

$$u_n = n^2 \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1 \right) \propto \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический. Следовательно, в силу второй теоремы сравнения исходный ряд также расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Задание № 3. Исследовать на сходимость ряд, применяя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Решение. Выписываем общий член ряда $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$. Находим u_{n+1}

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Вычисляем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \{(n+1)! = (n+1)\cdot n!\} = \frac{\dfrac{3^n \cdot 3}{(n+1)\cdot n!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \frac{3}{n+1}.$$

Вычисляем предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$ сходится по признаку Даламбера.

Ответ. Ряд сходится.

Задание № 4. Исследовать на сходимость ряд, применяя радикальный признак Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$u_n = n^2 \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n.$$

Находим $\sqrt[n]{u_n}$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(n^2 \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{2}{n}} \cdot \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right).$$

Вычисляем предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \cdot \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{5}{n}} = 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Так как $l = \frac{3}{2} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{3n+2}{2n+5}\right)^n$ расходится по радикальному признаку Коши.

Ответ. Ряд расходится.

Задание № 5. Исследовать на сходимость, применяя интегральный признак Коши.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Вводим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, которая имеет очевидную первообразную

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x}.$$

Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится.

Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ непрерывна в промежутке $[2, \infty)$ и убывает в нем к нулю. Следовательно, согласно интегральному признаку Коши (теорема 10.6), из сходимости интеграла следует сходимость ряда.

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится.

Задание № 6. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}.$$

Решение. Проверяем выполнение необходимого условия сходимости.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{\pi}{3^n} = \sin 0 = 0.$$

Исследуем сходимость ряда, составленного из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \sin^2\frac{\pi}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{3^n}.$$

Так как при $n\to\infty$ $\sin^2\frac{\pi}{3^n}\propto\left(\frac{\pi}{3^n}\right)^2=\frac{\pi^2}{9^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{9^n}$ сходится (ряд геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{9}<1$), то по предельной теореме сравнения ряд из модулей сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{\pi}{3^n}$ сходится абсолютно.

Задание № 7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$u_n(x)=\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}.$$

Применяем признак Даламбера

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)\cdot 9^{n+1}}}{\dfrac{|x-2|^n}{n\cdot 9^n}}=\frac{|x-2|}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-2|}{9}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$. Следовательно, интервал сходимости определяется неравенством $\frac{1}{9}|x-2|<1$ и имеет вид (–7; 11).

Исследуем сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости. В точке $x=-7$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно по признаку Лейбница.

В точке $x = 11$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, так как это гармонический ряд.

Ответ. Область сходимости степенного ряда – [–7; 11).

Задание № 8. Вычислить интеграл с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$e^{-x^2} = \left\{-x^2 = t\right\} = e^t = \{\text{Используем формулу разложения (10.14а) для } e^t\} =$$
$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \{\text{Полагаем } t = -x^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}.$$

Интегрируем почленно полученный ряд

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}\Bigg|_0^1 =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Оценим остаток ряда. Так как ряд знакочередующийся;

$$u_0 = 1 > u_1 = \frac{1}{3} > u_2 > \frac{1}{10} > u_3 = \frac{1}{42} > u_4 = \frac{1}{216} > \ldots \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} = 0,$$

то справедливо неравенство $|R_n| \le u_{n+1}$, где R_n – остаток ряда.

Для вычисления интеграла с заданной точностью достаточно взять 5 членов ряда, так как $R_4 \le u_5 = \frac{1}{5! \cdot 11} = \frac{1}{120 \cdot 11} = \frac{1}{1320} < 0{,}001$. Производя вычисление, получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0{,}747.$$

Ответ. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}747$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2+3n}.$$

Ответ. $S=11$.

2. Исследовать на сходимость ряды, используя теоремы сравнения.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(1-\cos\frac{\pi}{n^2}\right)$.

Ответ. а) ряд расходится; б) ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость ряд, применяя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2}.$$

Ответ. Ряд расходится ($l = \infty$).

4. Исследовать на сходимость ряд, применяя радикальный признак Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2}.$$

Ответ. Ряд сходится ($l = 0$).

5. Исследовать на сходимость ряд, применяя интегральный признак Коши.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln n}}.$$

Ответ. Ряд расходится.

6. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}.$$

Ответ. Ряд сходится условно.

7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1) \cdot 2^n}.$$

Ответ. Область сходимости степенного ряда [–4; 0).

8. Вычислить интеграл с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\int_0^1 \sin x^2 dx.$$

Ответ. $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0{,}31.$

Библиографический список

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. Тридцать шесть лекций / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 288 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2. Тридцать пять лекций / Д.Т. Письменный. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

3. Бугров Я.С. Высшая математика. Т. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2003. – 288 с.

4. Бугров Я.С. Высшая математика. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.

5. Бугров Я.С. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.

6. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. 1 курс: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576 с.

7. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. 2 курс: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

8. Зимина О.В. Высшая математика. Решебник / О.В. Зимина, А.И. Кириллова, Т.А. Сальникова. – М.: Физматлит, 2005. – 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Хамзин Айрат Альбертович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
по дисциплине
«Математика»

Для студентов заочной формы обучения
инженерно-технических специальностей

Кафедра высшей математики КГЭУ

Редактор издательского отдела *Н.А. Артамонова*
Компьютерная верстка *Н.А. Артамонова*

Подписано в печать 16.03.09.
Формат 60×84/16. Бумага ВХИ. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 13,9. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 3000 экз. Заказ № 3400.

Издательство КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51
Типография КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51