МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.К. БУДНИКОВА

Допущено
Учебно-методическим советом КГЭУ
в качестве учебного пособия
для магистров

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Казань 2014

УДК 004.4
ББК 22.17
Б90

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Казанского физико-технического института им. Е.К. Завойского Казанского Научного Центра РАН, заслуженный деятель науки и техники Татарстана *В.К. Воронкова*;

кандидат физико-математических наук, доцент Казанского государственного энергетического университета *Н.К. Петрова*

Будникова И.К.

Б90 Теория и практика научного эксперимента: учебное пособие / И.К. Будникова. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2014. – 132 с.

Изложены научные основы современных методов планирования и выполнения экспериментальных исследований. Приведены необходимые сведения из математической статистики, положенные в основу современных методов обработки результатов. Изложенный материал сопровождается многочисленными примерами, демонстрирующими возможности применения математической теории эксперимента для решения различных прикладных задач.

Предназначено для магистров, обучающихся по направлениям подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника», 140100.68 «Теплоэнергетика и теплотехника».

Будет полезно для студентов, магистров и аспирантов, занимающихся обработкой статистических данных, использующих современные компьютерные технологии и методы научного планирования эксперимента.

УДК 004.4
ББК 22.17

ПРЕДИСЛОВИЕ

О, сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.

А.С. Пушкин

Успех научного исследования во многом зависит от качества организации и проведения эксперимента, который включает три основных направления: моделирование, планирование эксперимента, статистическая обработка экспериментальных данных.

В пособии рассматривается комплекс вопросов, связанных с постановкой, планированием и проведением эксперимента, а также излагаются научные основы современных методов обработки и обобщения полученных экспериментальных данных. Описаны основные виды математических моделей и методы экспериментального определения их характеристик.

Целью пособия является систематизированное изложение научных представлений и сведений о современных методах экспериментальных исследований, обеспечивающих наиболее эффективное решение широкого круга прикладных научно-исследовательских задач.

В настоящее время обработка результатов научного эксперимента не мыслима без использования компьютеров и пакетов прикладных программ. Компьютерные методы статистической обработки результатов экспериментов в пособии разобраны на примерах использования интегрированной системы статистического анализа и обработки данных *Statistica*. Однако никакие возможности современных программ не освобождают пользователя компьютера от необходимости изучения и понимания теории статистических методов, реализованных в таких системах.

Структура изложения материала соответствует логической последовательности основных этапов постановки, проведения и анализа научного эксперимента. Каждая тема сопровождается кратким теоретическим описанием исследуемой проблемы, разбором типового примера и комплектом заданий для самостоятельной работы, что позволяет использовать учебное пособие для проведения как лабораторных, так и практических занятий.

Учебное пособие «Теория и практика научного эксперимента» разработано в соответствии с ФГОС ВПО по направлениям подготовки магистров:

– 230100 «Информатика и вычислительная техника»;

– 140100.68 «Теплоэнергетика и теплотехника».

В результате изучения дисциплины «Теория и практика научного эксперимента» обучающийся должен:

Знать:

– методы статистической обработки экспериментальных данных;

– методы планирования эксперимента;

– методы создания и анализа моделей, позволяющих прогнозировать свойства и поведение объектов профессиональной деятельности;

– современные технические и программные средства взаимодействия с ЭВМ.

Уметь:

– планировать и проводить теоретические и экспериментальные научные исследования;

– вычислять вероятностные характеристики случайных процессов, проводить их математический анализ;

– использовать пакеты прикладных программ для статистического анализа экспериментальных данных.

Владеть:

– методами сбора, обработки и представления информации для анализа и улучшения качества результатов исследования;

– методами планирования эксперимента, его реализации и математической обработки;

– современными методами компьютерной реализации вероятностных и статистических моделей для решения практических задач;

– программным обеспечением, предназначенным для автоматизированного расчета статистических характеристик по данным, доставляемым экспериментом.

Полученные знания, умения и навыки формируют следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

– способность к самостоятельному обучению новым методам исследования с помощью информационных технологий;

– способность планировать и ставить задачи исследования, выбирать методы экспериментальной работы, интерпретировать и представлять результаты научных исследований, давать практические рекомендации по их внедрению в производство;

– способность применять современные методы исследования, проводить научные эксперименты, оценивать результаты выполненной работы;

– способность использовать на практике навыки и умения в организации научно-исследовательских работ, оценивать качество результатов.

1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Каждый великий успех науки имеет своим
истоком великую дерзость воображения.
Джон Дьюи

1.1. Основные понятия и определения

Теория – это система основных идей в той или иной отрасли знания; форма научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности.

Практика – критерий истинности и основа развития теории. Рассмотрим основные этапы развития теории и получения нового научного знания.

Мышление является основой любых исследований. Благодаря абстрактному мышлению человек получает новые знания не непосредственно, а опосредованно, через другие знания.

Определенность и последовательность наших выводов (т.е. мышления) не возможны без точного употребления понятий.

Понятие – это результат отражения в сознании человека общих свойств, группы предметов или явлений, которые существенны и необходимы для выделения рассматриваемой группы. Понятия бывают:

– общие и единичные,

– собирательные (относящиеся к группам предметов – промышленное предприятие, транспорт),

– конкретное,

– абстрактное (к отдельно взятым признакам предметов – белый),

– относительное – парное (правый – левый, начальник – подчиненный, ребенок – взрослый),

– абсолютное – не имеет парных отношений (дом, дерево).

Объект исследования характеризуют определенные признаки.

Признаки – это свойства и отношения, характеризующие тот или иной объект. Признаки, которые выражают внутреннюю природу объекта, его сущность, называются существенными. Они всегда принадлежат данному объекту. Признаки, которые могут принадлежать, но могут и не принадлежать объекту, и которые не выражают его сущности, называются несущественными.

Признаки разделяются на отличительные и неотличительные. Отличительные признаки присущи рассматриваемому объекту (или определенному классу объектов) и позволяют выделить его (их) из всего многообразия объектов. Неотличительные признаки могут принадлежать не только рассматриваемому объекту, но и другим.

Метод (греч. *methodos*) – в самом широком смысле слова – путь к чему-либо. Метод мы понимаем как способ достижения цели. Методы подразделяют на несколько уровней:

– эмпирический уровень, на нем применяют наблюдение, сравнение, счет, измерение и др., при этом происходит накопление фактов и их описание;

– экспериментальный (теория, гипотеза) – эксперимент, анализ-синтез, индукция-дедукция, моделирование, логический метод. На этом уровне осуществляется также описание-накопление фактов и их проверка. Факты имеют ценность, только когда они систематизированы, проверены, обработаны;

– теоретический – абстрагирование, идеализация, формализация, анализ-синтез, индукция-дедукция, аксиоматика, обобщение. На этом уровне проводится логическое исследование собранных фактов, выработка понятий, суждений, умозаключений. Соотносятся ранние научные представления с возникающими новыми, создаются теоретические обобщения. Новое теоретическое содержание знания надстраивается над эмпирическими знаниями;

– метатеоретический – метод системного анализа. Этими методами используются сами теории, разрабатываются пути их построения, устанавливающие границы их применения. То есть, на этом уровне происходит познание условий формализации научных теорий и выработка формализованных языков, именуемых метаязыками.

Рассмотрим основные методы, используемые на этапе экспериментальных и теоретических исследований.

Сравнение – это операция мышления, направленная на установление сходства или различия изучаемых объектов по каким-либо признакам. В основе операции лежит классификация сравниваемых понятий.

Операция сравнения может выполняться только для однородных объектов, входящих в определенный класс. Формирование такого класса объекта, а также определение состава существенных и отличительных признаков сравнения в ряде случаев представляет собой достаточно сложную интеллектуальную задачу.

Анализ (греч. *analysis* – разложение, расчленение) – процедура разложения объекта (предмета, явления, процесса) на составные части. Особую специфику представляет анализ технических объектов. При анализе технических объектов можно выделить два подхода.

1. Мысленное или реальное разложение объекта на составные элементы. При этом выявляется структура объекта, т.е. состав элементов и отношения между ними, исследуются причинно-следственные связи между элементами. Например, космический аппарат можно рассматривать как совокупность систем – системы двигательной установки, системы ориентации, управления научной аппаратурой, системы терморегулирования и др. Каждая система анализируется как автономный комплекс объектов определенного функционального назначения. Используя методы абстракции, можно описать элементы системы при помощи идеализированных моделей, определить оптимальные параметры каждой системы.

2. Разложение свойств и отношений объекта на составляющие свойства и отношения. При этом одни из них подвергаются дальнейшему анализу, а от других отвлекаются. Затем подвергаются анализу те свойства, от которых отвлекались. В результате понятия о свойствах и отношениях исследуемого объекта сводятся к более общим простым понятиям. Изолирующая абстракция является частным случаем такого анализа.

Примером может служить анализ трубопроводной системы, с одной стороны, как объекта, обладающего определенным гидравлическим сопротивлением, а с другой – как объекта, который не должен разрушаться при действии на него различных нагрузок.

Синтез (греч. *synthesis* – соединение, сочетание, составление) – метод научного исследования какого-либо объекта, явления, состоящий в познании его как единого целого, в единстве и взаимной связи его частей.

Синтез, с одной стороны, является методом познания, с другой – это метод практический деятельности. Процессы проектирования, конструирования определяются как операции синтеза. При этом новый полученный объект имеет существенно другое качество, чем элементы его составляющие. Это не сумма элементов, это более сложное взаимодействие.

Синтез является приемом, противоположным анализу. Вместе с тем оба приема предполагают и дополняют друг друга. Без анализа нет синтеза, без синтеза – анализа.

Индукция (лат. *induction* – наведение) – операция мышления, основанная на обобщении эмпирической информации об устойчивой повторяемости признаков ряда явлений. Индуктивные умозаключения позволяют от отдельных фактов перейти к общему знанию.

Индуктивные умозаключения в большей степени способствуют получению новых знаний. История науки показывает, что многие научные открытия в физике, химии, биологии сделаны на основе индуктивного обобщения эмпирических данных.

В зависимости от полноты и законченности эмпирического исследования различают полную и неполную индукцию. При полной индукции на основе повторяемости признаков у каждого явления (объекта), относящегося к определенному классу, заключают о принадлежности этого признака всему классу. Это возможно в тех случаях, когда исследователь имеет дело с замкнутыми классами, число элементов (объектов) в которых является конечными и легко обозримыми.

При неполной индукции на основе повторяемости признака у некоторых явлений, относящихся к определенному классу, заключают о наличии этого признака у всего класса явлений. При этом подразумевается, что сам класс сформирован по каким-либо другим признакам, а не тем, что анализируются.

Логический переход в неполной индукции от некоторых элементов ко всем элементам класса не является произвольным. Он оправдан устойчивыми эмпирическими основаниями. Однако обобщение в этом случае носит вероятностный характер, и вывод может содержать ошибки.

Дедукция (лат. *deduction* – выведение) – операция мышления, заключающая в том, что на основании общего знания выводятся частные положения. Дедуктивные умозаключения обладают высокой степенью доказательности и убедительности.

Дедуктивные рассуждения (от известных общих закономерностей) могут приводить к эффективным частным решениям.

Абстракция – это метод научного исследования, основанный на отвлечении от несущественных сторон и признаков рассматриваемого объекта. Абстракция позволяет упростить технический объект или процесс, заменить его моделью, т.е. другим эквивалентным в определенном смысле объектом (исходя из условий задачи) и исследовать эту модель.

Различают три типа абстракции:

– изолирующая абстракция производится для вычисления и четкой фиксации исследуемого объекта по существенным признакам.

– обобщающая абстракция применяется для получения общей картины процесса или явления. Например, в результате обобщения свойств электрических, пневматических, гидравлических машин, жидкостных реактивных двигателей, двигателей внутреннего сгорания возникает такая обобщающая абстракция как преобразователь энергии. Работу парового двигателя, двигателя внутреннего сгорания, можно рассматривать с единых позиций термодинамики как работу тепловой машины.

– идеализирующая абстракция заключается в замещении реального объекта идеализированной схемой для упрощения процесса его изучения.

При идеализации объектов необходимо четко сформулировать принятые допущения.

1.2. Классификация экспериментальных исследований

Задачи теоретических исследований – выявление существующих связей между исследуемым объектом и окружающей средой, объяснение и обобщение результатов эмпирических исследований, выявление общих закономерностей и их формализация.

В процессе теоретического исследования приходится непрерывно ставить и решать разнообразные по типам и сложности задачи в форме противоречий теоретических моделей, требующих разрешения. Структурно любая задача включает условия и требования.

Условия – это определенная информационная система, из которой следует исходить при решении задачи.

Требования – это цель, к которой нужно стремиться в результате решения. Основные типы теоретических задач:

– обобщение результатов исследований, нахождение общих закономерностей путем обработки и интерпретации опытных данных;

– расширение результатов исследований на ряд подобных объектов без повторения всего объема исследований;

– изучение объекта, недоступного для непосредственного исследования;

– повышение надежности экспериментального исследования объекта (обоснования параметров и условий наблюдения, точности измерений).

Основной целью эксперимента является проверка теоретических положений (подтверждение рабочей гипотезы), а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования. Различают эксперименты естественные и искусственные.

Естественные эксперименты характерны при изучении социальных явлений (социальный эксперимент) в обстановке, например, производства, быта и т.п.

Искусственные эксперименты широко применяются во многих естественнонаучных исследованиях. В этом случае изучают явления, изолированные до требуемой степени, чтобы оценить их в количественном и качественном отношениях.

Рассмотрим классификацию экспериментальных исследований. Примем схему, в которой выделим следующие обобщенные признаки эксперимента:

– структура;

– стадия научных исследований, к которой относится эксперимент;
– организация;
– постановка задачи;
– способ проведения.

По структуре эксперименты делят на натурные, модельные и имитационные (машинные).

В натурном эксперименте средства исследования непосредственно взаимодействуют с объектом исследования. В модельном – экспериментируют не с объектом, а с его заменителем – моделью. Модель при этом играет двоякую роль. Во-первых, она является объектом экспериментального исследования. Во-вторых, по отношению к изучаемому объекту она является средством экспериментального исследования. Имитационное моделирование является разновидностью модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики исследуемого объекта исследуются с помощью разработанных алгоритмов и программ моделирования. Данный вид эксперимента отличается универсальностью и обладает широкой областью применения.

По стадии научных исследований эксперименты делятся на лабораторные, стендовые и промышленные.

Лабораторные эксперименты служат для изучения общих закономерностей различных явлений и процессов, для проверки научных гипотез и теорий.

Стендовые испытания проводят при необходимости изучить вполне конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте с определенными физическими, химическими и др. свойствами (например, наработка на отказ) По результатам стендовых испытаний судят о различных недоработках при создании нового объекта, а также вырабатывают рекомендации относительно серийного выпуска изделий и условий его эксплуатации.

Промышленный эксперимент проводят при создании нового изделия или процесса по данным лабораторных и стендовых испытаний, при оптимизации существующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

Лабораторные и стендовые опыты проводят с применением типовых приборов, специальных моделирующих установок, стендов, оборудования и т.д. Эти исследования позволяют наиболее полно и доброкачественно, с требуемой повторяемостью изучить влияние одних характеристик при варьировании других. Лабораторные опыты в случае достаточно полного научного обоснования эксперимента (математическое планирование) позволяют получить хорошую научную информацию с минимальными затратами. Однако такие эксперименты не всегда полностью моделируют реальный ход изучаемого процесса, поэтому возникает потребность в проведении производственного эксперимента.

Производственные экспериментальные исследования имеют целью изучить процесс в реальных условиях с учетом воздействия различных случайных факторов производственной среды. Пассивные производственные эксперименты заключаются в сборе данных и анализе случайных отклонений от заданных параметров процесса. В активных экспериментах изменения параметров процесса заранее планируют и задают.

Иногда возникает необходимость провести поисковые экспериментальные исследования. Они необходимы в том случае, если затруднительно классифицировать все факторы, влияющие на изучаемое явление вследствие отсутствия достаточных предварительных данных. На основе предварительного эксперимента строится программа исследований в полном объеме.

С точки зрения организации эксперимента можно выделить:

– обычные (рутинные) эксперименты,
– специальные (технические),
– уникальные,
– смешанные.

Обычные эксперименты, как правило, проводятся в лабораториях по несложным методикам с применением сравнительно простого экспериментального оборудования и сопряжены с однообразными измерениями и вычислениями.

Специальные эксперименты связаны с созданием и исследованием различных приборов и аппаратов (средства автоматики, элементы, узлы контрольно-измерительных систем).

Уникальные эксперименты проводятся на сложном экспериментальном оборудовании (типа ядерного реактора, новые виды судов, самолетов, автомобилей, исследования космоса). Они характеризуются большими объемами экспериментальных данных, высокой скоростью протекания исследуемых процессов, широким диапазоном изменения характеристик исследуемого процесса.

Смешанные эксперименты содержат совокупность разнотипных экспериментов, объединенных единой программой исследования и связанных друг с другом результатами исследований.

При постановке задачи необходимо учитывать уровень сложности исследуемого объекта, степень его изученности и требуемую степень детализации его описания.

По способу проведения эксперимента различают: пассивные, активные, активные с программным управлением, активные с обратной связью, активно-пассивные эксперименты.

Пассивный эксперимент основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования без вмешательства в ход эксперимента. Обработка собранных экспериментальных данных осуществляется после окончания эксперимента. Обычно изменяется только один фактор при фиксированных значениях всех остальных.

При активном эксперименте предполагается возможность активного воздействия на объект исследования. То есть на вход объекта подаются возмущающие воздействия, на выходе регистрируются статические и динамические характеристики. При активном эксперименте можно оценить дисперсию ошибки, строго проверить адекватность модели, выполнить множественный регрессионный анализ.

Активный эксперимент с программой управления проводится по заранее составленному плану. В соответствии с этим планом осуществляется воздействие экспериментатора на входные параметры и регистрируются выходные, что позволяет выяснить природу происходящих в объекте процессов.

В случае активного эксперимента с обратной связью, имея результаты эксперимента на каждом шаге, можно выбрать оптимальную стратегию управления экспериментом. Такие эксперименты можно проводить автоматически.

Активно-пассивный эксперимент характеризуется тем, что при его проведении одна часть данных регистрируется, а другая просто фиксируется и обрабатывается в процессе эксперимента. В таком эксперименте имеется 2 вида характеристик: одна часть – изменяющиеся под воздействием управляющих сигналов, вторая – не подверженные управляющим воздействиям.

Если эксперимент хорошо продуман и удачно спланирован, то он имеет больше шансов на успех. Основываясь на известных теориях и экспериментальных результатах, можно так выбрать способы и методы измерений, чтобы получить как можно больше сведений. Очень важно исключить влияние внешней среды или свести его к нулю.

Итак, теория эксперимента включает три основных направления.

Первое – подобие и моделирование. Отвечает на вопросы, какие величины следует измерять во время эксперимента и в каком виде обрабатывать результаты, чтобы выводы оказались справедливыми не для данного частного случая, но и для группы объектов или явлений.

Второе – статистическая обработка данных эксперимента. Позволяет на основе данных, имеющих погрешности получить достоверные результаты.

Третье – математическое планирование эксперимента. Включает совокупность процедур для построения искомых зависимостей с минимальными затратами.

Каждое из направлений является отдельной достаточно обширной, развивающейся областью знаний с фундаментальными исследованиями.

1.3. Общая характеристика объекта исследования

Под объектом исследования понимают изолированное целое, содержащее совокупность процессов и средств их реализации.

Средства реализации – устройства контроля, управления и связи между ними и объектом.

Полностью изолированных объектов в природе не существует. Но тут необходимы методы абстрагирования и идеализации, для того, чтобы отсеять второстепенное и выделить главное, и представить объект исследования как условно изолированное целое.

Используя модель «черный ящик» (рис. 1.1), предполагают, что внутренняя структура и характер связей между входными и выходными величинами исследователю неизвестны, о них он судит по значениям на выходе при определенных значениях на входе. Входные величины (X) называют факторами, выходные (Y) откликами, параметрами, реакцией, целевой функцией.

Под входными величинами понимаем все, что оказывает влияние на выходные величины.

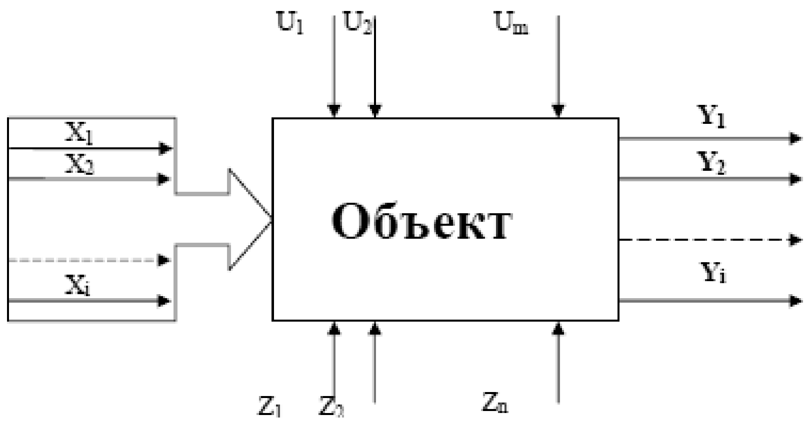


Рис. 1.1. Схема модели «черный ящик»

Правильный выбор параметров и факторов в значительной степени предопределяет успех исследования. Строго формализованной методики не существует, многое зависит от опыта экспериментатора, проникновения в сущность объекта исследования, знания теории эксперимента.

Параметры и предъявляемые к ним требования

В научном и инженерном эксперименте в качестве параметров, как правило, принимаются экономические величины (приведенные затраты, себестоимость, производительность труда и т.п.) или технические показатели (расход энергии, концентрация, давление, температура, напряжение и т.д.).

К параметрам предъявляют следующие основные требования:

– должен быть количественным и оцениваться числом; для качественных показателей используются ранговые и условные показатели оценки;

– параметр должен допускать проведение эксперимента при любом сочетании факторов; недопустимо, чтобы при каком-то сочетании произошел взрыв или какая-либо другая форс-мажорная ситуация;

– данному сочетанию факторов с точностью до погрешности должно соответствовать одно значение параметра;

– параметр должен быть универсальным, т.е. характеризовать объект всесторонне;

– желательно, чтобы параметр имел простой экономический или физический смысл, просто и легко вычислялся;

Рекомендуется, чтобы параметр был единственным. Исследовать объект, строить математические зависимости можно для каждого параметра, но оптимизировать можно только по одному. Если параметров несколько, то целесообразно подходить к задаче постановки исследования как к многокритериальной задаче.

Факторы и предъявляемые к ним требования

Фактором является любая величина, влияющая на параметр и способная изменяться независимо от других. Факторы можно разделить на следующие 3 группы:

– контролируемые и управляемые, которые можно изменять и устанавливать на заданном экспериментатором уровне;

– контролируемые, но неуправляемые величины;

– неконтролируемые и неуправляемые (обусловленные случайными воздействиями, износом деталей).

Кроме независимости, к факторам предъявляются и другие требования:

– операциональности (факторы должны быть операционально определимыми – т.е., в какой именно точке и каким прибором будут измеряться);

– совместимость – при всех сочетаниях значений факторов эксперимент будет безопасно выполнен;

– управляемость – экспериментатор устанавливает значение уровня по своему усмотрению;

– точность установления факторов должна быть существенно выше (по крайней мере, на порядок) точности определения параметра;

– однозначность – означает непосредственность воздействия фактора (либо их комбинации-критерия подобия) на объект исследования;

– фактор должен быть количественным.

Группа *U* включает в себя контролируемые факторы, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования. К ним можно отнести, например, условия окружающей среды, в которых проводятся эксперименты.

Группа *Z* образована контролируемыми и неконтролируемыми факторами. Они характеризуют возмущения, действующие на объект исследования, которые нельзя измерить количественно (например, неконтролируемые примеси в сырье, старение деталей и т.п.). Воздействие неконтролируемых факторов приводит к дрейфу характеристик во времени.

Основные свойства объекта исследования

Основными свойствами объекта исследования являются: сложность, полнота априорной информации, управляемость и воспроизводимость.

Сложность характеризуется числом состояний, которые в соответствии с целью исследований, можно различать при проведении исследований.

Априорная информация – это информация известная до начала исследования. Обычно в исследованиях нуждаются объекты, информация о которых ограничена.

Управляемость – свойство, позволяющее изменять состояние объекта по усмотрению исследователя. В управляемых объектах можно изменять все входные величины. В частично управляемых системах можно ставить эксперимент, за неуправляемыми можно только наблюдать.

Воспроизводимость – свойство объекта переходить в одно и то же состояние при одинаковых сочетаниях факторов. Чем выше воспроизводимость, чем проще выполнять эксперимент и тем достовернее его результаты.

Прежде всего, необходимо определить, в чем именно заключается задача, так как реальные ситуации редко бывают четко очерчены. Процесс выделения «задачи», поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками (например, общения с коллегами специалистами, работающими в данной области техники, чтение литературы, глубокое изучение вопроса).

Часто одновременно со стадией постановки задачи идет процесс выявления основных или существенных особенностей явления. Этот процесс схематизации (идеализации) играет решающую роль, поскольку в реальном явлении участвует множество процессов, и оно чрезвычайно сложно. Некоторые черты представляются важными, другие – несущественными.

Построение моделей

Очевидно, математической моделью объекта, изображенного на рис. 1.1, может служить совокупность соотношений вида

$$Y = f\,(xi,\ yj\ ,zk).$$

Однако практически при построении модели такие соотношения получить невозможно. Приходится вводить ограничения, например, считать, что каждый из параметров может изменяться в определенных пределах, обусловленных верхней и нижней границами.

Под моделированием понимаем способ познания действительности с помощью моделей. Модель – материальный или мысленный объект, отображающий основные свойства объекта-оригинала. Использование моделирования позволяет с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей.

Мысленные модели бывают наглядные, символические и математические. К наглядным относятся мысленные представления, по ним могут создаваться иллюстрирующие их материальные объекты в виде наглядных аналогов, макетов.

Символические – имеют вид условно-знаковых представлений (географические карты, записи химических реакций и прочие, состояния системы и пути переходов между ними, показанные в виде графов).

Наиболее важной моделью является математическая, в том числе имитационная. Суть заключается в том, что основные процессы, происходящие в объекте исследования, записываются в виде математических уравнений и соотношений. Математическая модель с помощью алгоритмов и программ может быть представлена в виде имитационной модели. В последнее время широкое распространение получают визуальные имитационные модели, которые также как и имитационные модели позволяют проводить экспериментальные исследования.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают аналитические (детерминированные), статистические или эмпирические модели.

Аналитические модели, как правило, представляются в виде систем уравнений различных типов, позволяющих очень точно описывать процессы, протекающие в системе.

Статистические модели получают в результате статистической обработки эмпирической информации, собранной на исследуемом объекте. Статистические модели имеют, как правило, относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью точек, в которых проводятся эксперименты.

Принято различать стационарные и динамические модели. Первые из них описывают не изменяющиеся во времени соотношения, характеризующие объект исследования. Вторые – переходные процессы, т.е. нестационарные состояния. И те, и другие модели могут относиться либо к статистическому, либо к физическому типу.

Материальные модели условно разделим на натурные и физические.

Натурная модель это сам объект исследования. На натурной модели можно проводить стендовые и производственные эксперименты.

Физическая модель характеризуется тем, что физическая природа протекающих в ней процессов аналогична природе процессов объекта-оригинала. Если физическая модель подобна оригиналу, то поставленный на ней эксперимент через масштабные коэффициенты может быть пересчитан на натуру. Полученная при этом информация будет соответствовать результатам натурного эксперимента.

Исследование на физических моделях, например, позволяет ускорить или замедлить процессы, которые в реальных условиях протекают со скоростью, затрудняющей наблюдения. При проведении эксперимента на натуре в большинстве случаев приходится отказываться от активного поиска оптимальных конструктивных решений, что сопряжено со значительными материальными и временными затратами (например, в самолетостроении, космонавтики, атомной энергетике и т.д.).

Сознательное использование моделей позволяет с меньшими затратами получить более строгие результаты и избежать ряда погрешностей.

Важнейшим требованием, предъявляемым к моделям, является их подобие объектам-оригиналам.

При построении математических или материальных моделей руководствуются следующими соображениями.

Первоначально из общего комплекса процессов, характеризующих объект, выделяют те, которые важны в данном исследовании и отражают основные свойства оригинала (анализ и синтез модели исследования).

Затем создают общую описательную модель выделенных процессов. Выполняют словесное описание, классификацию и систематизацию, выполняют предварительные статистические оценки.

На третьем этапе определяют параметры и устанавливают значимые факторы. С этой целью сложный объект разбивают на элементарные звенья. Для каждого звена определяют входные и выходные величины. Оценивают весомость каждого фактора, выделяют значимые и отбрасывают второстепенные.

На четвертом этапе создают математическую модель объекта. Для чего составляют уравнения, описывающие процессы в звеньях, устанавливают и записывают уравнения связей и соотношений, выбирают метод решения.

На заключительном этапе решают уравнения, наиболее подходящим способом. Натурные и физические модели можно создавать на основе математических моделей.

Являясь источником познания и критерием истинности теорий и гипотез, эксперимент играет очень важную роль как в науке, так и в инженерной практике. Эксперименты ставятся в исследовательских лабораториях и на действующем производстве, в медицинских клиниках и на опытных сельскохозяйственных полях, в космосе и в глубинах океана.

Хотя объекты исследований очень разнообразны, методы экспериментальных исследований имеют много общего:

– каким бы простым ни был эксперимент, вначале выбирают план его проведения;

– стремятся сократить число рассматриваемых переменных, для того чтобы уменьшить объем эксперимента;

– стараются контролировать ход эксперимента;

– пытаются исключить влияние случайных внешних воздействий;

– оценивают точность измерительных приборов и точность получения данных;

– в процессе любого эксперимента анализируют полученные результаты и стремятся дать их интерпретацию, поскольку без этого решающего этапа весь процесс экспериментального исследования не имеет смысла.

К сожалению, зачастую работа экспериментатора настолько хаотична и неорганизованна, а ее эффективность так мала, что полученные результаты не в состоянии оправдать даже тех средств, которые были израсходованы на проведение опытов. Поэтому вопросы организации эксперимента, снижения затрат на его проведение и обработку полученных результатов являются весьма и весьма актуальными.

Современные методы планирования эксперимента и обработки его результатов, разработанные на основе теории вероятностей и математической статистики, позволяют существенно (зачастую в несколько раз) сократить число необходимых для проведения опытов. Знание и использование этих методов делает работу экспериментатора более целенаправленной и организованной, существенно повышает как производительность его труда, так и надежность получаемых им результатов.

Как и любая другая научная дисциплина, организация и планирование эксперимента имеют свою строго определенную, во многом регламентируемую стандартами (ГОСТ 16504-81, ГОСТ 24026-80) терминологию.

В настоящее время обработка результатов инженерных экспериментов не мыслима без использования компьютеров и пакетов прикладных программ. При разнообразии статистических пакетов, которым характеризуется современный мировой и отечественный рынок исследователю важно уметь правильно сориентироваться на этом рынке, правильно понимать область применения статистических методов решения того или иного класса задач.

Однако следует понимать, что инструмент не заменяет компетентность и профессионализм. Компьютер представляет собой не замену человеческого интеллекта, а лишь его усилитель. Никакие яркие возможности современного пользовательского интерфейса не освобождают пользователя компьютера от необходимости изучения и понимания сути статистических методов, реализованных в таких системах.

Контрольные вопросы

1. Что такое эксперимент? Какова его роль в научном исследовании?

2. Какие общие черты имеют научные методы исследований для изучения закономерностей различных процессов и явлений?

3. Приведите классификации видов экспериментальных исследований, исходя из цели проведения эксперимента.

4. Какие формы представления результатов эксперимента применяют в зависимости от условий его реализации.

5. В чем заключаются принципиальные отличия активного эксперимента от пассивного?

6. Поясните преимущества и недостатки лабораторного и промышленного эксперимента.

7. В чем отличия количественного и качественного экспериментов?

8. Дайте определения следующим терминам: опыт, фактор, уровень фактора, отклик, функция отклика, план и планирование эксперимента.

9. Основные этапы научно-исследовательской работы.

10. Основные задачи научной работы.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

2.1. Оценивание характеристик генеральной совокупности по выборке

Студент должен

освоить понятия: выборка, вариационный ряд, эмпирический закон распределения вероятностей, эмпирические числовые характеристики, точечные и интервальные оценки неизвестных параметров;

приобрести навыки: вычисления эмпирических числовых характеристик, построения доверительных интервалов.

Описательные статистики

Основным объектом исследования в математической статистике является выборка. Сущность выборочного метода в математической статистике заключается в том, чтобы по определенной части генеральной совокупности (выборке) судить о ее свойствах.

Формы представления выборки

1. Первичная статистическая совокупность

Пусть некоторый признак генеральной совокупности описывается случайной величиной X. Выборка объемом n из этой генеральной совокупности представляет значение случайной величины X (x_1, x_2, x_3, … x_n). Эти данные могут быть представлены в виде протокола, в котором зарегистрированы: номер опыта и значение x, которое приняла в этом опыте случайная величина X. Такой протокол называется первичной статистической совокупностью (негруппированный вид).

Например: 1,3; 0,7; 2,8; 0,25; 1,17; 0,8; 2,7; 0,45; 1,15; $n = 10$.

Анализировать характер распределения случайной величины X по этому протоколу при большом числе опытов практически невозможно. Поэтому его преобразуют в следующий формат.

2. Упорядоченная статистическая совокупность (вариационный ряд)

Проводится ранжирование первичной выборки, т.е. упорядочение чисел по возрастанию $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Если одно и то же значение встречается несколько раз, в таблицу его записывают столько раз, сколько оно встречается.

Различные элементы выборки в этом формате называются вариантами или порядковой статистикой (x_i), где индекс указывает на порядковый номер элемента в вариационном ряду. Или вместо x_i обозначают x_k, где k – ранг порядковой статистики.

Данная форма представления выборки не приводит к потере информации о каждом элементе выборки, но искажает информацию, устанавливая зависимость между соседними элементами выборки. Необходимо помнить, что члены вариационного ряда в отличие от элементов исходной выборки уже не являются взаимно независимыми по причине их предварительной упорядоченности.

3. Статистический ряд – это варианты, расположенные в порядке возрастания их значений с соответствующими им весами.

4. Группированный статистический ряд

На некоторых этапах статистического анализа необходимо исходную выборку представить в группированном виде, что позволит получить общее представление о законе распределения случайной величины X.

Для исследования основных свойств явления или объекта, представленного выборкой, вычисляют точечные и интервальные оценки. Точечные оценки параметров распределения это оценки, полученные по выборке и приближенно равные оцениваемым параметрам.

Статистика (статистический показатель) – это функция от результатов наблюдений. Все выборочные статистики можно разбить на несколько следующих классов.

Точечные оценки параметров распределения

Показатели положения – описывают место локализации данных на числовой оси. Показателями положения служат, прежде всего, выборочное среднее и выборочная медиана, мода, среднее геометрическое и среднее гармоническое.

Выборочным средним называется величина, которая рассчитывается как среднее арифметическое от наблюдений. Для выборки объема n: x_1, x_2,.., x_n среднее арифметическое равно

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Если выборка представлен в виде статистического ряда, где n_i есть частота элемента x_i, среднее арифметическое вычисляется по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i .$$

По этой же формуле вычисляется среднее арифметическое и для сгруппированной выборки, где в качестве x_i берется середина интервала.

Выборочное среднее является приближенной оценкой математического ожидания случайной величины.

Медиана – значение, расположенное посередине в вариационном ряду. Для того чтобы получить вариационный ряд необходимо исходную выборку упорядочить в порядке возрастания (убывания) элементов. Для четного объема выборки N медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений.

Например: для выборки {-1,3; 0,5; 1,6; 2,8; 3,7} медианой является число 1,6. Для выборки {-1,3; 0,5; 1,6; 2,8; 3,7; 4,9} медиана равна (1,6+2,8)/2 = 2,2.

Модой называется элемент выборки, имеющий наибольшую частоту.

Среднее геометрическое применяется для характеристики данных, заданных через равные промежутки времени, и определяют среднюю долю относительных изменений. Такие данные могут характеризовать явления роста, например, доходы по вкладам, эксплуатационные расходы и т.д. Среднее геометрическое вычисляется по формуле

$$x_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} .$$

Логарифм среднего геометрического

$$\lg\left(x_g\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg\left(x_i\right)}{n} .$$

Среднее гармоническое используется для характеристики данных, размерность которых выражена отношением различных физических величин.

Среднее гармоническое вычисляется по формуле

$$x_H = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{-1}.$$

Между средним геометрическим, средним арифметическим и средним гармоническим имеет место следующее соотношение

$$\bar{x} \geq x_g \geq x_H.$$

Показатели разброса (рассеяния) – описывают степень разброса данных относительно центра группирования (места локализации). К этой группе показателей можно отнести выборочную дисперсию, стандартное отклонение, размах, средний межквартильный размах, персентильный размах. Стандартная ошибка среднего также является показателем разброса, но не исходных данных, а усредненных по выборке заданного объема.

Выборочная дисперсия, являющаяся мерой квадрата статистического разброса рассматриваемой величины, рассчитывается по формуле (несмещенная оценка) для не группированных данных:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2,$$

для сгруппированных данных – по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Выборочная дисперсия является приближенной оценкой «точной» дисперсии. Наличие коэффициента $(1-n)$ в знаменателе, вместо интуитивно ожидаемого n, связано с важным свойством не смещенности, которым обладает указанная оценка. Нетрудно видеть, что при большом объеме выборки смещенная оценка оказывается близкой к несмещенной оценке.

Стандартное отклонение – статистическая характеристика, определяется как квадратный корень из дисперсии.

$$s = \sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{n-1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Синонимом термина стандартное отклонение является термин среднеквадратичное отклонение. На научно-техническом жаргоне стандартное отклонение часто называют «сигмой», поскольку дисперсию обычно обозначают как σ^2.

Стандартная ошибка среднего определяется как стандартное отклонение, деленное на корень из объема выборки:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Рассматриваемая характеристика дает меру неопределенности среднего значения, рассчитанного на основе случайной выборки конечного объема. При стремлении объема выборки к бесконечности неопределенность среднего стремится к нулю, а соответствующее среднее значение стремится к пределу, равному «истинному» среднему (математическому ожиданию).

Размах – разница между максимальным и минимальным значениями выборки

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Межквартильный размах (межквартильное расстояние) – величина, равная разности между верхней и нижней квартилями.

Квартили – варианты, делящие ранжированный ряд на 4 равные (по числу членов) части. Номер квартиля рассчитывается как:

$$N_{Qi} = ((n+1) \cdot i) / 4.$$

Нижний квартиль Q_3 – это значение, ниже которого лежит 25 % наблюдений с наименьшими значениями признаками, т.е. меньше Q_1.

Верхний квартиль Q_3 – это значение, выше которого лежит 25 % наблюдений с наибольшими значениями признаками, т.е. больше Q_3.

Вторая квартиль Q_2 – это значение, которому соответствует 50 % наблюдений, Q_2 равен медиане.

Средний межквартильный размах равен половине разностей верхнего и нижнего квартилей: $R_Q = (Q_3 - Q_1) / 2$.

Например, имеем ранжированный ряд показателей: 620, 630, 650, 680, 700, 710, 720, 730, 750. Определить номер и значение квартилей.

Номер квартили Q_1 = ((9 + 1)·1) / 4 = 2,5. Из этого следует, что значение Q_1 находится между 2 и 3 членом ряда.

$$Q_1 = (x_2 + x_3)/2 = (630 + 650) / 2 = 640.$$

Номер квартили Q_3 = ((9 + 1)·3) / 4 = 7,5 (значение Q_3 находится между 7 и 8 членом ряда).

$$Q_3 = (x_7 + x_8)/2 = (710 + 720) / 2 = 715.$$

Номер квартили Q_2 = ((9 +1)·2) / 4 = 5; $Q_2 = x_5$ = 700 = медиане.

Показатели формы распределения – к этой группе показателей можно отнести коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Коэффициент асимметрии (*Skewness*) – количественная характеристика степени скошенности (асимметрии) распределения.

$$A_s = \frac{\mu_3}{s^3},$$

где μ_3 – третий центральный момент:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3.$$

Таким образом, любое существенное (статистически значимое) отличие коэффициента асимметрии от нуля может служить индикатором асимметрии распределения. Отметим, что куб стандартного отклонения введен в формулу (8) для нормировки (в противном случае коэффициент асимметрии не был бы безразмерным).

Стандартная ошибка асимметрии:

$$\delta_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}.$$

Коэффициент эксцесса (*Kurtosis*) – количественная характеристика островершинности плотности распределения.

$$E_k = \frac{\mu_4}{s^4} - 3,$$

где μ_4 – четвертый центральный момент:

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4.$$

Для нормального распределения эксцесс равен нулю. Распределения, имеющие положительный эксцесс, являются более островершинными по сравнению с нормальным распределением; распределения, имеющие отрицательный эксцесс, являются менее островершинными по сравнению с нормальным распределением. Стандартная ошибка эксцесса:

$$\delta_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Показатели, описывающие закон распределения – к этой группе показателей можно отнести эмпирическую функцию распределения, выборочные квантили, а также гистограммы, таблицы частот, кумулятивные кривые, графики *Box-Whiskers* (диаграммы размаха).

Выборочной (эмпирической) функцией распределения случайной величины X, построенной по выборке $x_1,\ x_2,\ldots x_n$ называется функция $F_n(x)$, определяемая следующими условиями:

$$F_n(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x \le x_1 \\ i/n\, x_i < x \le x_{i+1}, & 1 \le i \le n-1 \\ 1 & x > x_n \end{Bmatrix}.$$

Предполагается, что выборка упорядочена в виде вариационного ряда (в порядке возрастания элементов). Эмпирическая функция распределения представляет собой ступенчатую функцию со скачками.

Для каждого x функция $F_n\ (x)$ представляет собой долю элементов выборки, лежащих левее точки x.

Выборочной квантилью уровня p случайной величины X называется решение уравнения

$$F_n(x_p) = p.$$

Здесь уровень p является по смыслу вероятностью (т.е. действительным числом в интервале от 0 до 1).

Некоторые, введенные выше статистические характеристики можно определить как квантили, а именно:

– нижняя квартиль – квантиль, соответствующая вероятности $p = 0{,}25$;

– медиана есть квантиль, соответствующая вероятности $p = 0{,}5$;

– верхняя квартиль – квантиль, соответствующая вероятности $p = 0{,}75$.

Если вероятность p выражают в процентах (считая, что 100 % соответствует $p = 1{,}00$), то соответствующую квантиль называют процентилью (*percentile*).

Интервальные оценки параметров распределения

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Все оценки, рассмотренные выше – точечные. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta - \Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, равна γ:

$$P\left(\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta\right) = \gamma.$$

Заменив неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством, имеем

$$P\left(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta\right) = \gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна γ. Доверительным называют интервал, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ вычисляется из следующего соотношения

$$P\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

где γ – заданная надежность, a – математическое ожидание, x – выборочное среднее. Число t определяется из равенства $2\Phi\ (t) = \gamma$ или $\Phi(t) = \gamma/2$. По таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\gamma/2$.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ вычисляются из выражения

$$P\left(\overline{X} - t_\gamma S\big/\sqrt{n} < a < \overline{X} + t_\gamma S\big/\sqrt{n}\right) = \gamma,$$

где t – критерий Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$; S – «исправленное» среднеквадратическое отклонение. При заданной надежности $\gamma = 0{,}95$ уровень значимости $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Выполнение расчета в пакете Statistica

В пакете *Statistica* существует возможность расчета огромного числа дескриптивных (описательных, элементарных) статистик. Прежде чем приступить к выполнению данного пункта, предварительно нужно установить размер таблицы по объему вводимых данных.

Запустить программу *Statistica*. В открывшемся окне электронной таблицы, размер которой по умолчанию 10×10, нужно увеличить количество строк в соответствии с размером выборки. Для этого правой кнопкой мыши на поле крайнего левого столбца вызываем меню, из которого выбираем «*Добавить наблюдения*», т.е. число строк таблицы. После этого выходит диалоговое окно «*Добавить наблюдения*» (рис. 2.1), в которое и вводим нужное число добавляемых строк (например, 10).

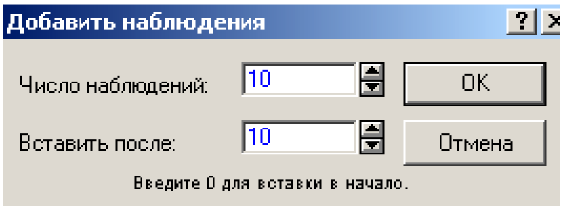


Рис. 2.1. Окно установки размеров таблицы

Построение вариационного ряда

В таблицу обновленных размеров 10×20 (рис. 2.2) в переменную с именем *Var*1 вводим последовательно все значения выборки.

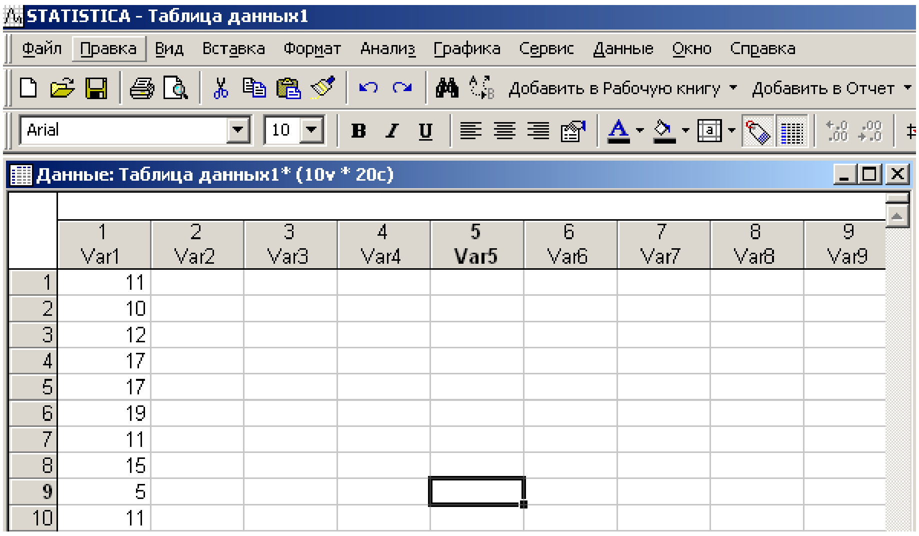


Рис. 2.2. Стартовое окно программы

Методику работы по выполнению задания рассмотрим на примере выборки объема $n = 20$: 11, 10, 12, 17, 17, 19, 11, 15, 5, 11, 11, 14, 6, 7, 14, 11, 13, 13, 8, 5.

Для построения вариационного ряда в переключателе модулей главного меню выбираем «*Данные*» → «*Сортировка*». Открывается окно «*Параметры сортировки*» (рис. 2.3).

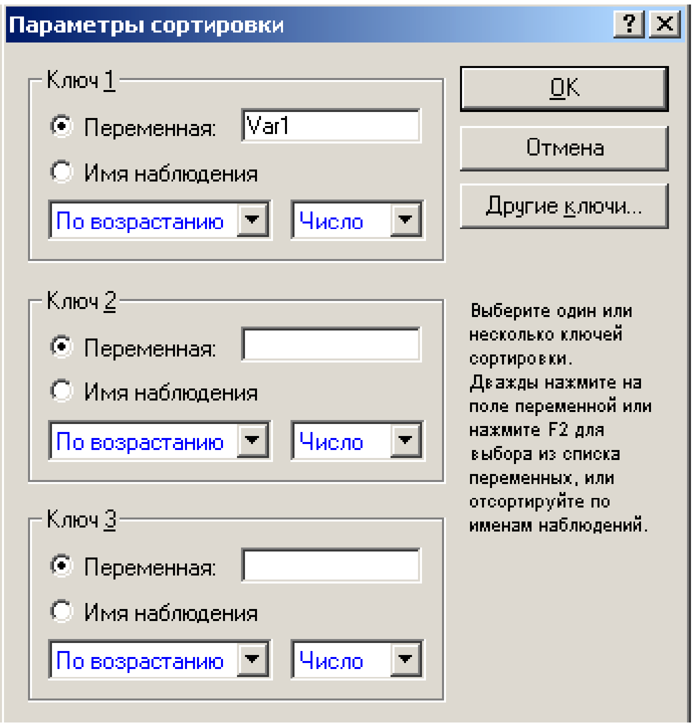


Рис. 2.3. Параметры сортировки

В первом переключателе этого окна выбираем из списка тип сортировки «*По возрастанию*»**,** затем двойной левый щелчок в поле «*Переменная*» открывает окно «*Выбрать переменную*». После выбора переменной *Var1*→ «*OK*». В электронной таблице исходная выборка заменяется на отсортированный по возрастанию вариационный ряд.

Вычисление выборочных статистик

В меню «*Анализ*» → «*Основные статистики и таблицы*» → «*Описательные статистики*» → «*OK*» → открыть окно на вкладке «*Дополнительно*» (рис. 2.4) и выполнить следующие настройки:

– открыть список «*Переменные*» и выбрать имя *Var1*;

– под заголовком «*Подробные описательные статистики*» имеется три группы показателей. Выбрать «*Параметры положения*» и установить флажки против всех параметров → «*OK*».

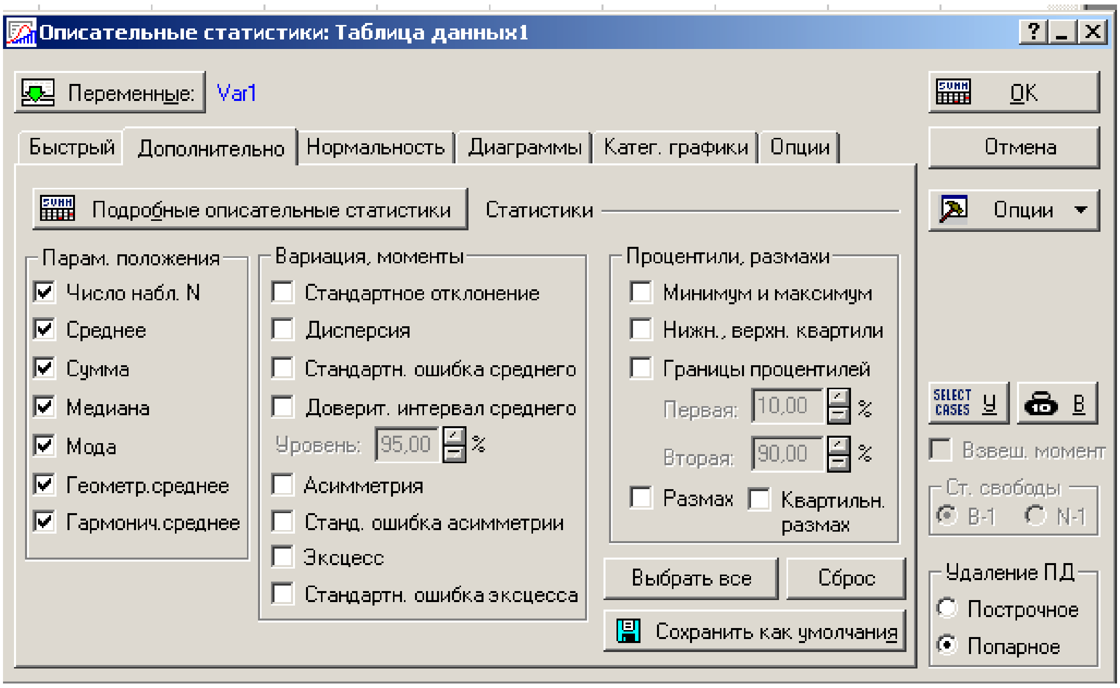


Рис. 2.4. Описательные статистики

Получаем таблицу результатов (рис. 2.5).

Переменная	N набл.	Среднее	Геометр. Среднее	Гармонич. Среднее	Медиана	Мода	Частота моды	Сумма
	Описательные статистики (Таблица данных1)							
Var1	20	11,50000	10,77247	9,969835	11,00000	11,00000	5	230,0000

Рис. 2.5. Опция «Параметры положения»

Аналогичным образом последовательно выполнить действия в опциях «*Вариация, моменты*» и «*Процентили, размахи*», результаты выполнения которых представлены в таблицах (рис. 2.6, 2.7).

Переменная	Дисперс.	Стд.откл.	Станд. Ошибка	Асимметрия	Стд.ош. Асимметрия	Эксцесс	Стд.ош. Эксцесс
	Описательные статистики (Таблица данных1)						
Var1	15,63158	3,953679	0,884070	-0,017032	0,512103	-0,499038	0,992384

Рис. 2.6. Опция «Вариация, моменты»

Переменная	Минимум	Максимум	Нижняя Квартиль	Верхняя Квартиль	Процентиль 10,00000	Процентиль 90,00000	Размах
	Описательные статистики (Таблица данных1)						
Var1	5,000000	19,00000	9,000000	14,00000	5,500000	17,00000	14,00000

Рис. 2.7. Опция «Процентили, размахи»

Контрольные вопросы

1. Что является основным объектом исследования в математической статистике?

2. Какие формы представления выборки применяются?

3. В чем заключается сущность выборочного метода в математической статистике?

4. На какие группы можно разбить все выборочные статистики?

5. Какие статистики относятся к показателям разброса?

6. Дайте определение понятий мода и медиана.

7. Дайте определение параметра «геометрическое среднее».

8. Дайте определения точечной и интервальной оценки параметров.

9. Как расчитать исправленную выборочную дисперсию?

10. Вариационный ряд. Статистическое распределение выборки.

Задание 1. Для выборки своего варианта выполнить расчет всех описательных статистик. Полученные результаты оформить в 3 таблицы с соответствующими названиями, например – «*Параметры положения*» (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Параметры положения

Наименование параметров	Вычисленные значения		
	Statistica	*Excel*	По формулам
Число наблюдений			
Среднее			
Сумма			
Медиана			
Мода			
Геометрическое среднее			
Гармоническое среднее			

Для каждого параметра записать определение (понятие), формулу для вычисления и выполнить расчет.

Задание 2. Вычислить доверительные интервалы среднего при разных уровнях: 90 %, 95 %, 99 % и сравнить с расчетными по формулам. Проанализировать все полученные результаты и сделать выводы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА СРС

Вариант	Выборка														
1	2														
1	1,6	1,5	2,4	2,6	4,9	3,2	1,0	0,1	0,2	2,8	0,3	2,2	0,8	3,2	8,0
	0,7	4,1	0,2	0,3	0,7	3,3	3,4	4,6	0,6	0,5	4,2	3,7	0,1	0,4	1,2
	4,5	1,6	1,5	9,6	4,0	0,3	0,7	7,3	2,5	2,1	2,7	0,3	0,9	4,9	0,1
	1,2	0,5	0,3	1,4	2,8	0,6	1,4	0,8	1,1	0,9	0,4	1,2	0,2	0,1	0,8
2	1,4	0,6	3,6	3,6	3,4	3,7	3,7	3,6	5,8	0,6	8,3	0,6	5,6	3,8	3,4
	2,0	3,3	3,6	0,6	7,0	1,2	0,7	2,1	3,0	7,5	1,2	5,1	5,7	4,5	3,0
	1,3	2,1	3,7	6,4	1,0	3,7	3,7	0,9	2,2	2,4	3,4	1,3	5,7	1,4	1,2
	0,6	3,6	3,4	0,7	3,7	1,6	1,1	1,3	2,2	3,7	3,5	2,3	3,2	2,7	1,4
3	0,1	1,2	0,5	2,4	2,6	4,9	3,2	1,0	0,1	0,3	2,8	0,3	2,2	0,8	3,2
	0,7	1,5	0,2	0,3	0,7	3,3	3,4	4,6	0,6	0,5	4,2	3,7	0,1	0,4	1,2
	4,5	0,6	0,1	1,6	1,5	7,6	4,2	0,3	0,7	7,3	2,5	2,1	2,7	0,3	0,9
	4,9	0,2	1,5	1,8	0,5	2,1	0,9	1,4	0,2	1,1	0,4	5,2	0,5	1,7	1,2
4	0,0	0,4	1,5	0,7	2,9	0,3	2,1	0,6	0,2	0,3	7,4	0,2	0,1	1,3	1,5
	0,3	1,0	0,1	2,5	1,2	3,5	5,2	1,3	1,0	3,3	2,5	9,6	1,6	0,5	3,1
	0,8	1,9	0,0	0,5	1,5	2,1	3,0	2,3	1,0	2,3	1,5	2,2	1,4	0,3	0,9
	1,2	2,3	0,3	1,1	2,0	0,2	1,3	0,4	0,1	6,2	4,4	1,4	0,9	1,7	0,5
5	0,2	0,1	1,7	0,8	4,9	0,2	2,5	0,3	2,4	0,2	1,9	0,5	1,6	1,8	0,2
	2,6	1,0	0,8	4,3	1,1	0,9	2,7	0,9	5,8	1,9	0,3	2,6	1,0	0,2	1,2
	1,1	2,6	1,5	2,6	0,4	0,5	0,5	0,2	2,6	1,3	0,4	0,1	2,3	0,3	1,2
	0,2	2,0	1,1	0,8	1,7	3,9	1,8	2,9	0,4	2,3	3,5	0,7	4,1	1,5	0,3
6	1,8	0,4	1,5	1,7	0,2	2,4	1,0	0,7	4,0	1,1	0,9	2,5	0,8	5,4	1,8
	0,3	2,4	0,9	0,1	1,1	1,0	2,5	1,4	2,5	0,2	0,5	0,4	0,2	2,4	1,2
	0,4	0,1	2,2	0,3	1,1	0,2	1,9	1,0	0,8	1,6	0,8	1,1	1,3	0,9	1,6
	0,3	0,3	0,8	0,1	0,1	3,6	3,0	0,3	0,7	1,3	0,8	1,2	2,6	1,3	1,1
7	0,1	6,5	0,7	0,2	1,6	2,5	7,0	0,7	4,6	5,2	4,0	2,5	0,8	1,6	3,2
	5,9	0,5	3,2	0,9	0,1	3,1	3,0	2,9	3,2	3,3	3,1	5,3	0,1	7,8	0,2
	5,1	3,3	2,9	1,5	2,8	3,1	3,2	0,4	1,7	1,9	2,9	0,8	5,5	0,9	0,7
	0,1	3,1	2,9	0,2	3,2	1,1	0,6	0,8	1,7	3,0	1,8	2,7	2,2	0,9	5,1
8	3,3	0,8	2,9	3,2	0,3	4,5	1,8	1,4	7,5	2,0	1,6	4,7	1,5	9,8	3,4
	0,5	4,6	1,7	0,1	2,1	1,9	4,6	2,7	4,6	0,3	0,9	0,8	0,4	4,5	2,3
	0,7	0,1	4,1	0,6	2,0	0,3	3,5	2,0	1,4	3,0	1,4	2,2	2,5	1,8	3,0
	0,5	0,5	1,5	0,3	0,2	6,7	5,6	0,6	1,3	2,5	1,5	2,3	4,8	2,5	2,1
9	4,1	1,5	3,1	1,8	1,7	1,2	2,9	1,9	3,3	1,6	3,5	2,8	2,3	2,1	2,2
	5,5	3,5	4,6	6,0	2,1	1,4	1,3	1,2	4,7	2,9	3,4	3,5	2,3	5,1	3,2
	1,8	6,1	2,2	5,5	3,4	3,5	2,3	1,2	1,2	1,3	2,5	1,8	7,8	5,6	3,5
	3,0	1,5	1,5	3,4	4,2	5,0	3,5	7,0	6,4	5,0	3,5	2,8	7,3	2,7	3,5
10	2,9	0,7	2,5	2,8	0,3	4,0	1,6	1,2	6,6	1,8	1,4	4,2	1,4	9,0	3,0
	0,5	4,1	1,5	0,1	1,9	1,7	4,1	2,4	4,1	0,3	0,8	0,7	0,3	4,0	2,0
	0,6	0,1	3,6	0,5	1,8	0,3	3,1	1,7	1,3	2,6	1,3	1,9	2,2	1,6	2,6
	0,5	0,4	1,4	0,2	0,2	6,0	5,0	0,6	1,2	2,2	1,3	2,0	4,3	2,2	1,1
11	5,1	2,5	4,1	2,8	2,7	2,2	3,9	2,9	4,3	2,6	4,5	3,8	3,3	3,1	3,2
	6,5	4,5	5,6	7,0	3,1	2,4	2,3	2,2	5,7	3,9	4,4	4,5	3,3	6,1	4,2
	2,8	7,1	3,2	6,5	4,4	4,5	3,3	2,2	2,2	2,3	3,5	2,8	8,8	6,6	4,5
	4,0	2,5	2,5	4,4	5,2	6,0	4,5	8,0	7,4	6,0	4,5	3,8	8,3	3,7	4,5

Окончание таблицы

1	2														
12	5,5	2,0	4,2	2,4	2,2	1,6	3,9	2,6	4,4	2,1	4,7	3,8	3,1	2,8	2,9
	7,3	4,7	6,2	8,0	2,8	1,9	1,8	1,6	6,2	3,9	4,6	4,7	3,0	6,8	4,3
	2,5	2,1	3,0	7,4	4,5	4,7	3,1	1,6	1,6	1,7	3,3	2,4	9,6	7,5	4,7
	4,0	2,0	1,9	4,6	5,7	4,6	9,3	8,5	6,7	4,7	3,7	9,8	3,6	4,7	2,9
13	2,5	0,6	2,2	2,5	0,3	3,5	1,4	1,1	5,7	1,5	1,2	3,6	1,2	7,8	2,6
	0,4	3,5	1,3	0,1	1,6	1,5	3,6	2,1	3,6	0,2	0,7	0,6	0,3	3,5	1,8
	0,6	0,0	3,2	0,5	1,5	0,2	2,7	1,5	1,1	2,3	1,1	1,7	1,9	1,3	2,3
	0,4	0,4	1,2	0,2	0,2	5,2	4,3	0,5	1,0	1,9	1,2	1,8	3,7	1,9	1,6
14	6,1	3,5	5,1	3,8	3,7	3,2	4,9	3,9	5,3	3,6	5,5	4,8	4,3	4,1	4,2
	7,5	5,5	6,6	8,0	4,1	3,4	3,3	3,2	6,7	4,9	5,4	5,5	4,3	7,1	5,2
	3,8	8,1	4,2	7,5	5,4	5,5	4,3	3,2	3,2	3,3	4,5	3,8	9,8	7,6	5,5
	5,0	3,5	3,5	5,4	6,2	7,0	5,5	9,0	8,4	7,0	5,5	4,8	9,3	4,7	5,5
15	2,1	0,5	1,8	2,0	0,2	2,9	1,2	0,9	4,7	1,3	1,0	3,0	1,0	6,5	2,1
	0,3	2,9	1,1	0,0	1,3	1,2	2,9	1,7	2,9	0,2	0,6	0,5	0,2	2,9	1,5
	0,5	0,0	2,6	0,4	1,3	0,2	2,2	1,2	0,9	1,9	0,9	1,4	1,6	1,1	1,9
	0,3	0,3	1,0	0,2	0,2	4,3	3,6	0,4	0,8	1,6	1,0	1,4	3,1	1,6	1,3
16	5,9	3,8	5,1	4,0	3,9	3,6	4,9	4,1	5,3	3,9	5,4	4,9	4,5	4,3	4,4
	7,0	5,4	6,3	7,4	4,3	3,7	3,7	3,6	6,3	4,9	5,3	5,4	4,4	6,7	5,2
	4,1	7,5	4,4	7,0	5,3	5,4	4,4	3,6	3,6	3,6	4,6	4,1	8,8	7,1	5,4
	5,0	3,8	3,8	5,3	6,0	5,4	8,2	7,7	6,6	5,4	4,8	8,5	4,7	5,4	5,9
17	6,3	3,3	5,1	3,7	3,5	3,0	4,9	3,8	5,4	3,4	5,6	4,8	4,2	4,0	4,1
	7,8	5,6	6,8	8,4	4,0	3,2	3,1	2,9	6,9	4,9	5,5	5,6	4,2	7,4	5,3
	3,7	8,5	4,1	7,9	5,4	5,6	4,2	3,0	3,0	3,0	4,4	3,7	9,7	7,9	5,6
	5,0	3,3	3,2	5,5	6,4	7,3	5,5	9,5	8,8	7,3	5,6	4,8	9,9	4,6	5,6
18	4,1	4,2	3,0	1,9	2,0	2,1	3,2	2,5	8,5	6,3	4,2	3,7	2,2	2,3	4,1
	4,9	5,7	4,2	7,7	7,1	5,7	4,2	3,5	7,8	3,4	4,2	4,8	2,2	3,8	2,5
	2,4	1,9	3,6	2,6	4,0	2,3	4,2	3,5	3,0	2,8	2,9	6,2	4,2	5,3	6,7
	2,8	2,1	2,0	1,9	5,4	3,6	4,1	4,2	3,0	5,8	3,9	2,5	6,8	2,9	6,2
19	2,4	0,6	2,0	2,3	0,2	3,2	1,3	1,0	5,3	1,4	1,1	3,4	1,1	7,3	2,4
	0,4	3,3	1,2	0,0	1,5	1,4	3,3	1,9	3,3	0,2	0,7	0,6	0,3	3,2	1,6
	0,5	0,0	2,9	0,4	1,4	0,2	2,5	1,4	1,0	2,1	1,0	1,5	1,8	1,3	2,1
	0,4	0,4	1,1	0,2	0,2	4,8	4,0	0,5	0,9	1,8	1,1	1,6	3,4	1,8	1,5
20	3,8	2,1	4,0	3,3	2,8	2,6	2,7	6,0	4,1	5,1	6,5	2,6	1,9	1,8	1,7
	5,2	3,4	3,9	4,0	2,8	5,6	3,7	2,5	6,6	2,7	6,0	3,9	4,0	2,8	1,7
	1,8	1,9	2,9	2,3	8,3	6,1	4,3	3,5	2,0	2,1	3,9	4,7	5,5	3,9	7,5
	6,9	5,5	4,0	3,3	7,8	3,4	3,8	4,6	1,9	3,6	2,3	2,2	1,7	3,4	2,4

2.2. Графическое представление статистического распределения

Студент должен

освоить понятия: частота, относительная и накопленная частота, группированный и интервальный статистический ряд;

приобрести навыки: построения таблиц частот, гистограммы, полигона, графика эмпирической функции распределения вероятностей $F(x)$.

Построение таблиц частот и гистограмм

Статистический ряд – это варианты, расположенные в порядке возрастания их значений с соответствующими им весами.

Статистический ряд называется дискретным, если он представляет собой выборку значений дискретной случайной величины.

Ряд называется непрерывным (интервальным), если он представляет выборку непрерывной случайной величины.

Частотой варианты x_i называется число (n_i), показывающее сколько раз эта варианта встречается в выборке.

Частостью или относительной частотой или долей варианты называется число $w_i = n_i / n$.

Частоты и частости называют весами. Пусть x – некоторое число. Тогда количество вариант x_i, значения которых меньше x, называется накопленной частотой (n_x)

$$n_x = \sum_{x_i < x} n_i \text{ или } n_x = \sum_{j=1}^{i} n_j, \quad \left(i = \overline{1,k}\right).$$

Отношение накопленной частоты к общему числу наблюдений n называется накопленной относительной частотой.

$$\frac{n_x}{n} = \sum_{i=1}^{i} n_j / n.$$

На некоторых этапах статистического анализа необходимо исходную выборку представить в группированном виде (группированный статистический ряд), что позволит получить общее представление о законе распределения случайной величины X.

Последовательность процедуры группировки неупорядоченной выборки из генеральной совокупности состоит из следующих этапов:

1) Формирование вариационного ряда.

2) Выделение max и min элементов выборки ($x_{min} = x_1$, $x_{max} = x_n$) для вычисления размаха: $R = x_{max} - x_{min}$.

3) Определение числа интервалов (k) группировки осуществляется из соображений точности и устанавливается либо эмпирическим путем в зависимости от объема выборки либо определяется природой явления или условия проведения эксперимента либо по формуле Стерджерса

$$k = 1 + 1{,}4\, ln(n).$$

Округление при нахождении k осуществляется до ближайшего целого числа.

4) Определение ширины интервалов группирования (при равноточном группировании)

$$h = R/k = (x_{max} - x_{min}) / k.$$

Однако длины разрядов не обязательно брать равными друг другу, бывают ситуации, когда это даже неудобно.

Границы разрядов удобно принимать «круглыми» числами.

Если при вычислении h необходимо округлить результат, следует помнить, что последний интервал группирования будет меньше ширины h при округлении в большую сторону и больше h при округлении в меньшую сторону.

5) Формирование последовательности границ интервалов разбиения.

Полученный ряд будет иметь следующий вид:

$$x_1, (x_1+h), x_1+2h, \dots x_1+(k-1)\cdot h \cdot x_n.$$

6) Определение количества элементов выборки (частоты), попавших в каждый интервал.

В итоге интервальный ряд можно представить таблицей, которая называется группированным статистическим рядом, в верхней строке таблицы указаны границы интервалов или середины интервалов группировки, а в нижней – соответствующие им частоты (n_i) или относительные частоты.

Для наглядности представления выборки используют графические изображения вариационных и статистических рядов в виде полигонов, гистограммы и кумуляты.

Полигон частот, как правило, служит для изображения дискретного вариационного ряда и представляет собой ломаную, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, n_i), $i=\overline{1,k}$.

Для интервального ряда также строится полигон, только его ломаная проходит через точки $(x_i + x_{i+1}) / 2$, n_i, $i=\overline{1,k}$.

Полигон относительных частот получается из полигона частот сжатием по оси «$0Y$» в n раз.

Гистограмма служит только для представления интервальных вариационных рядов и имеет вид ступенчатой фигуры из прямоугольников с основаниями, равными длине интервалов $\left(i=\overline{1,n}\right)$. Площадь ступенчатой фигуры в этом случае равна объему выборки (n).

Аналогично строится гистограмма относительных частот. Площадь соответствующей ступенчатой фигуры равна единице.

При увеличении объема выборки и уменьшением интервала группировки гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности распределения $f(x)$ генеральной совокупности, что соответствует условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Если на гистограмме соединить середины верхних сторон прямоугольников, то полученная ломаная образует полигон относительных частот. Гистограмму можно рассматривать как график эмпирической (выборочной) плотности распределения $f(x)$. Если у теоретического распределения существует конечная плотность, то эмпирическая плотность является некоторым приближением для теоретической.

Кумулятивная кривая (кумулята **)** – график (кривая) накопленных частот (частостей), строящаяся аналогично гистограмме с тем различием, что для расчета высот прямоугольников берутся не простые, а накопленные относительные частоты. Эти величины не убывают, поэтому график накопленных частот имеет вид ступенчатой «лестницы» (от 0 до 1). График эмпирической функции распределения проходит через правые верхние углы прямоугольников. Для дискретного ряда кумулята представляет ломанную, соединяющую точки $(x_i, n_i^{\text{нак}})$ или $(x_i, w_i^{\text{нак}})$, $i = 1,2,\dots, k$. Для интервального статистического ряда ломаная начинается с точки, абсцисса которой равна началу первого интервала, а ордината – накопленной частоте (частости), равной нулю. Другие точки этой ломанной соответствуют концам интервалов.

График накопленных частот и эмпирическая функция распределения на практике используются для приближения теоретической функции распределения.

Статистический ряд является статистическим аналогом (реализацией) распределения признака (случайной величины X). В этом смысле полигон (гистограмма) аналогичен кривой распределения, а эмпирическая функция распределения – функции распределения случайной величины X.

Выполнение примера в пакете Statistica

Построение статистического ряда

В переключателе модулей главного меню выбираем «*Анализ*»→ «*Основные статистики и таблицы*» → «*Описательные статистики*» и открывается диалоговое окно «*Описательные статистики: Таблица данных* 1», в котором выбираем вкладку «*Нормальность*» (рис. 2.8).

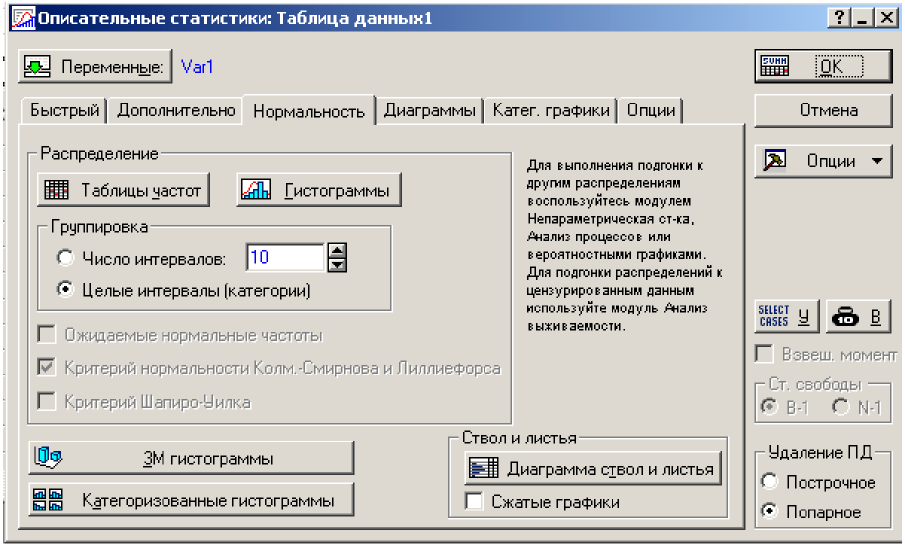


Рис. 2.8. Окно для создания таблицы частот

На этой вкладке в списке переменных устанавливаем имя переменной (*Var*1 – данные из работы № 1), выбираем категорию «*Целые интервалы (категории)*» и нажимаем кнопку «*Таблицы частот*».

	Таблица частот: Var1 (Таблица данных1)			
Категория	**Частота**	Кумул. частота	Процент	Кумул. процент
5	2	2	10,00000	10,0000
6	1	3	5,00000	15,0000
7	1	4	5,00000	20,0000
8	1	5	5,00000	25,0000
10	1	6	5,00000	30,0000
11	5	11	25,00000	55,0000
12	1	12	5,00000	60,0000
13	2	14	10,00000	70,0000
14	2	16	10,00000	80,0000
15	1	17	5,00000	85,0000
17	2	19	10,00000	95,0000
19	1	20	5,00000	100,0000

Рис. 2.9. Таблица частот статистического ряда

Открывается таблица значений статистического ряда (рис. 2.9) с параметрами: частота, накопленная (кумулятивная) частота, относительная частота в %, накопленная (кумулятивная) относительная частота %. В первом столбце «*Группа, Категория*» указываются значения вариантов выборки (x_i).

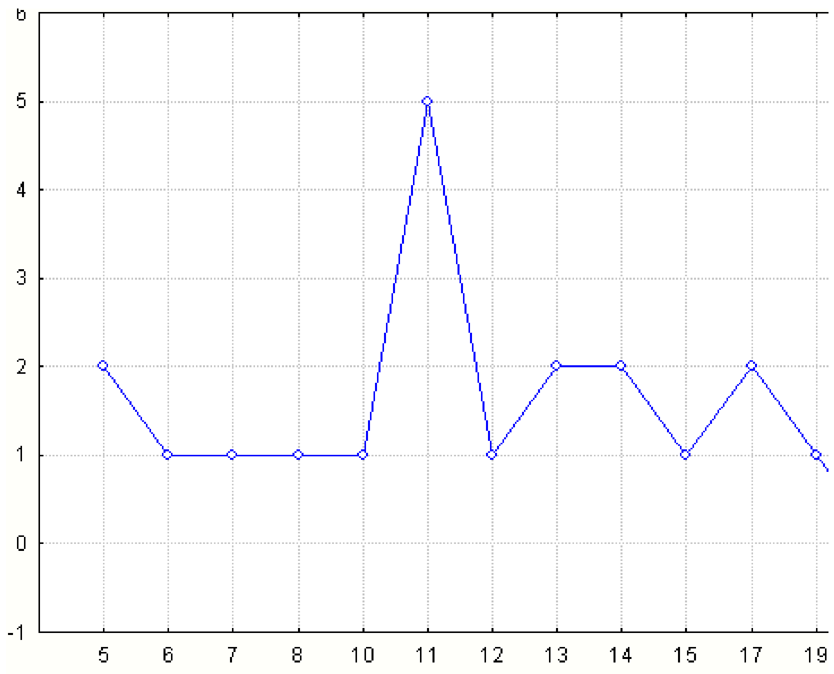


Рис. 2.10. Полигон частот

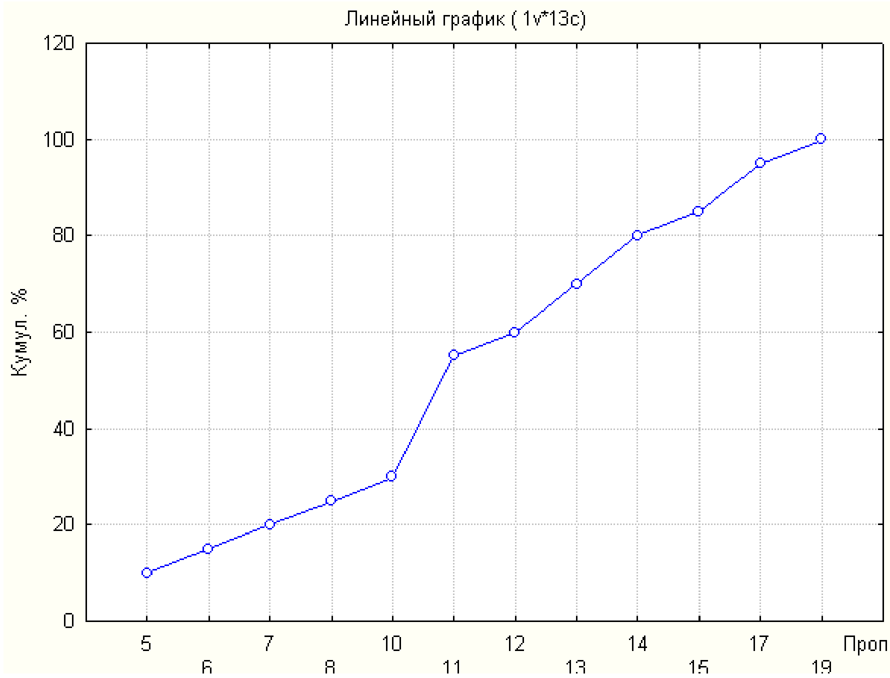


Рис. 2.11. График накопленных относительных частот

По данным таблицы (рис. 2.9) можно построить полигон частот (рис. 2.10) и график накопленных относительных частот (рис. 2.11), выполнив следующие действия.

Правой кнопкой мыши по заголовку 3-го столбца вызываем меню, в котором выбираем «*Графики блоковых данных*» и далее «*Линейный график: По столбцам*».

Выполнив аналогичные действия по другим столбцам получим соответствующие графики.

Построение группированного статистического ряда

Для проведения группировки выборки с заданными параметрами предварительно нужно определить число групп (интервалов группировки)

$$k \approx 1 + 1{,}4 \cdot \ln(n) \approx 1 + 1{,}4 \cdot \ln(20) = 5{,}19 \approx 5.$$

Здесь n – объем выборки. Полученное k округляется до целого числа. Определяется ширина интервалов группировки:

$$b = R / k = 14 / 5 = 2{,}8 \approx 3.$$

Здесь R – размах варьирования, ранее вычисленный и равный 14.

Значение ширины интервала группировки должно быть удобным для построения гистограмм, поэтому округляем до ближайшего целого.

В стартовой панели модуля «*Основные статистики и таблицы*» выберем процедуру «*Таблицы частот*» (рис. 2.12).

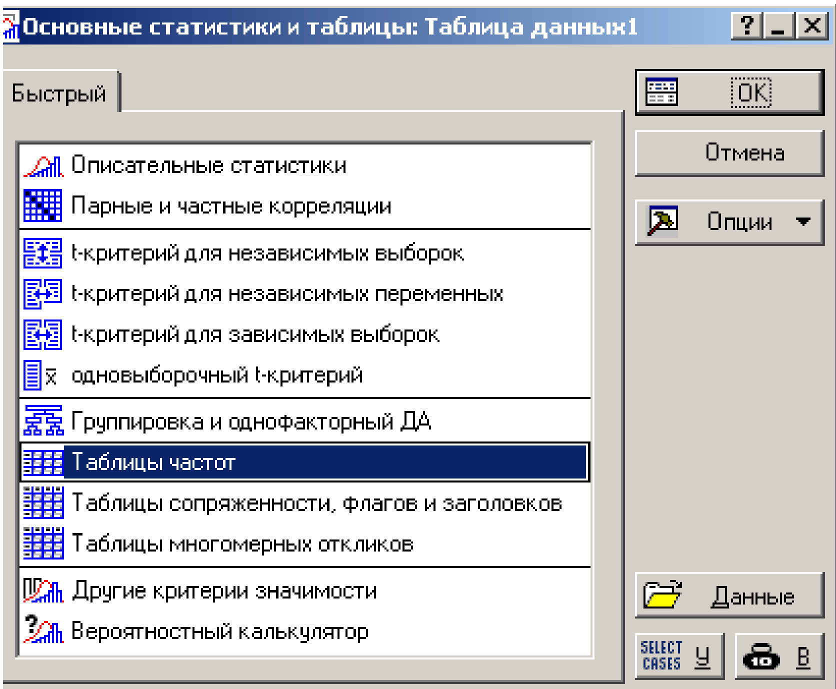


Рис. 2.12. Таблицы частот

В диалоговом окне (рис. 2.13) если сделать активным переключатель «*Все значения*», то получим таблицу частот статистического ряда, аналогичную на рис. 2.9.

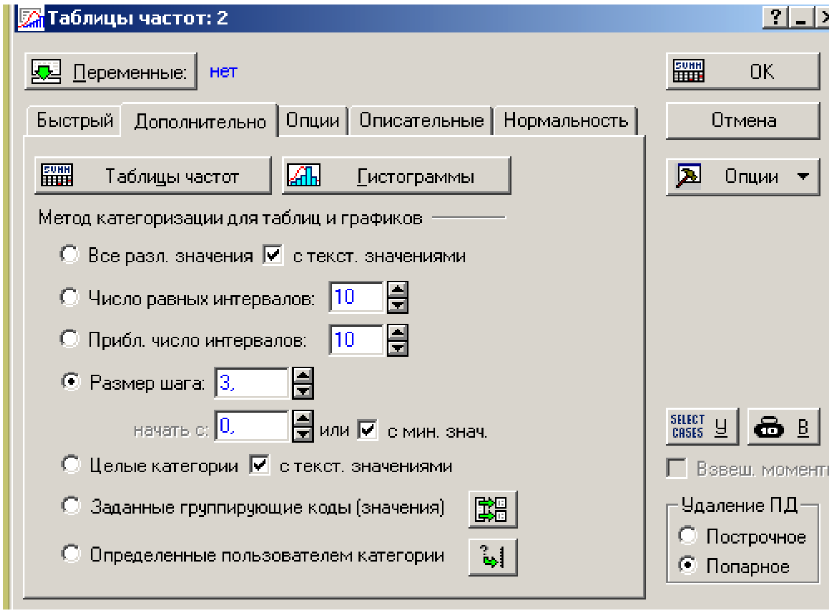


Рис. 2.13. Диалоговое окно установки параметров группировки

Для выполнения группировки можно задать либо «*Размер шага*» – интервал группировки (при этом даже не обязательно задавать начальное значение, программа может сделать это автоматически при установленной «галочке» напротив слов «*с минимального значения*»), либо просто задать количество, предварительно рассчитанных интервалов в списке «*Число равных интервалов*». Остальные параметры группировки устанавливаются автоматически.

В таблице (рис. 2.14) представлен сгруппированный статистический ряд, для которого расчетным путем получен размер шага – 3.

	Таблица частот: Var1 (2)			
От До	**Частота**	Кумул. частота	Процент	Кумул. процент
5,000000<=x<8,000000	4	4	20,00000	20,0000
8,000000<=x<11,00000	2	6	10,00000	30,0000
11,00000<=x<14,00000	8	14	40,00000	70,0000
14,00000<=x<17,00000	3	17	15,00000	85,0000
17,00000<=x<20,00000	3	20	15,00000	100,0000

Рис. 2.14. Результаты группировки выборки

Для построения гистограммы воспользуемся этим же окном (рис. 2.13), в котором присутствует кнопка «*Гистограммы*». Итоговый вид гистограммы представлен на рис. 2.15. Кривая наложенная на гистограмму – график плотности нормального распределения с математическим ожиданием равным 11,5 и средним квадратическим отклонением равным 3,95.

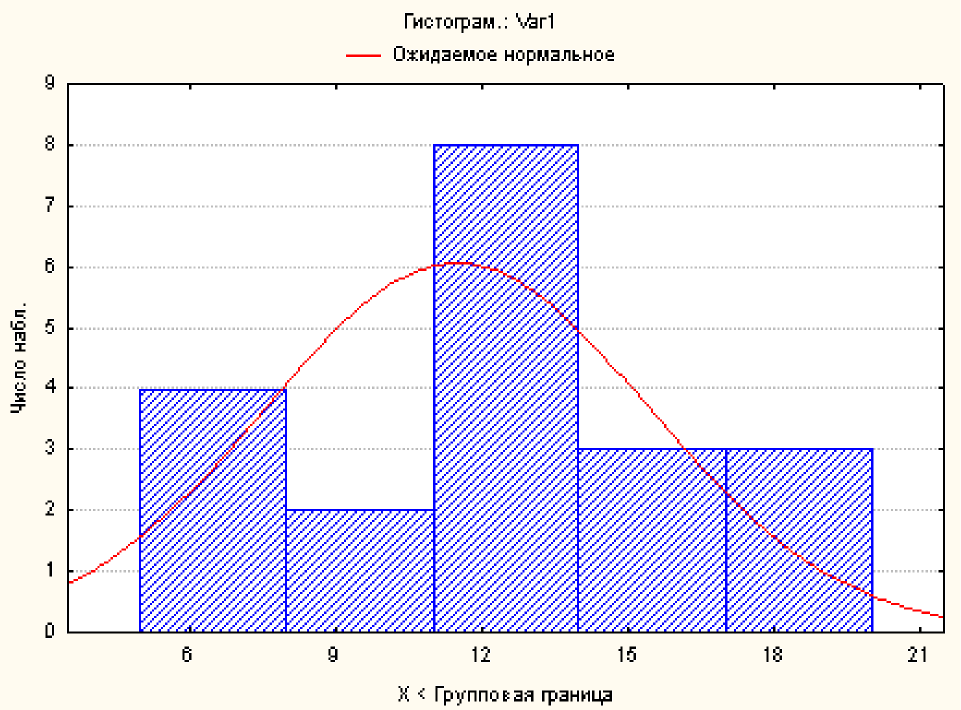


Рис. 2.15. Итоговый вид гистограммы

Контрольные вопросы

1. Как построить эмпирическую функцию распределения?

2. Какие статистики относятся к показателям формы?

3. Назовите показатели, описывающие закон распределения.

4. Дайте определение параметра гармоническое среднее.

5. Как формируется таблица частот?

6. Что показывает график накопленных относительных частот?

7. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?

8. В каких случаях строится полигон частот и что он характеризует?

9. Что такое полигон и гистограмма эмпирического распределения?

10. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание 1

Дана выборка выручки магазина за последние 30 дней. Составьте статистический и интервальный ряд, таблицу частот, постройте гистограмму, полигон, статистическую функцию распределения вероятностей. Выполните анализ результатов и сделайте вывод.

Вариант	Выборка														
1	18	19	21	18	16	19	18	16	17	18	15	22	18	17	22
	14	19	16	14	14	22	14	21	18	16	12	19	18	18	15
2	22	23	23	22	21	20	21	18	16	22	18	25	13	23	18
	24	21	17	19	27	26	25	21	26	19	24	20	18	23	18
3	37	32	29	32	28	32	33	35	30	36	32	28	34	32	32
	27	32	38	38	32	29	30	39	39	31	30	31	39	29	33
4	46	43	36	44	39	47	41	47	41	50	50	49	41	40	50
	45	46	47	44	48	46	48	46	51	41	47	51	52	40	47
5	72	74	69	71	73	68	73	77	76	77	76	76	76	64	65
	75	70	75	71	69	72	69	78	72	67	72	81	75	72	69
6	52	51	46	43	50	50	53	57	48	55	56	45	55	51	55
	41	54	60	52	52	59	49	51	50	47	49	57	54	54	42
7	44	44	46	45	49	44	47	47	36	37	35	40	35	39	41
	34	38	42	44	42	35	43	45	39	33	39	45	47	41	45
8	59	60	65	50	55	64	66	63	55	62	60	58	67	58	65
	63	59	57	65	56	66	59	59	60	61	65	59	50	64	63
9	55	71	66	74	71	70	68	76	75	73	65	75	73	70	67
	59	63	68	65	65	81	69	64	57	58	68	70	71	71	71
10	65	72	69	68	62	71	74	74	70	67	76	73	79	77	70
	65	70	66	75	66	74	75	84	87	71	69	67	67	75	60
11	68	63	72	62	58	77	67	67	71	72	75	73	70	66	73
	70	69	78	73	64	71	69	73	71	71	68	65	66	69	74
12	18	19	21	18	16	19	18	16	17	18	15	22	18	17	22
	14	19	16	14	14	22	14	21	18	16	12	19	18	18	15

Задание 2

2.1. Длины танкеров проходящих через канал (в метрах) таковы:

66	56	96	80	71
93	77	96	75	61
69	61	51	84	58
73	77	89	69	92
57	56	55	78	96

Пошлина собирается со всех танкеров, длина которых превышает 60 м. Постройте огиву, которая поможет ответить на следующий вопрос: Какая доля танкеров пройдет, не уплачивая пошлины?

2.2. В среднем рыболовное судно вылавливает за один рейс 5 тыс. кг рыбы. Данные улова в 20 последних рейсах судна следующие:

6500	6700	3400	3600	2000
7000	5600	4500	8000	5000
4600	8100	6500	9000	4200
4800	7000	7500	6000	5400

Постройте огиву, которая поможет ответить на следующий вопросы. Какова доля среднестатистического улова? Каков улов в 80 % случаев? Каков средний размер улова?

2.3. В течение 50 дней фиксировалось время для набора титульного листа журнала «Энергетик». Данные представлены в таблице:

20,8	28,0	21,9	20,0	20,7	20,9	25,0	22,0	28,0	20,1
25,3	20,7	25,0	21,2	23,8	23,3	20,9	29,0	23,5	19,5
23,7	20,3	23,6	19,0	25,1	25,0	19,5	24,1	24,2	21,8
21,3	21,5	23,1	19,9	24,2	24,1	19,8	23,9	28,0	23,9
19,7	24,2	23,8	20,7	23,8	24,3	21,1	20,9	21,6	27,0

Представьте данные в форме вариационного ряда. Постройте частотное распределение и распределение накопленных частот, используя интервал в 0,8 мин. Постройте полигон частот и огиву. Определите процент случаев, в котором страница набирается не более чем за 24 мин.

2.4. Данные, отражающие еженедельный рост растения (в сантиметрах), следующие:

0,4	1,9	1,5	0,9	0,3	1,6	0,4	1,5	1,2	0,8
0,9	0,7	0,9	0,7	0,9	1,5	0,5	1,5	1,7	1,8

Представьте данные в виде вариационного ряда. Используя интервалы длины 0,25, постройте гистограмму относительных частот. Постройте огиву и определите долю растений, которые вырастают более, чем на 1 см в неделю. Какова величина среднего еженедельного роста растения?

2.5. За время работы больницы собраны данные, отражающие скорость прибытия автомобиля реанимации к пациенту:

Время ожидания, мин									
12	16	21	20	24	3	11	17	29	18
26	4	7	14	25	1	27	15	16	5

Представьте данные в виде вариационного ряда. Исходя из этого, что можно сказать о времени ожидания группы реанимации? Используя 6 классов, постройте гистограмму частот. Как долго ждут автомобиля реанимации 75 % пациентов?

2.6. Менеджер компании фиксирует время (в мин.), которое идет на переналадку и текущий ремонт оборудования электросети в течение рабочей смены. Результаты 35 последних наблюдений приведены ниже:

60	72	126	110	91	115	112
80	66	101	74	93	129	105
113	121	93	87	119	111	97
102	116	114	107	113	119	100
110	99	139	108	128	84	99

Представьте данные в виде вариационного ряда. Если среднее время простоя оборудования составляет 108 мин., то в скольких случаях оборудование простаивало более 108 мин., а в скольких – менее? Постройте график относительных накопленных частот с 10-минутными интервалами.

2.7. Производительность труда бригады высоковольтных монтажников (в метрах электролинии за смену) следующая:

356	331	299	391	364	317	386
360	281	360	402	411	390	362
311	357	300	375	427	370	383
322	380	353	371	400	379	380
369	393	377	389	430	340	368

Постройте график относительных накопленных частот с шестью равными интервалами. В скольких случаях производительность была ниже 380 м за смену, а в скольких – выше?

2.8. Менеджер по техническому обеспечению в крупной энергокомпании проверил партию болтов, полученную от нового поставщика. 25 болтов из этой партии были отправлены на экспертизу для определения на экспертизу для определения предельного усилия на излом. Результаты экспертизы приведены в тыс. кг:

67,0	62,3	56,8	64,0	66,1
54,4	60,5	64,5	62,9	57,0
64,4	59,3	58,9	64,0	61,2
56,7	58,5	64,4	53,8	60,3
68,5	57,0	57,3	63,9	62,7

Представьте данные в виде вариационного ряда. Какая часть болтов содержит усилие более, чем 54434 кг, а какая часть – более, чем 68040 кг?

По стандарту, болт должен выдерживать усилие не менее чем 63504 кг. Какая доля выборки окажется непригодной для использования?

2.3. Проверка гипотез о виде функции распределения

Студент должен

освоить понятия: статистическая гипотеза, статистический критерий, ошибки первого и второго рода, нулевая и альтернативная гипотезы, критическая область;

приобрести навыки: применения статистических гипотез для проверки принадлежности генеральной совокупности, представленной выборочными данными, к тому или иному типу распределений, используя критерий χ^2-Пирсона.

Основные теоретические положения

С теорией статистического оценивания параметров тесно связана проверка статистических гипотез. Она используется всякий раз, когда необходим обоснованный вывод о преимуществах того или иного способа инвестиций, измерений, технологического процесса, об эффективности нового метода обучения, управления, об уровне доходности ценных бумаг, о значимости математической модели и т.д.

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения. Проверяемую гипотезу обычно называют *нулевой* (или *основной)* и обозначают H_0. Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают *альтернативную,* или конкурирующую, гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Нулевая и альтернативная гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез.

Суть проверки статистической гипотезы заключается в том, что используется специально составленная выборочная характеристика (статистика) $\overline{\theta}_n$ $(x_1,..., x_n)$, полученная по выборке X_1, ..., X_n, точное или приближенное распределение которой известно. Затем по этому выборочному распределению определяется критическое значение $\theta_{кр}$ – такое, что если гипотеза H_0 верна, то вероятность $P(\overline{\theta}_n > \theta_{кр}) = \alpha$ – мала. В соответствии с принципом практической уверенности в условиях данного исследования событие $\overline{\theta}_n > \theta_{кр}$ можно (с некоторым риском) считать практически невозможным. Поэтому если в данном конкретном случае обнаруживается значение статистики $\overline{\theta}_n > \theta_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается, в то время как появление значения $\overline{\theta}_n \leq \theta_{кр}$ считается совместимым с гипотезой H_0, которая тогда принимается (точнее, не отвергается). Правило, по которому гипотеза H_0 отвергается или принимается, называется статистическим критерием или статистическим тестом**.**

Таким образом, множество возможных значений статистики критерия (критической статистики) $\overline{\theta}_n$ разбивается на два непересекающихся подмножества: критическую область (область отклонения гипотезы) W и область допустимых значений (область принятия гипотезы) $\overline{W}$. Если фактически наблюдаемое значение статистики критерия $\overline{\theta}_n$ попадает в критическую область W, то гипотезу H_0 отвергают. При этом возможны четыре случая.

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, то есть отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна, называется уровнем значимости**,** или размером, критерия.

Вероятность допустить ошибку 2-го рода, т.е. принять гипотезу H_0, когда она неверна, обычно обозначают β.

Вероятность $(1 - \beta)$ не допустить ошибку 2-го рода, т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна, называется мощностью критерия.

Пользуясь терминологией статистического контроля качества продукции, можно сказать, что вероятность α представляет «риск поставщика», связанный с забраковкой по результатам выборочного контроля изделий всей партии, удовлетворяющей стандарту, а вероятность β – «риск потребителя», связанный с принятием по анализу выборки партии, не удовлетворяющей стандарту.

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода (α и β) однозначно определяются выбором критической области. Очевидно, желательно сделать как угодно малыми α и β. Однако это противоречивые требования: при фиксированном объеме выборки можно сделать как угодно малой лишь одну из величин – α или β, что сопряжено с неизбежным увеличением другой. Лишь при увеличении объема выборки возможно одновременное уменьшение вероятностей α и β.

Алгоритм построения критической области и правило принятия решения называют статистическим критерием данной гипотезы или просто критерием гипотезы. Наилучшим критерием для данной гипотезы является тот, который обеспечивает наименьшую величину вероятностей ошибок первого и второго рода.

Следует отметить, что в компьютерных статистических пакетах обычно не находятся границы критической области $\theta_{кр}$, необходимые для сравнения их с фактически наблюдаемыми значениями выборочных характеристик $\overline{\theta}_{набл}$ и принятия решения о справедливости гипотезы H_0. А рассчитывается точное значение уровня значимости *(p-valio)* исходя из соотношения $P\,(\overline{\theta}_n > \overline{\theta}_{набл}) = p$. Если p очень мало, то гипотезу H_0 отвергают, в противном случае H_0 принимают (точнее, не отвергают; при этом рассчитанное на компьютере значение p может быть удвоено при выборе двусторонней критической области).

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько основных типов:

– о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей;

– о числовых значениях параметров;

– о законе распределения;

– об однородности выборок (т.е. принадлежности их одной и той же генеральной совокупности);

– о стохастической независимости элементов выборки

Методы проверки статистических гипотез занимают центральное место в исследованиях математической статистики. Одной из важнейших групп критериев проверки статистических гипотез являются критерии проверки гипотез о виде распределений (критерии согласия). Они по выборочным данным проверяют предположение о принадлежности генеральной совокупности к тому или иному виду распределений. Одним из наиболее мощных критериев согласия является критерий Пирсона, называемый еще критерием хи-квадрат (χ^2). Его суть заключается в сравнении эмпирических частот элементов выборки n_i (для дискретных распределений) с теоретическими частотами (ожидаемыми частотами) – p_i, где p_i – вероятность принять это значение, рассчитанное по исследуемому закону распределения. Если распределение непрерывное, то строится группированный статистический ряд из k интервалов и определяется вероятность попасть в i-й интервал группировки по выражению

$$p_i = F(b_i) - F(a_i).$$

Здесь $F(x)$ – функция распределения проверяемого закона. Выборочное значение статистики вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}.$$

Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α, если $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k - r - 1)$. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Критическое значение критерия равно обратному распределению хи-квадрат со степенями свободы $\nu = (k - r - 1)$, где r – число неизвестных параметров закона распределения, оцениваемых по выборке.

Рассмотрим решение данной задачи на примере: проверить гипотезу о нормальном законе распределения для выборки объема $n = 55$, для которой найдены оценки математического ожидания ($x = 17{,}87$) и дисперсии $\sigma^2 = 8{,}62$.

В результате проведенной группировки (необходимо расширить первый и последний интервалы) получены результаты, представленные в таблице.

Таблица 2.2

Расчет критерия хи-квадрат Пирсона

<table>
<tr><th>Номер интер-вала, k</th><th>Границы интервала, Δk</th><th>Наблюдаемая частота n_k</th><th>Вероятность попадания в интервал p_k</th><th>Ожидаемая частота np_k</th><th>np_k</th><th>$n_i - np_i$</th><th>$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>-∞ – 12</td><td>2</td><td>0,0228</td><td>1,254</td><td rowspan="2">5,254</td><td rowspan="2">0,725</td><td rowspan="2">0,010</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12 – 14</td><td>4</td><td>0,0731</td><td>4,020</td></tr>
<tr><td>3</td><td>14 – 16</td><td>8</td><td>0,1686</td><td>9,273</td><td>9,273</td><td>-1,273</td><td>0,175</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16 – 18</td><td>12</td><td>0,2576</td><td>14,168</td><td>14,168</td><td>-2,168</td><td>0,332</td></tr>
<tr><td>5</td><td>18 – 20</td><td>16</td><td>0,2484</td><td>13,662</td><td>13,662</td><td>-2,338</td><td>0,400</td></tr>
<tr><td>6</td><td>20 – 22</td><td>10</td><td>0,1519</td><td>8,354</td><td rowspan="2">12,663</td><td rowspan="2">0,366</td><td rowspan="2">0,011</td></tr>
<tr><td>7</td><td>22 – +∞</td><td>3</td><td>0,0778</td><td>4,279</td></tr>
<tr><td></td><td>Сумма</td><td>55</td><td>1,0001</td><td>55</td><td>55</td><td>–</td><td>0,928</td></tr>
</table>

В четвертом столбце приведены вероятности p_i, вычисляемые по формуле для нормального закона распределения

$$p_k = \Phi\left(\frac{b_k - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_k - \bar{x}}{s}\right), \quad k = 1,2,\ldots,7,$$

где a_i и b_i – соответственно нижняя и верхняя границы интервала. Значения функции $\Phi(x)$ – функции Лапласа берутся из таблиц. В пятом столбце приводятся ожидаемые частоты np_i, а в шестом – значение np_i после объединения первых двух и последних двух интервалов. Так как после объединения осталось $k = 5$ интервалов, а по выборке определены оценки двух параметров – математического ожидания и дисперсии, то число степеней свободы равно 2. По таблице квантилей распределения хи-квадрат Пирсона находим $\chi^2 = 4{,}61$ при $\alpha = 0{,}1$. Выборочное значение критерия равно $\chi^2 = 0{,}928$, следовательно, гипотеза о нормальном распределении принимается. Правило принятия решения основывается на сравнении вычисленного значения χ^2 с критическим значением χ^2.

Допустим, что из графиков видно, что эмпирическое распределение очень похоже на теоретическое экспоненциальное распределение. А также в пользу выбора экспоненциального распределения в качестве гипотетического говорит и тот факт, что оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения достаточно близки. Известно, что в случае экспоненциального распределения эти параметры равны. Для оценки параметра λ экспоненциального распределения используем

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0,$$

где для вычисления применим $\lambda = 1/ m_x$.

Теоретические вероятности попадания случайной величины в частичные интервалы вычисляются по формуле:

$$p_i = F(z_i) - F(z_{i-1}),\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Например, $p_1 = F(0, 6) - F(0) = (1 - e^{-\lambda \cdot 0,6}) - (1 - e^{-\lambda \cdot 0})$.

Выполняя аналогичные вычисления для всех интервалов, полученные результаты заносятся таблицу. Правая граница последнего интервала принимается равной ∞, так как в случае гипотетического распределения случайная величина может принимать значения в интервале $(0; \infty)$.

В соответствии с теорией, значения np_i не должны быть меньше пяти. В таблице это должно было учтено путём объединения соответствующих интервалов. Так как экспоненциальное распределение имеет один параметр λ, то критическое значение χ^2 определяется при числе степеней свободы равном единице.

Если вычисленное значение χ^2 меньше критического, гипотеза о соответствии эмпирического и теоретического распределения принимается. Это означает, что можно рассматривать исследуемую величину как величину, распределённую по экспоненциальному закону с параметром λ.

Алгоритм использования критерия Пирсона заключается в следующем.

1. Выдвигается нуль-гипотеза: «Отличие экспериментальных даных от нормального закона распределения не существенно» и альтернативная гипотеза: «Отличие экспериментальных данных от нормального закона распределения существенно, т.е. экспериментальные данные не подчиняются закону нормального распределения».

2. По результатам экспериментальных измерений и предположению нормального закона их распределения определяется расчетное значение критерия Пирсона.

3. Определяют число степеней свободы, задаются уровнем значимости α и определяют теоретическое значение критерия Пирсона $\chi^2_{\alpha,\nu}$.

4. Если $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\nu}$, то нуль-гипотеза о нормальном законе распределения экспериментальных данных принимается с доверительной вероятностью $p = 1 - \alpha$. В противном случае нуль-гипотеза отвергается и принимается альтернативная.

Выполнение примера в пакете Statistica

Для проверки гипотезы о принадлежности генеральной совокупности нормальному виду распределений необходимо строить группированный статистический ряд, так как нормальное распределение является непрерывным.

Для вычисления статистики хи-квадрат (χ^2) запустим модуль «*Анализ*» → «*Подгонка распределений*» (рис. 2.16).

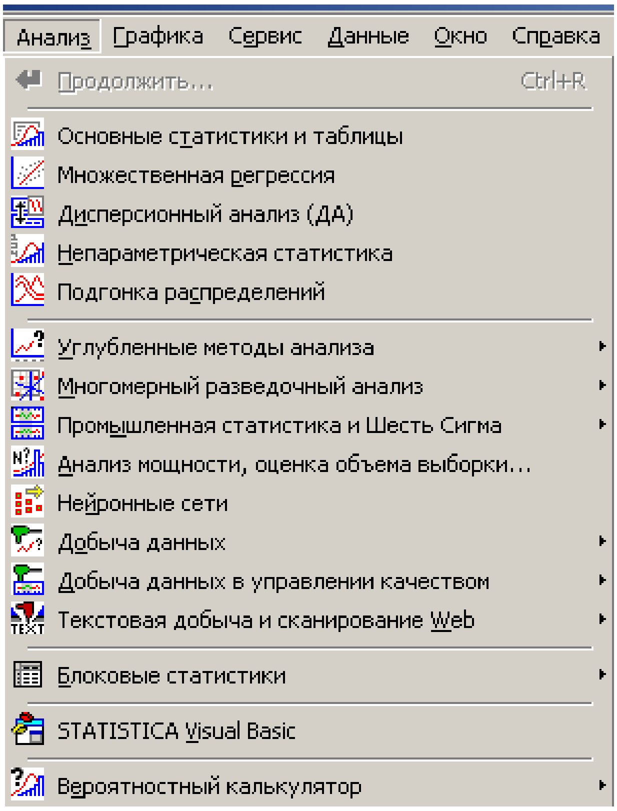


Рис. 2.16. Подгонка распределений

Методику работы разберем на следующем примере: имеется выборка прибыли (тыс. руб.) коммерческой фирмы за 40 дней:

64 56 69 78 78 83 47 65 77 57 61 52 50 58 60 48 62 63 68 64

64 64 79 66 65 62 85 75 88 61 82 52 72 75 84 66 62 73 64 74

Необходимо проверить статистическую гипотезу о том, что прибыль данной фирмы распределена по нормальному закону распределения. Взять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Для решения задачи нужно рассчитать точечные оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

В диалоговом окне (рис. 2.17) из списка непрерывных распределений выберем «*Нормальное*» → *«OK»*

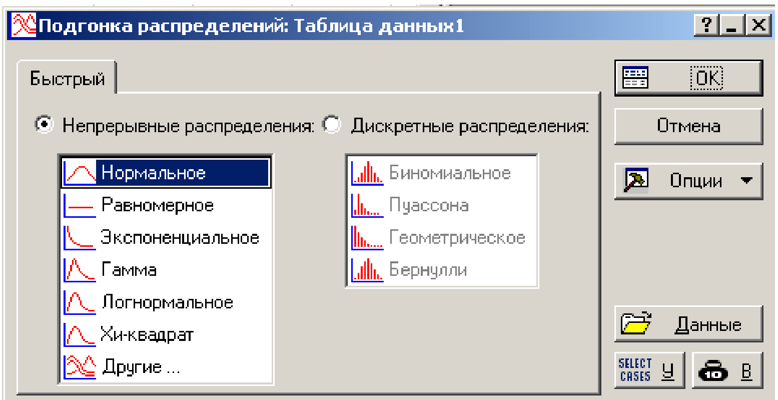


Рис. 2.17. Выбор закона распределения

В следующем окне (рис. 2.18) из списка переменных выделяем имя переменной – *Var 1*, в которую предварительно введена выборка из 40 значений. После этого на вкладке «*Параметры*» выводятся параметры нормального распределения – математического ожидания и дисперсии: среднее x = 66,95 и дисперсия s^2 =106,407.

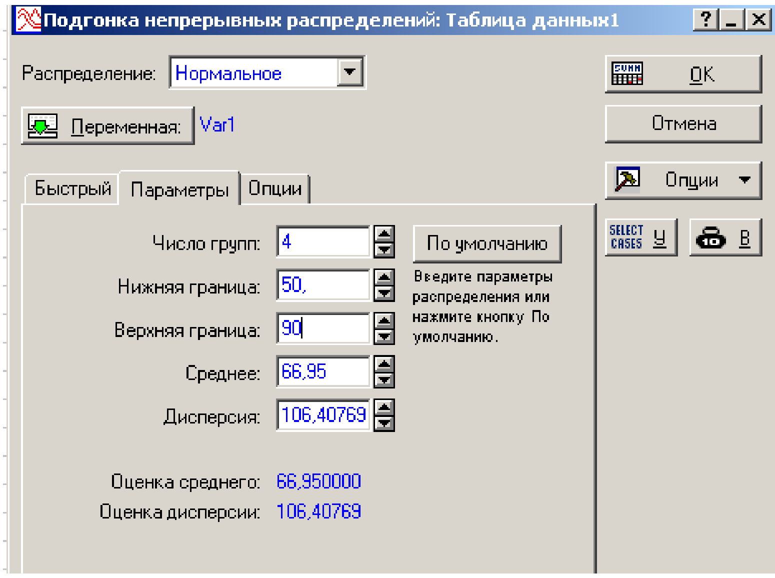


Рис. 2.18. Установка параметров группировки

Также выводятся значения автоматической группировки: число групп, нижняя и верхняя границы, которые нужно заменить на свои расчетные значения.

Установим: число групп (интервалов) = 4, нижняя граница = 50, верхняя граница = 90.

Далее необходимо вернуться на вкладку «*Быстрый*» → «*Наблюдаемые и ожидаемые частоты*» (рис. 2.19).

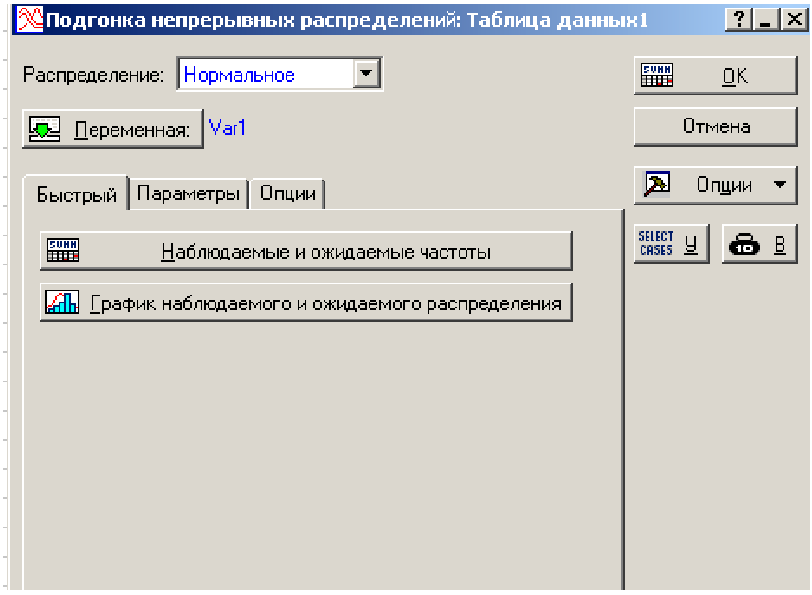


Рис. 2.19. Вывод таблицы частот и графиков

На экран выводится таблица (рис. 2.20) с расчетными значениями следующих статистик: хи-квадрат = 1,1152, число степеней свободы (*сс* = 1), уровень значимости *p* = 0,29095.

Верхняя граница	Прмн: Var1, Распред.:Нормальное (Таблица данных1) Хи-квадрат = 1,11524, сс = 1, p = 0,29095 Наблюд. частота	Кумул. Наблюд.	Процент Наблюд.	Кумул. % Наблюд.	Ожидаем. частота
<= 60,00000	9	9	22,50000	22,5000	10,00941
70,00000	17	26	42,50000	65,0000	14,64101
80,00000	9	35	22,50000	87,5000	11,23285
< бесконеч.	5	40	12,50000	100,0000	4,11673

Рис. 2.20. Таблица наблюдаемых и ожидаемых частот

Выборочный критерий хи-квадрат Пирсона (1,1152) меньше табличного (χ^2 = 3,8 при α = 0,05).

Результаты таблицы проверить расчетным путем.

Так как вычисленный уровень значимости *p* = 0,29095 превышает значение заданного уровня значимости α = 0,05, то гипотеза о нормальном распределении принимается. Таким образом, можно считать, что прибыль данной фирмы распределена по нормальному закону распределения.

Проверить это, построив графики плотностей эмпирического и теоретического распределений. Видно, что графики достаточно хорошо совпадают, что говорит о соответствии данных нормальному закону.

Далее выбираем опцию «*График наблюдаемого и ожидаемого распределения*» (рис. 2.19). После чего выходит окно с гистограммой, которая построена по заданным параметрам группировки и на ней кривая нормального распределения (рис. 2.21).

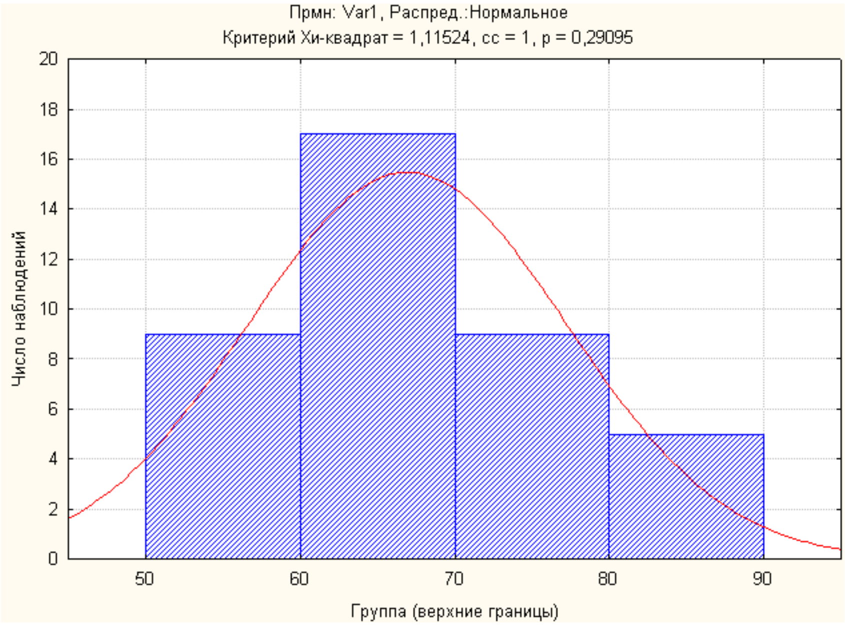


Рис. 2.21. Гистограмма ожидаемого и наблюдаемого распределения

Принимается гипотеза о том, что выборка получена из генеральной совокупности, имеющей распределение χ^2.

Контрольные вопросы

1. Что называется статистической гипотезой?

2. Что такое альтернативная или конкурирующая гипотеза?

3. Что называется статистическим критерием?

4. Дайте определение ошибок первого и второго рода.

5. Что такое критическая область?

6. Поясните, чем отличаются односторонняя и двухсторонняя критические области?

7. Какие законы распределения можно применить для построения критической области при проверке гипотезы о математических ожиданиях?

8. Какой закон распределения применяется для построения критической области в случае проверки гипотезы о дисперсиях?

9. В каких ситуациях возможна проверка конкретной гипотезы статистическими методами?

10. Какова основная идея критерия χ^2-Пирсона проверки гипотез?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание 1. Дана выборка числа посетителей Интернет – сайта за 30 дней. Проверить по критерию Пирсона на уровне значимости α = 0,02 статистическую гипотезу о том, что генеральная совокупность, представленная выборкой, имеет:

– нормальный закон распределения;

– экспоненциальный закон распределения.

Вариант	Выборка														
1	45	52	49	48	42	51	54	54	50	47	56	53	59	57	50
	45	50	46	55	46	54	55	64	67	51	49	47	47	55	40
2	48	43	52	42	38	57	47	47	51	52	55	53	50	46	53
	50	49	58	53	44	5	49	53	51	51	48	45	46	49	54
3	65	81	76	84	81	80	78	86	85	83	75	85	83	89	77
	69	73	78	75	75	91	79	74	67	68	78	80	81	81	81
4	75	82	79	78	72	81	84	84	80	77	86	83	89	87	80
	75	80	76	85	76	84	85	94	97	81	79	77	77	85	70
5	78	73	82	72	68	87	77	77	81	82	85	83	80	76	83
	80	79	88	83	74	81	79	83	81	81	78	75	76	79	84
6	70	59	57	62	49	63	59	60	57	66	64	57	59	58	59
	56	62	56	57	63	59	55	58	62	61	60	59	59	61	63
7	39	41	35	41	42	38	41	41	36	45	40	39	41	41	40
	42	45	39	39	35	41	36	36	39	41	43	40	41	38	44
8	15	31	26	34	31	30	28	36	35	33	25	35	33	30	27
	19	23	28	25	25	41	29	24	17	18	28	30	31	31	31
9	25	32	29	28	22	31	34	34	30	27	36	33	39	37	30
	25	30	26	35	26	34	35	44	47	31	29	27	27	35	20
10	59	60	65	50	55	64	66	63	55	62	60	58	67	58	65
	63	59	57	65	56	66	59	59	60	61	65	59	50	64	63
11	40	41	37	37	40	42	39	43	38	41	45	44	48	43	28
	39	41	39	38	44	37	41	42	45	40	43	35	44	44	44
12	54	59	55	57	44	42	52	55	49	53	51	50	61	59	53
	46	47	44	52	49	48	56	40	52	46	46	45	52	59	57

Задание 2. Смоделируйте несколько выборок объема 200 из нормального, экспоненциального и равномерного распределений и проверьте соответствующие гипотезы по критерию χ^2.

Рекомендации. Для моделирования выборки из непрерывного распределения с функцией распределения $F(x)$, нужно сначала получить выборку из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение

R(0,1), а затем использовать функцию, обратную к функции распределения *F*(*x*), соответствующей случайной величины. В пакете *Statistica* распределение *R*(0,1) моделируется с помощью функции: = *rnd*(1).

Двойной левый щелчок по заголовку исходной электронной таблицы, например *Var*3, открывает окно спецификации с именем выбранной переменной. В поле « *Длинное имя»* этого окна вводим нужную функцию: = *rnd*(1) → «*OK*».

После выполнения пересчета 200 значений переменной *Var*3 поля переменной заполняются числами, представляющими случайную выборку наблюдений из генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение *R*(0,1).

Чтобы получить выборку из нормального распределения, например с параметрами $N(m = 7, \sigma^2 = 4)$ и записать ее в переменную *Var*4, нужно в поле «*Длинное имя»* переменной *Var*4 записать формулу: = *Vnormal* (*V*3;7;2).

Можно в качестве аргумента функции *Vnormal* сразу записать *rnd*(1), тогда соответствующая формула будет: = *Vnormal*(*rnd*(1);7;2). Аналогично моделируются выборки для любого непрерывного распределения по формулам:

– *VExpont* (*x*;*lambda*) – экспоненциальное распределение с λ;
– *VF*(*x*; k_1; k_2) – распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы;
– *VChi2*(*x*; *k*) – распределение χ^2 с *k* степенями свободы.

2.4. Проверка статистических гипотез о равенстве математических ожиданий и дисперсий

Студент должен

освоить понятия: распределение Стьюдента, *t*-критерий Стьюдента, распределение Фишера, *F*-критерий Фишера;

получить навыки: применения *F*-критерия Фишера и *t*-критерия Стьюдента для проверки гипотез о равенстве дисперсий и математических ожиданий (средних) с помощью ЭВМ.

Практическое значение статистических гипотез

При проведении и анализе результатов экспериментальных исследований часто приходится сравнивать две партии изделий, показания двух или нескольких приборов, анализировать результаты работы однотипных установок, сравнивать результаты проб материалов и т.д. Рассмотрим некоторые примеры подобных ситуаций.

Необходимо сравнить показания двух приборов, измеряющих одну и ту же величину, когда этими средствами получено два ряда наблюдений данной величины. Одинакова ли точность измерения одного и того же технологического параметра разными приборами?

Требуется поверить рабочее средство измерения (т.е. проверить, выходит ли погрешность прибора за пределы регламентированных значений) с помощью образцового средства измерения. Равно ли математическое ожидание показаний прибора действительному значению измеряемого параметра?

Два агрегата выпускают одну и ту же продукцию. Необходимо сделать вывод о том, какой их них лучше или хуже в каком-либо смысле.

Решение подобных задач осуществляется с использованием аппарата проверки статистических гипотез.

Критерий Стьюдента сравнения средних используется для проверки предположения о том, что средние значения двух показателей, представленных выборками, значимо различаются. Существует три разновидности критерия: один – для связанных выборок, и два для несвязанных выборок (с одинаковыми и разными дисперсиями). Если выборки не связаны, то предварительно нужно проверить гипотезу о равенстве дисперсий, чтобы определить, какой из критериев использовать.

Сравнение средних двух совокупностей имеет важное практическое значение. На практике часто встречается случай, когда средний результат одной серии экспериментов отличается от среднего результата другой серии. При этом возникает вопрос, можно ли объяснять обнаруженное расхождение средних неизбежными случайными ошибками эксперимента или оно вызвано некоторыми закономерностями. Проверку гипотез такого типа называют проверкой (оценкой) значимости (существенности) различия выборочных средних или других характеристик.

В промышленности задача сравнения средних часто возникает при выборочном контроле качества изделий, изготовленных на разных установках или при различных технологических режимах, в финансовом анализе – при сопоставлении уровня доходности различных активов и т.д.

Сформулируем задачу. Пусть имеются две совокупности, характеризуемые генеральными средними $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ и известными дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2. Необходимо проверить гипотезу H_0 о равенстве генеральных средних, т.е. H_0: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$. Для проверки гипотезы H_0 из этих совокупностей взяты две независимые выборки объемов n_1 и n_2, по которым найдены средние арифметические $\bar{x}$, $\bar{y}$ и выборочные дисперсии s_x^2 и s_y^2.

При достаточно больших объемах выборки выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ имеют приближенно нормальный закон распределения, соответственно $N\left(\bar{x}_0, \sigma_x^2\right)$ и $N\left(\bar{y}_0, \sigma_y^2\right)$.

В случае справедливости гипотезы H_0 разность $\bar{x}$ - $\bar{y}$ имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием

$$M(\bar{x} - \bar{y}) = M(\bar{x}) - M(\bar{y}) = \bar{x}_0 - \bar{y}_0 = 0$$

и дисперсией

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n_1} = + \frac{\sigma_y^2}{n_2}.$$

Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, а дисперсия средней n независимых слагаемых в n раз меньше дисперсии каждого. Поэтому при выполнении гипотезы H_0 статистика.

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - M(\bar{x} - \bar{y})}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}}}$$

имеет стандартное нормальное распределение $N(0;1)$.

В случае конкурирующей гипотезы H1: $\bar{x}_0 > \bar{y}_0$ (или H1: $\bar{x}_0 < \bar{y}_0$) выбирают одностороннюю критическую область и критическое значение статистики находят из условия

$$\Phi\left(t_{\text{кр}}\right) = \Phi\left(t_{1-2\alpha}\right) = 1 - 2\alpha,$$

а при конкурирующей гипотезе H_2: $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ выбирают двустороннюю критическую область и критическое значение статистики находят из условия:

$$\Phi\left(t_{\text{кр}}\right) = \Phi\left(t_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

Если фактически наблюдаемое значение статистики t больше критического $t_{\text{кр}}$, определенного на уровне значимости α (по абсолютной величине), т.е. $|t| > t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 отвергается. Если $|t| \leq t_{\text{кр}}$, то делается вывод, что нулевая гипотеза H_0 не противоречит имеющимся наблюдениям.

Например. Для проверки эффективности новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой группе численностью n_1 = 50 человек, где применялась новая технология, выборочная средняя выработка составила $\bar{x}$ = 85 (изделий), во второй группе численностью n_2 = 70 человек выборочная средняя – $\bar{y}$ = 78 (изделий). Предварительно установлено, что дисперсии выработки в группах равны соответственно σ_x^2 = 100 и σ_y^2 = 74. На уровне значимости α = 0,05 выяснить влияние новой технологии на среднюю производительность.

Решение. Проверяемая гипотеза H_0: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$, т.е. средние выработки рабочих одинаковы по новой и старой технологиям. В качестве конкурирующей гипотезы можно взять H_1: $\bar{x}_0 > \bar{y}_0$ или H_2: $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ (в данной задаче более естественна гипотеза H_1, так как ее справедливость означает эффективность применения новой технологии). По формуле фактическое значение статистики критерия

$$t = \frac{85-78}{\sqrt{\frac{100}{50}+\frac{74}{70}}} = 4{,}00.$$

При конкурирующей гипотезе H_1 критическое значение статистики находится из условия $\Phi(t_{\text{кр}})$ = 1–2·0,05 = 0,9. Откуда, по таблице, $t_{\text{кр}}$ = 1,64. При конкурирующей гипотезе H_2 – из условия, что $\Phi(t_{\text{кр}})$ = = 1 – 0,05 = 0,95, находим по таблице $t_{\text{кр}}$ = 1,96.

Так как фактически наблюдаемое значение t = 4,00 больше критического значения $t_{\text{кр}}$ (при любой из взятых конкурирующих гипотез), то гипотеза H_0 отвергается, т.е. на 5 %-ном уровне значимости можно сделать вывод, что новая технология позволяет повысить среднюю выработку рабочих.

Будем теперь предполагать, что распределение признака (случайной величины) X и Y в каждой совокупности имеет нормальный закон. В этом случае, если дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 известны, то проверка гипотезы проводится так же, как описано выше, не только для больших, но и для малых по объему выборок.

Если же дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, но равны, т.е. σ_x^2 = = $\sigma_y^2 = \sigma^2$, то в качестве неизвестной величины σ^2 можно взять ее оценку – «исправленную» выборочную дисперсию

$$\hat{s}_x^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \text{ или } \hat{s}_y^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

Однако «лучшей» оценкой для σ^2 будет дисперсия «смешанной» совокупности объема $n_1 + n_2$, т.е.

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_x^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_x^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

а оценкой дисперсии разности независимых выборочных средних $\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}}$

$$\hat{s}^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Обращаем внимание на то, что число степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$ на 2 меньше общего числа наблюдений $n_1 + n_2$, так как две степени свободы «теряются» при определении по выборочным данным средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Доказано, что в случае справедливости гипотезы H_0, статистика имеет t-распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Поэтому критическое значение статистики t находится по тем же формулам или в зависимости от типа критической области, в которых вместо функции Лапласа $\Phi(t)$ берется функция для распределения Стьюдента при числе степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$, т.е. $(t_\nu) = 1 - 2\alpha$ или $(t_\nu) = 1 - \alpha$.

При этом сохраняется то же правило опровержения (принятия) гипотезы: гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α, если $|t| > t_{1-\alpha;k}$ в случае односторонней критической области.

Либо если $|t| > t_{1-\alpha;k}$ в случае двусторонней критической области; в противном случае гипотеза H_0 не отвергается (принимается).

Выполнение примера в пакете Statistica

Гипотезу о равенстве средних двух генеральных совокупностей проверим на примере по двум выборкам объема 20. Одна выборка:

X_1: 11 10 12 17 17 19 11 15 5 11 11 14 6 7 14 11 13 13 8 5

записывается в переменную *Var*1, другая выборка:

X_2: 21 14 7 13 17 18 15 17 8 14 20 11 10 11 13 20 18 19 17 11

записывается в переменную *Var*2.

В пакете *Statistica* для проверки гипотезы о равенстве средних в переключателе модулей главного меню выбираем *«Анализ»* → *«Основные статистики и таблицы»* → *«t-критерий для независимых переменных»* → → *«OK»* (рис. 2.22).

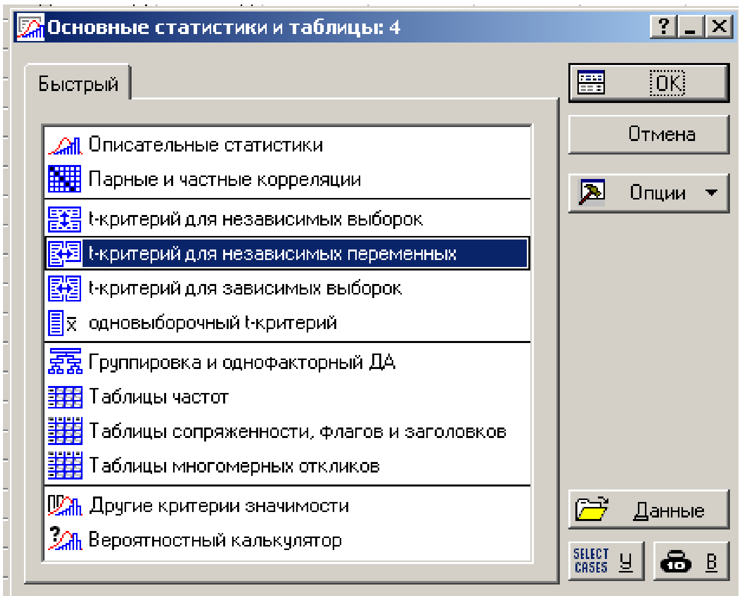


Рис. 2.22. Выбор *t*-критерия

В окне *«t-критерий для независимых выборок»* каждая выборка представлена как переменная.

В соответствующие поля вводим *Var*1и *Var*2. После нажатия кнопки *«Диаграммы размаха»* (рис. 2.23) получаем графическое представление результатов расчета, визуализирующее степень сходства и различия средних (рис. 2.24).

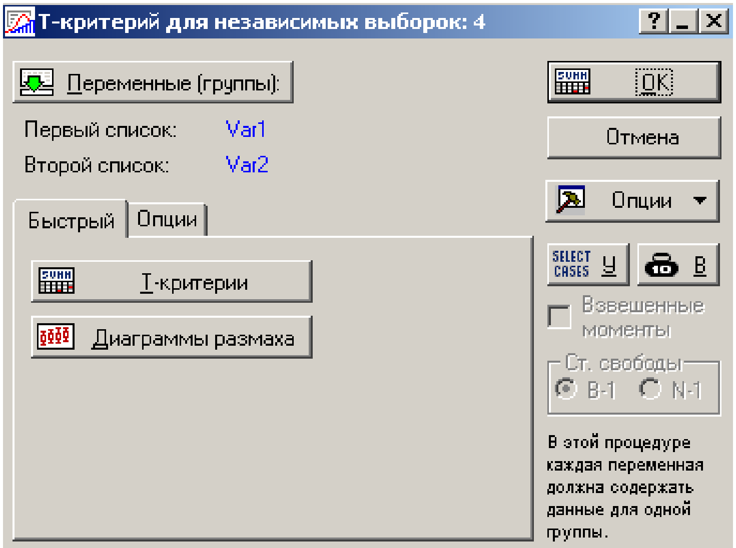


Рис. 2.23. Выбор формы представления результатов

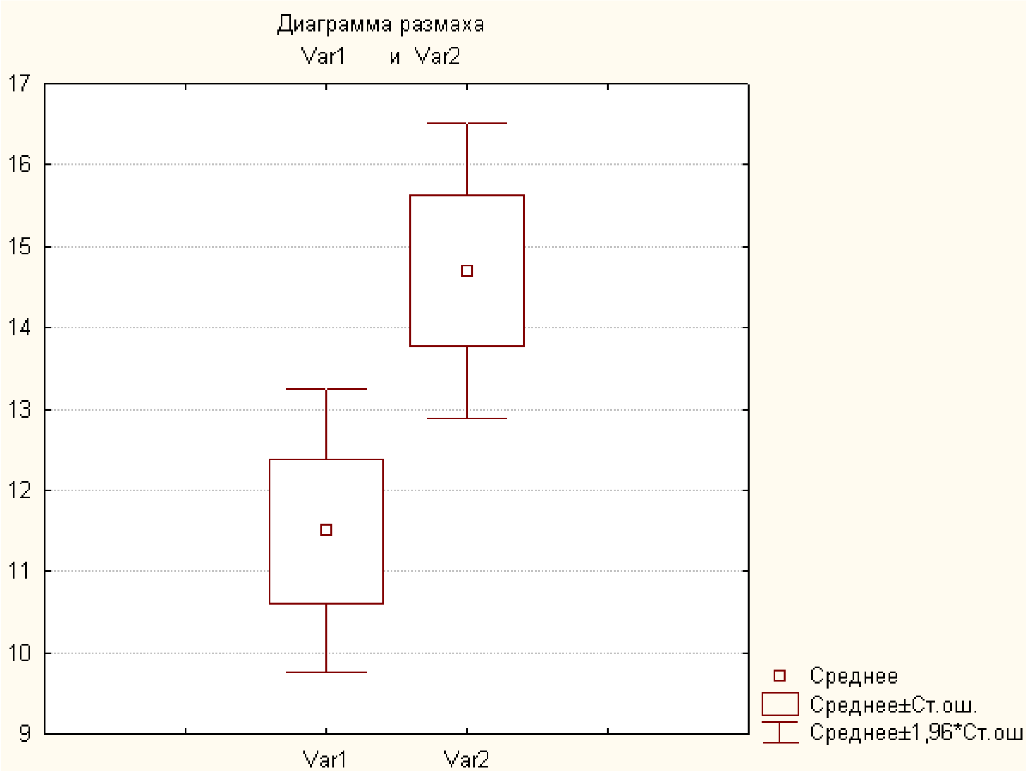


Рис. 2.24. Диаграмма размаха

После выбора команды «*t-критерии*» результаты вычислений выводятся в таблице (рис. 2.25).

Группа 1 и Группа 2	Т-критерий независимых выборок (4) Замечание: Переменные рассм. как независимые выборки								
	Среднее Группа 1	Среднее Группа 2	t-знач.	ст.св.	p	Ст.откл. Группа 1	Ст.откл. Группа 2	F-отн. Дисперсии	p Дисперсии
Var1 vs. Var2	11,50000	14,70000	-2,49878	38	0,016903	3,953679	4,143479	1,098316	0,840168

Рис. 2.25. Итоговые тесты

В таблице приводятся следующие параметры: средние значения обеих выборок $\bar{x}_1$ = 11,5; $\bar{x}_2$ = 14,7; объемы выборок n_1 = 20; n_2 = 20; среднеквадратические отклонения выборок s_1 = 3,954; s_2 = 4,144; значение t-критерия (- 2,49878), вычисленное по формуле

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}},$$

где $s = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

А также – число степеней свободы t-статистики: $n_1 + n_2 - 2 = 38$ и вычисленный уровень значимости t-критерия (0,0169)

$$p = P\left[\left|T(n_1 + n_2 - 2)\right| > |t|\right] = P\left[\left|T(38)\right| > 2{,}499\right] = 0{,}0169,$$

где $T(38)$ – случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с 38 степенями свободы. Этот результат показывает, что на уровне значимости α = 0,05 гипотеза о равенстве средних отклоняется (гипотеза принимается на уровне значимости α = 0,0169.

Приведенная выше *t*-статистика может быть использована только в случае, если дисперсия обеих генеральных совокупностей равны.

Для проверки статистической гипотезы о равенстве дисперсий служит *F*- критерий Фишера. Это может использоваться, например, при сравнении точностей обработки деталей на двух станках, равномерности продаж товара в течение некоторого периода в двух городах и т.д.

Основной характеристикой критерия является уровень значимости α, который имеет смысла вероятности ошибиться, предполагая, что дисперсии и, следовательно, точность, различаются. Вместо α в задачах также иногда задают доверительную вероятность $p = 1 - \alpha$, имеющую смысл вероятности того, что дисперсии и в самом деле равны. Обычно выбирают критическое значение уровня значимости, например 0,05 или 0,1, и если α больше критического значения, то дисперсии считаются равными, в противном случае, различны. При этом критерий может быть односторонним, когда нужно проверить, что дисперсия конкретной выделенной выборки больше, чем у другой, и двусторонним, когда просто нужно показать, что дисперсии не равны.

Существует два способа проверки таких гипотез. Рассмотрим их на примерах. Проверить гипотезу H_0: $\sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = \sigma^2$, можно используя статистику $s_2^{\ 2} / s_1^{\ 2}$ (в числитель ставится большая оценка дисперсии). Гипотеза H_0 принимается, если

$$\frac{s_2^2}{s_1^3} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1),$$

где $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)$ – квантиль распределения Фишера порядка $1 - \alpha/2$ с $n_2 - 1$ и $n_1 - 1$ степенями свободы.

Для рассматриваемого примера значение статистики $s_2^{\ 2} / s_1^{\ 2} = 1{,}098$, а квантиль $F_{0,975}(19,19) = 2{,}526$.

Это значение можно вычислить в модуле «*Анализ*»→ «*Вероятностный калькулятор*» → «*Распределения*» (рис. 2.26).

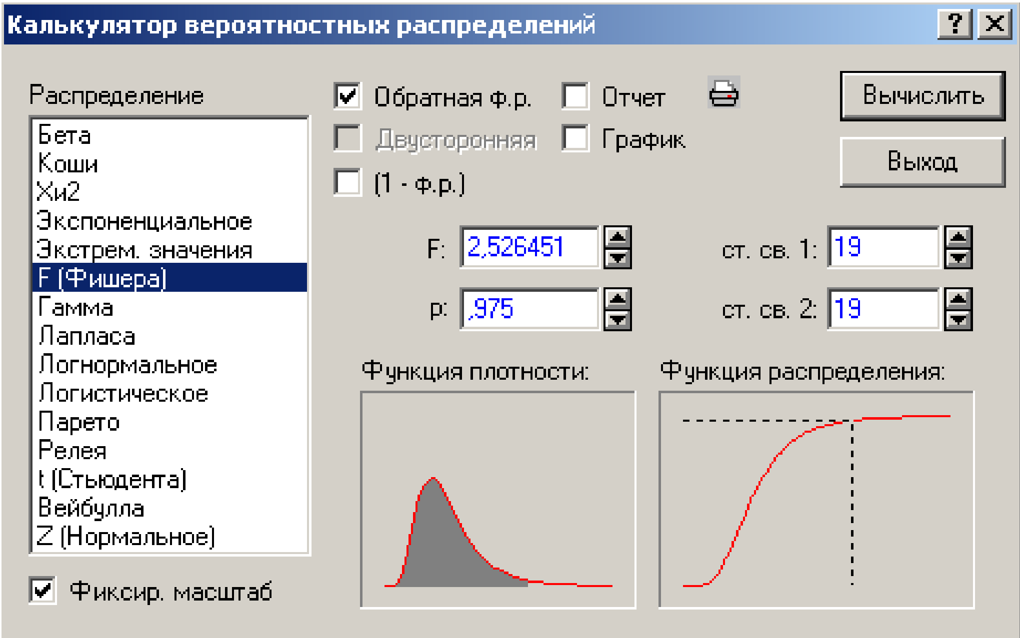


Рис. 2.26. Калькулятор вероятностных распределений

В окне устанавливается заданное значение доверительной вероятности *p*, а также число степеней свободы для первой и второй выборки. Калькулятор рассчитывает значение *F*- критерия Фишера и строит графики (рис. 2.27).

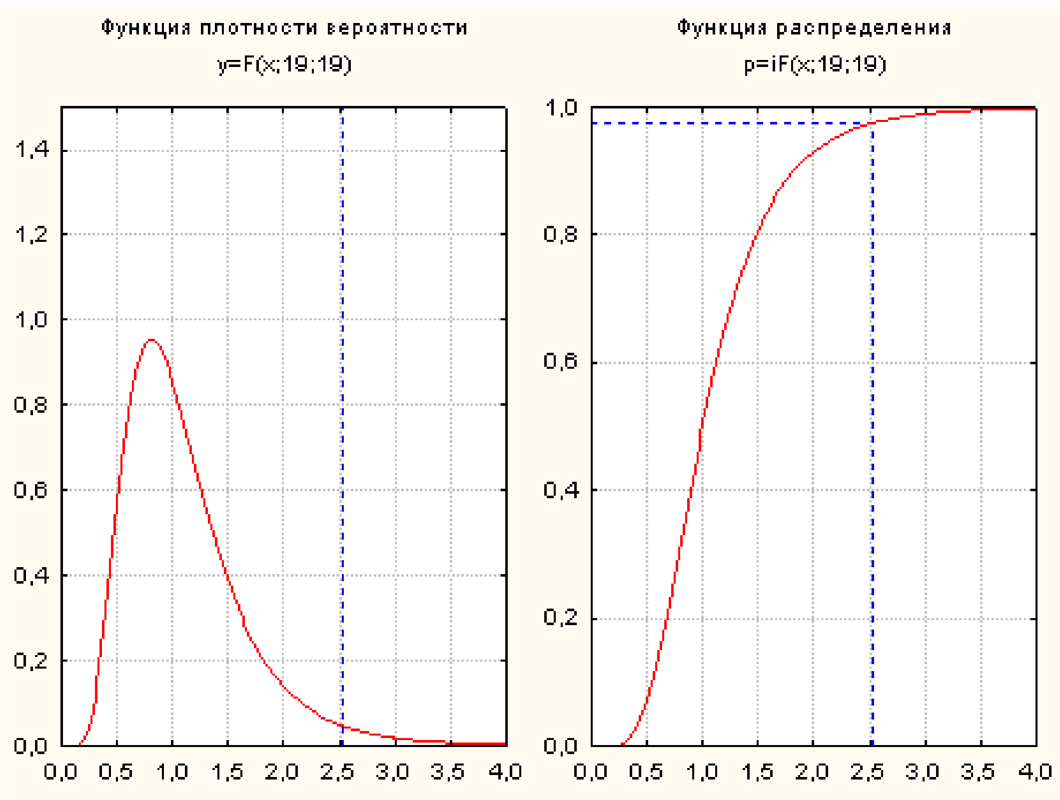


Рис. 2.27. Зона критической области

Так как $s_2^2 / s_1^2 < F_{0,975}(19,19)$, гипотеза о равенстве дисперсий принимается на уровне значимости α = 0,05 и применение t-статистики правомерно.

Гипотезы о дисперсиях возникают довольно часто, так как дисперсия характеризует такие исключительно важные показатели, как точность машин, приборов, стабильность технологических процессов, степень однородности совокупностей, риск, связанный с отклонением доходности активов от ожидаемого уровня, и т.д.

На графиках (рис. 2.27) пунктиром указано значение F-критерия Фишера.

Изменяя значение p на калькуляторе, можно наглядно анализировать, как будет изменяться критическая область.

На практике обычно используется таблица значений F-критерия, в которой приведены значения $F_{0,05;k_1;k_2}$ и $F_{0,01;k_1;k_2}$.

Это позволяет осуществлять проверку гипотезы H_0 на 5 %-м и 1 %-м уровнях значимости при использовании односторонней критической области, и на 10 %-м и 2 %-м уровнях значимости при двусторонней критической области.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение распределению Стьюдента.

2. От каких параметров зависит распределение Стьюдента?

3. Как располагается относительно начала координат закон Стьюдента?

4. Практические примеры проверки гипотез о равенстве дисперсий.

5. Что происходит с законом Стьюдента при увеличении выборки?

6. Дайте определение распределению Фишера.

7. От каких параметров зависит распределение Фишера?

8. Перечислите специальные распределения, полученные путём функциональных преобразований нормально распределённых случайных величин.

9. Какой критерий применяется для гипотезы о равенстве средних?

10. Для проверки какой гипотезы используется F-критерий Фишера?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание 1. По выборкам своего варианта (из работы № 1 – принять, что две первые строки таблицы являются измерениями случайной величины X_1, а две последние – измерениями случайной величины X_2) выполнить следующие расчеты:

– проверьте гипотезу о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей;

– проверьте гипотезу о равенстве средних на уровне значимости α=0,05 (если гипотеза о равенстве дисперсий принимается);

– введите данные в пакет *Statistica,* выполните расчеты и сравните результаты.

Задание 2. При исследовании влияния двух типов покрытия на удельную проводимость трубок получены следующие результаты (в условных единицах):

№ трубки	1	2	3	4	5	6
1-й тип	6	5	12	9	10	–
2-й тип	14	11	0	5	6	8

Можно ли считать, что тип покрытия влияет на удельную проводимость трубок? Принять α = 0,10.

Задание 3. Чтобы определить, какое влияние оказывает температура окружающей среды на систематическую ошибку угломерного инструмента, проведены измерения горизонтального угла объекта δ утром (*t* = 10 °C) и днем (*t* = 26 °C). Результаты измерений δ (в угловых секундах) следующие:

Утром	38,2	36,4	37,7	36,1	37,9	37,8	–	–
Днем	39,5	38,7	37,8	38,6	39,2	39,1	38,9	39,2

Можно ли считать, что температура окружающей среды влияет на систематическую ошибку угломерного инструмента? Принять α = 0,05.

Задание 4. На двух станках А и В производят одну и туже продукцию, контролируемую по внутреннему диаметру изделия. Из продукции станка А была взята выборка из 16 изделий, а из продукции станка В – выборка из 25 изделий. Выборочные оценки средних и дисперсий контролируемых размеров $\bar{x}_A = 37{,}5$ мм при $s_A^2 = 1{,}21 \text{мм}^2$ и $\bar{x}_B = 36{,}8$ мм при $s_B^2 = 1{,}44$ мм^2.

Используя двухсторонний критерий, проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий контролируемых размеров в продукции обоих станков, если: а) α = 0,005; б) α = 0,10.

Задание 5. Имеются данные о средненедельных количествах продаж товара (тыс. шт.) до и после смены производителем оформления упаковки.

до смены 16 19 14 15 17 16 19 16 19 14 15 19 13

после смены 18 19 21 15 19 18 15 20 17 16 21 15

Можно ли с вероятностью 0,99 считать, что смена упаковки привела к среднему увеличению количества продаж?

По условию p = 0,99, α = 0,01, выборки не связаны, критерий односторонний, так как нужно показать, что средние значения показателя, представленного второй выборкой, больше чем у первой.

Задание 6. Четыре станка в цеху обрабатывают детали. Для проверки точности обработки взяли выборки размеров деталей у каждого станка. Необходимо сравнить с помощью F-теста попарно точности обработки всех станков (рассмотреть пары 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4) и сделать вывод, для каких станков точности обработки (дисперсии) равны, для каких нет. Взять уровень значимости α = 0,02.

Вариант	Выборки размеров деталей										
1	2										
1, 6, 11	1 станок	29,1	26,2	30,7	33,8	33,6	35,2	23,4	29,3	33,3	26,7
	2 станок	25,7	27,5	25,4	28,9	29,9	30,1	29,0	36,6	24,8	27,8
	3 станок	25,7	27,5	25,4	28,9	29,9	30,1	29,0	36,6	24,8	27,8
	4 станок	32,1	31,0	27,2	29,3	30,4	31,7	30,4	27,3	35,7	31,5
2, 7, 12	1 станок	36,6	34,3	33,9	30,3	30,0	31,4	29,9	26,8	24,7	32,5
	2 станок	28,4	32,5	31,5	28,2	33,9	24,7	31,7	29,7	30,1	28,0
	3 станок	33,1	30,4	33,4	29,6	27,7	33,2	28,3	31,6	31,6	29,1
	4 станок	30,6	31,6	29,3	26,3	33,8	29,1	26,1	32,3	32,4	31,3
3, 8	1 станок	34,1	35,1	30,7	30,4	35,6	29,9	28,0	32,7	30,0	33,1
	2 станок	30,8	34,4	30,3	26,6	25,8	30,6	32,9	25,5	28,2	31,6
	3 станок	30,7	30,6	30,0	26,3	30,7	30,4	32,3	27,8	31,8	30,7
	4 станок	30,6	31,3	27,0	27,4	31,4	30,4	28,4	30,3	27,2	27,3

Окончание таблицы

1	2										
4, 9	1 станок	28,1	27,1	33,6	32,8	24,8	33,8	29,4	26,6	24,4	27,5
	2 станок	31,8	27,1	32,6	34,3	27,8	29,1	26,0	34,1	33,1	30,6
	3 станок	27,1	34,6	26,5	28,8	26,1	34,8	30,1	31,0	32,9	35,8
	4 станок	28,1	32,6	27,5	29,7	29,3	34,6	26,0	27,2	29,5	26,8
5, 10	1 станок	29,7	30,4	35,2	28,5	27,6	27,8	31,8	33,9	25,7	32,9
	2 станок	30,0	33,0	27,0	32,3	33,7	26,5	31,2	24,7	30,2	33,0
	3 станок	28,8	30,7	35,5	22,8	30,1	29,6	33,0	33,7	34,9	24,5
	4 станок	25,0	31,3	30,6	32,0	29,5	32,5	34,0	35,7	26,1	31,9

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПАССИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Корреляционный анализ

Студент должен

освоить понятия: корреляция, парная и частная корреляция, множественная корреляция, парная и множественная регрессия, регрессионный анализ;

получить навыки: вычисления различных коэффициентов корреляции, построения регрессионных моделей разного типа, выполнения корреляционно-регрессионного анализа и прогнозирования в пакете *Statistica*.

Статистические данные всегда являются приближенными, усредненными. Поэтому они носят оценочный характер и для достоверности результатов необходимо большое число исходных данных. Существует несколько видов статистического анализа данных: корреляционный, регрессионный, дисперсионный, факторный, кластерный и др. Рассмотрим некоторые из них.

Иногда корреляцию и регрессию рассматривают как совокупный процесс статистического исследования. Корреляционно-регрессионный анализ является одним из значимых методов построения математических моделей в экономике и считается одним из главных методов в маркетинге.

Корреляция в широком смысле слова означает связь между объективно существующими явлениями. Корреляционный анализ – вид статистического анализа, который состоит в количественной оценке силы и направления связи между двумя (парная корреляция) или несколькими (множественная корреляция) наборами данных. Для количественной оценки силы связи используются коэффициенты парной корреляции r и множественной корреляции *R*. В эконометрике различают следующие варианты зависимостей:

– парная корреляция – связь между двумя признаками, один из которых результативный, а другой факторный;

– частная корреляция – зависимость между результативным и одним факторным признаком, при фиксированном значении других факторных признаков;

– множественная корреляция – зависимость результативного признака от нескольких факторных признаков;

– каноническая корреляция – зависимость группы результативного признака от группы факторных признаков.

Коэффициент корреляции – количественный показатель линейной связи между двумя или более наборами данных, значение которого лежит в интервале от -1 до +1. Если коэффициент равен ±1, то связь функциональная, если равен 0, то связь отсутствует.

Для качественной оценки силы связи используются специальные табличные соотношения (например, шкала Чеддока, табл. 3.1).

Таблица 3.1

Коэффициенты корреляции

Значения коэффициента корреляции	Характер связи
$0 < \lvert r \rvert < 0{,}3$	Очень слабая
$0{,}3 \le \lvert r \rvert < 0{,}5$	Слабая
$0{,}5 \le \lvert r \rvert < 0{,}7$	Заметная
$0{,}7 \le \lvert r \rvert < 0{,}9$	Сильная
$0{,}9 \le \lvert r \rvert < 1$	Очень сильная

Направление связи определяется знаками плюс или минус: близость к +1 означает, что возрастанию одного набора значений соответствует возрастание другого набора, близость к -1 означает обратное.

Для наглядности измерения всех связей в случае множественной корреляции целесообразно использовать корреляционную матрицу – матрицу из попарных коэффициентов корреляции.

Использование методов корреляции позволяет решить следующие задачи:

– установить абсолютное изменение результативного признака за счет изменения одного или комплекса факторов;

– определить меру зависимости между результативным признаком и одним из факторов при постоянном значении других;

– установить меру относительного изменения зависимой переменной на единицу относительного изменения фактора или факторов;

– изучить общий объем вариации результативного признака и определить роль каждого фактора в объяснении этого изменения;

– оценить статистическую надежность выборочных показателей корреляционной связи.

Таким образом, коэффициент корреляции – это инструмент, с помощью которого можно проверить гипотезу о зависимости и измерить силу зависимости двух переменных. Если распределение переменных нормальное или несущественно отличается от нормального, применяют линейный коэффициент корреляции Пирсона. Для порядковых (ранговых) переменных или переменных, чье распределение существенно отличается от нормального, используется коэффициент корреляции Спирмена или Кендалла.

Коэффициент Спирмена рекомендуется использовать, если переменные – количественные (закон распределения которых не известен или не является нормальным) и (или) качественные (порядковые).

Коэффициент Кендалла рекомендуется использовать, если хотя бы одна переменная – качественная (порядковая).

Во многих экономических задачах, например, при выборе инвестиционных проектов, достаточно именно монотонной зависимости одной переменной от другой. Отметим, что коэффициент ранговой корреляции Спирмена остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений. Он является адекватным в порядковой шкале, как и другие ранговые статистики.

Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла – мера линейной связи между случайными величинами. Для оценки силы связи между величинами используются не численные значения, а соответствующие им ранги. Эти коэффициенты определяют степень тесноты и направленность связи признаков. Величина коэффициентов лежит в интервале от +1 до -1. Абсолютное значение характеризует тесноту связи, а знак – направленность связи между двумя признаками.

Преимущество – можно ранжировать по признакам, которые нельзя выразить численно: субъективные оценки, предпочтения и т.д. При экспертных оценках можно ранжировать оценки разных экспертов и найти их корреляции друг с другом, чтобы затем исключить из рассмотрения оценки эксперта, слабо коррелирующие с оценками других. Коэффициент корреляции рангов применяется для оценки устойчивости тенденции динамики.

Коэффициент корреляции Кенделла инвариантен по отношению к любому монотонному преобразованию шкалы измерения. Замечено, что в большинстве случаев коэффициент Спирмена больше коэффициента Кенделла.

3.2. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ – вид статистического анализа, который состоит в представлении зависимости одних факторов от других в виде некоторой функции (уравнения регрессии), с помощью которой осуществляется прогнозирование и поиск ответа на вопросы «Что будет через какое-то время?» или «Что будет, если…?».

В случае парной регрессии уравнение определяется по двум наборам данных, один из которых представляет значения зависимой переменной Y, а другой – независимой переменной X. В случае множественной регрессии уравнение определяется по нескольким наборам данных, один из которых представляет значения зависимой переменной Y, а другие – независимыми переменными X_1, X_2, …, X_n.

Получение уравнения регрессии происходит в два этапа: подбор вида функции и вычисление параметров функции.

Выбор функции делается на основе некоторых известных физических, химических, экономических (и т.п.) свойств рассматриваемого процесса или на основе иных соображений. В частности, если изучается зависимость между двумя величинами, т.е. ищется аппроксимирующая функция $Y = f(X)$, то можно нанести экспериментальные точки (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, на координатную плоскость и по характеру расположения этих точек сделать предположения о структуре аппроксимирующей функции.

Выбор функции, в большинстве случаев, производится среди линейной, квадратичной, степенной и других видов (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Виды аппроксимирующей функции

Парная (простая) регрессия	Множественная регрессия
1	2
Линейная регрессия	
$y=ax+b$	$y = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$

Окончание табл. 3.2

1	2
Квадратичная (параболическая)	
$y=ax^2+bx+c$	$y= a_0 + a_1x_1^2 + \ldots +a_m x_m^2$
Степенная	
$y=ax^b$	$y = a_0 x_1^{a1} x_2^{a2} \ldots x_m^{am}$
Логарифмическая $y=a\ln x+b$,	*Гиперболическая* $y = a_0 + a_1 (1/x_1) + \ldots +a_m(1/x_m)$
Экспоненциальная $y=ae^{bx}$,	
где a, b, c – коэффициенты парной регрессии.	где a_0, a_1, $a_2,\ldots,a_m$ – коэффициенты множественной регрессии; n – объем совокупности; m – количество факторных признаков.

К функции предъявляются следующие требования:

– она должна быть достаточно простой для использования ее в дальнейших вычислениях;

– график этой функции должен проходить вблизи экспериментальных точек так, чтобы сумма квадратов отклонений y-координаты всех экспериментальных точек от y-координат графика функции была бы минимальной (метод наименьших квадратов).

На втором этапе определяют неизвестные коэффициенты аппроксимирующей функции из условия минимума среднего квадрата ошибки прогнозирования. Основным методом решения задачи нахождения параметров a_0 и a_1 уравнения регрессии является метод наименьших квадратов (МНК). Он состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактических значений от значений, вычисленных по уравнению регрессии.

Основным параметром парного уравнения регрессии является параметр a_1 (в случая множественной регрессии a_j, где $j = 1, 2, \ldots, n$), который характеризует силу связи между вариацией факторного признака X и вариацией результативного признака Y.

Иногда в эконометрических исследованиях возникают ситуации, в которых использование параметров a_j не дает желаемого результата, так как коэффициент имеет размерность, совпадающую с анализируемым показателем и не пригоден для выявления наибольшего (наименьшего) влияния той или иной независимой переменной. В этом случае используют β-коэффициент или коэффициент эластичности.

β-коэффициент (стандартизованный коэффициент регрессии) показывает, на сколько среднеквадратических отклонений изменится результативный признак, если величина факторного признака изменяется на одно среднеквадратическое отклонение.

$$\beta_{ji} = a_j \cdot \frac{\sigma_{xj}}{\sigma_y}.$$

Коэффициенты условно-чистой регрессии полезно выразить в виде относительных сравниваемых показателей связи, коэффициентов эластичности:

$$Э_j = a_j \cdot \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}.$$

Значение коэффициента эластичности определяет, на сколько процентов в среднем изменится значение зависимой переменной *Y*, если независимая переменная *X* изменится на 1 %.

В большинстве случаев при построении модели приходится пользоваться выборочными данными, поэтому прежде чем приступать к использованию модели необходимо убедится в ее адекватности фактическим данным (анализируемому явлению).

Для этих целей используют t-критерий Стьюдента и F-критерий Фишера.

Для количественной оценки точности построения уравнения регрессии предназначен коэффициент детерминации R^2, равный квадрату коэффициента множественной корреляции и указывающий, какой процент изменения функции Y объясняется воздействием факторов X_i. Чем его значение ближе к 1, тем уравнение точнее описывает исследуемую зависимость.

Значимое уравнение (с R^2 близким к 1) используется, как правило, для прогнозирования изучаемого явления.

Прогноз – это вероятностное суждение о будущем, полученное путем использования совокупности научных методов. Например, прогнозирование финансового состояния выполняется для того, чтобы получить ответы на два вопроса: «как это может быть (какими могут стать финансовые показатели, если не будут приняты меры по их изменению)» и «как это должно быть (какими должны стать финансовые показатели фирмы для того, чтобы ее финансовое состояние обеспечивало высокий уровень конкурентоспособности)». Прогнозирование с целью получения ответа на первый вопрос принято называть исследовательским, на второй – нормативным.

Существует два способа прогнозов по уравнению регрессии: в пределах экспериментальных значений (интерполяция) и за пределами (экстраполяция). Применимость всякой регрессионной модели ограничена, особенно за пределами экспериментальной области, так как характер зависимости может существенно измениться. Поэтому достоверность исследовательского прогноза может быть невысокой. Однако его выполнение полностью обосновано.

Выполнение примера в пакете Statistica

Выбрать исходные данные для своего варианта (табл. 3.3, 3.4), скопировать и вставить в электронную таблицу пакета *Statistica*.

Статистический пакет *Statistica* использует стандартный интерфейс электронных таблиц. Текущий файл данных всегда отображается в виде электронной таблицы. Данные организованы в виде наблюдений и переменных. Наблюдения можно рассматривать как эквивалент столбцов электронной таблицы. Каждое наблюдение состоит из набора значений переменной. Система состоит из ряда модулей, работающих независимо. Каждый модуль включает определенный класс процедур. Почти все процедуры являются интерактивными, т.е. для запуска, обработки необходимо выбрать из меню переменные и ответить на ряд вопросов системы. В электронной таблице необходимо установить имена своих переменных. Для этого нужно правой кнопкой мыши щелкнуть по имени переменной в заголовке таблицы.

Откроется контекстное меню, в котором выбрать «*Спецификация переменной»*. В открывшемся окне ввести имя своей переменой в поле «*Имя»* → «*ОК*». Например, вместо *Var*3 поставить *Y*, *Var*4 заменить на *X*1, *Var*5 – на *X*2 и т.д.

Корреляционный анализ

Построение диаграмм рассеяния. В главном меню программы выбрать «*Анализ*» → « *Основные статистики и таблицы»*→ «*Парные* и *частные корреляции*» (рис. 3.1).

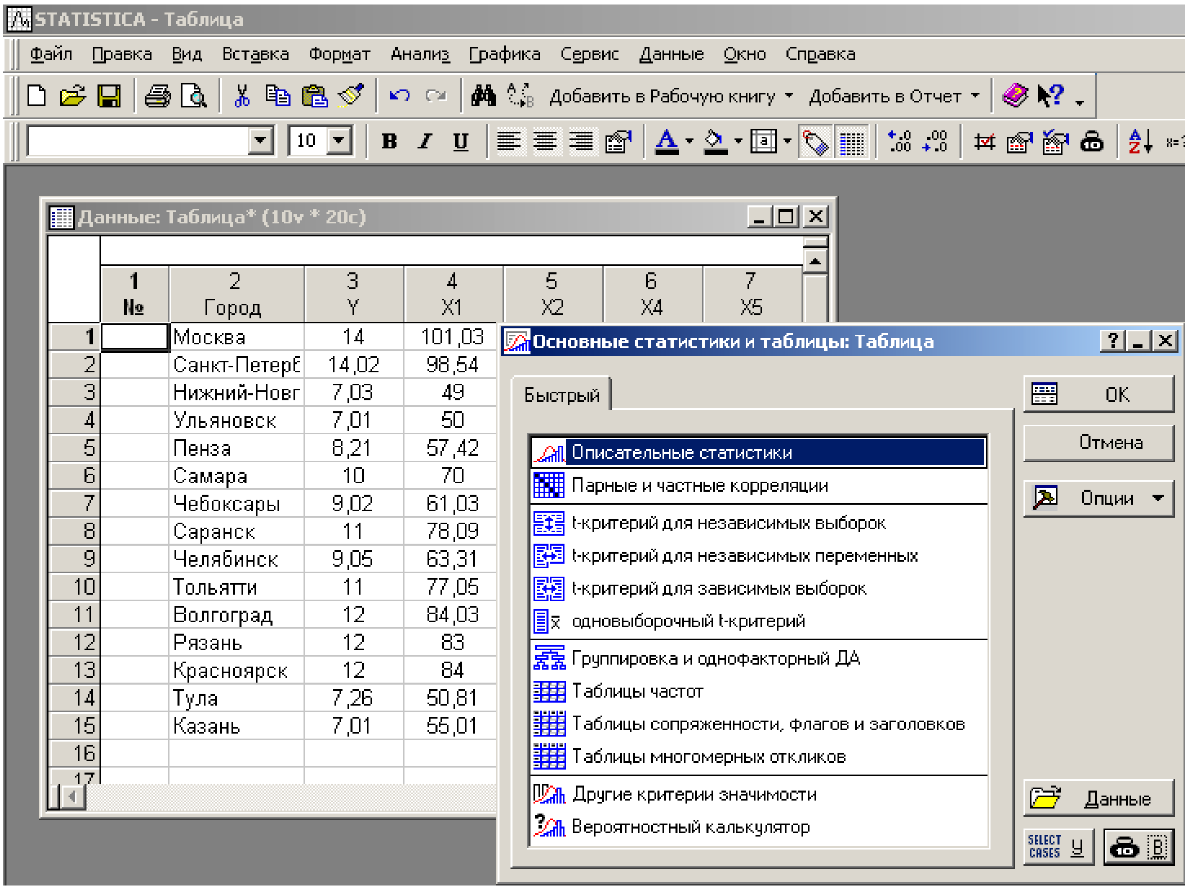


Рис. 3.1. Стартовое окно программы

В окне «*Парные* и *частные корреляции*» на вкладке «*Частные корреляции*» (рис. 3.2) выбираем «*2М рассеяния*» → «*ОК*». В появившемся окне для ввода переменных слева выбираем значения исследуемых факторов (X_1, X_2, X_4, X_5), в окне справа указываем Y и нажимаем «*ОК*». В результате получаем диаграммы рассеяния для каждой переменной X_i относительно Y (рис. 3.3).

Получение матрицы парных корреляций. Выбираем в главном меню «*Анализ*» → «*Основные статистики и таблицы*» → «*Парные и частные корреляции*» → на вкладке «*Частные корреляции*» открываем список «*Прямоугольная матрица*». В появившемся окне в первом и во втором списках выбираем все переменные своего варианта – Y, X_1, X_2, X_4, X_5 → «ОК». Далее выбираем опцию «*Матрица парных корреляций*» → «ОК» и получаем таблицу парных корреляций (рис. 3.4).

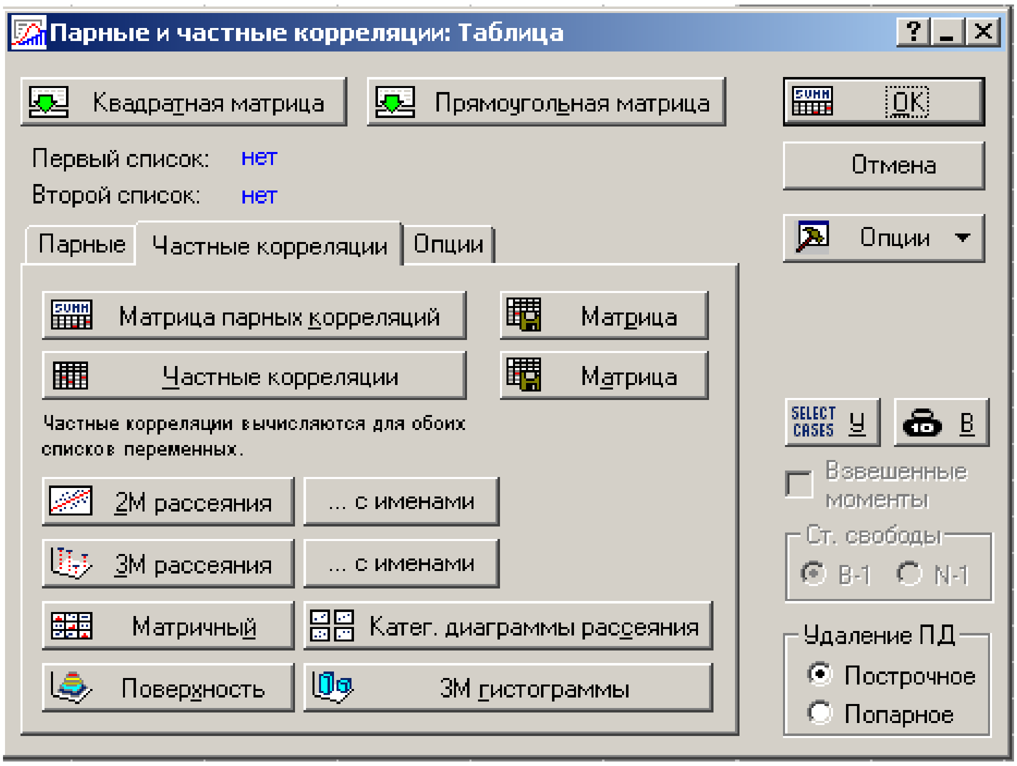


Рис. 3.2. Диалоговое окно «Парные и частные корреляции»

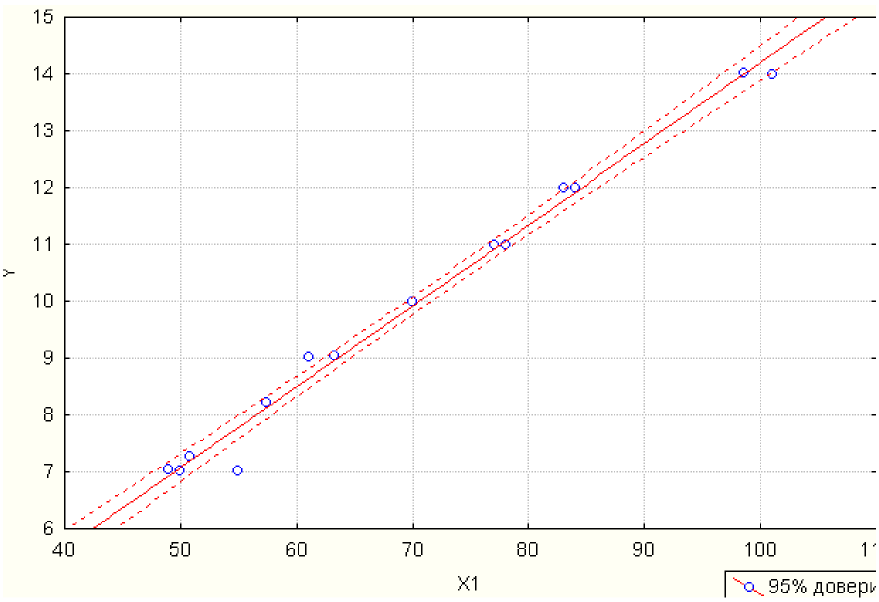


Рис. 3.3. Диаграмма рассеяния $Y = f(X_1)$

Отмеченные на экране красным цветом коэффициенты корреляций значимы на уровне $p < 0{,}05$.

Корреляции (Таблица)
Отмеченные корреляции значимы на уровне p <,05
N=15 (Построчное удаление ПД)

Переменная	Y	X1	X2	X4	X5
Y	1,00	0,99	0,96	0,68	0,99
X1	0,99	1,00	0,95	0,71	0,99
X2	0,96	0,95	1,00	0,68	0,95
X4	0,68	0,71	0,68	1,00	0,72
X5	0,99	0,99	0,95	0,72	1,00

Рис. 3.4. Матрица парных корреляций

Проанализировать полученные результаты (рис. 3.4), сравнить с данными полученными на диаграммах рассеяния и сделать вывод.

Вычисление частных коэффициентов корреляции. Провести самостоятельные исследования при вычислении частных коэффициентов корреляции, выбрав в окне «*Парные и частные корреляции*» → «Частные корреляции». Открывается окно для выбора двух списков переменных. В первый список ввести все анализируемые переменные, а во втором указать те, которые хотим исключить из рассмотрения. Красным цветом на экране выделены значимые значения коэффициентов частных корреляций (рис. 3.5).

Частные корреляции (Таблица)
Отмеченные корреляции значи
N=15 (Построчное удаление П,

Переменная	Y	X1	X2	X4	X5
Y	1,00			-0,60	0,00
X1		1,00			
X2			1,00		
X4	-0,60			1,00	-0,00
X5	0,00			-0,00	1,00

Рис. 3.5. Результаты частных корреляций для $Y = f(X_4)$

Частные корреляции значимы на уровне $p < 0{,}05$. Перебирая разные варианты исключения, сопоставить результаты. Сделать вывод по полученным результатам.

Построение матричной диаграммы рассеяния. Выбрать в главном меню «Анализ» → «*Основные статистики и таблицы*» → «*Парные и частные корреляции*» → на вкладке «*Частные корреляции*» выбираем «*Матричный*» → «*ОК*». В появившемся окне «*Переменные для матричного графика*» в обоих списках выбираем все переменные (Y, X_1, X_2, X_4, X_5) → «ОК». В результате получаем матричную диаграмму рассеяния, анализируем и делаем вывод (рис. 3.6).

Интерпретация приведенного рисунка (рис. 3.6) такова: чем ближе к теоретической линии регрессии сгруппированы точки, тем теснее связь между изучаемыми показателями.

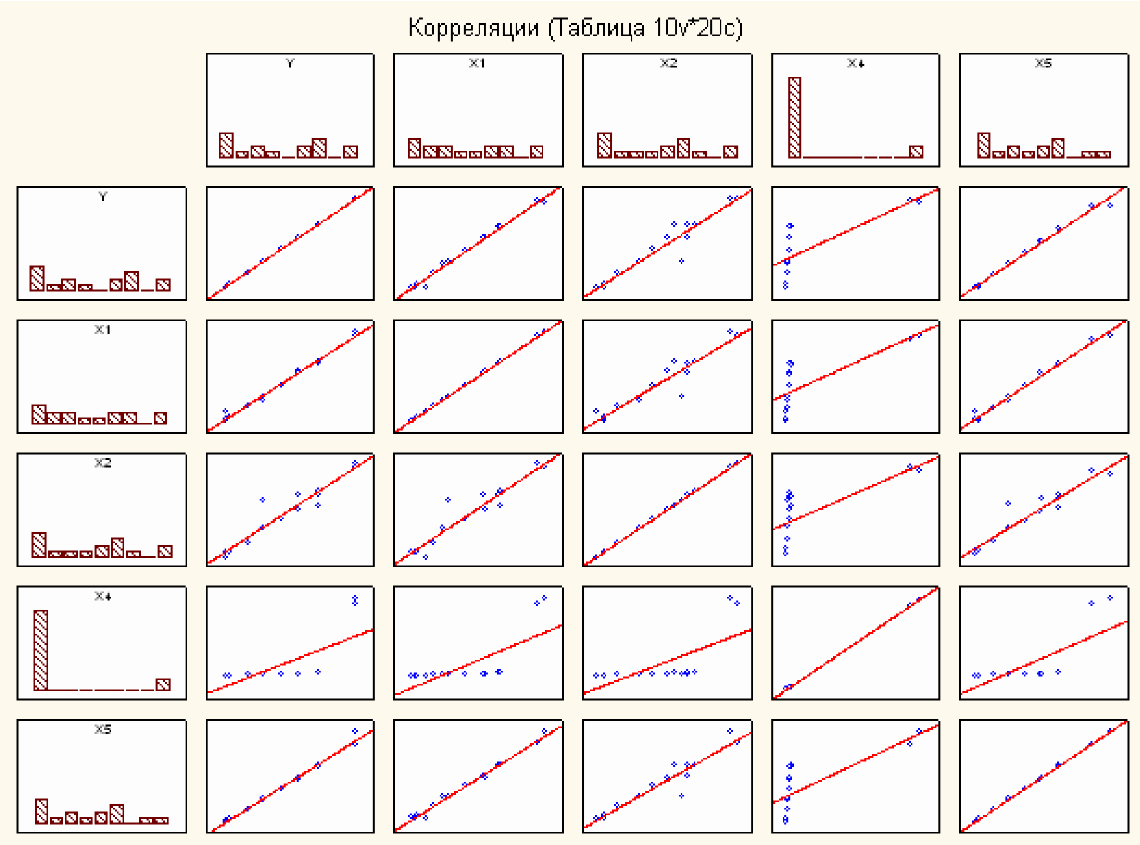


Рис. 3.6. Матрица диаграмм рассеяния

Расчет коэффициентов ранговой корреляции. В меню «*Анализ*» → «*Непараметрическая статистика*» выбираем «*Корреляции Спирмена, тау Кендала, гамма*» → «*ОК*» (рис. 3.7).

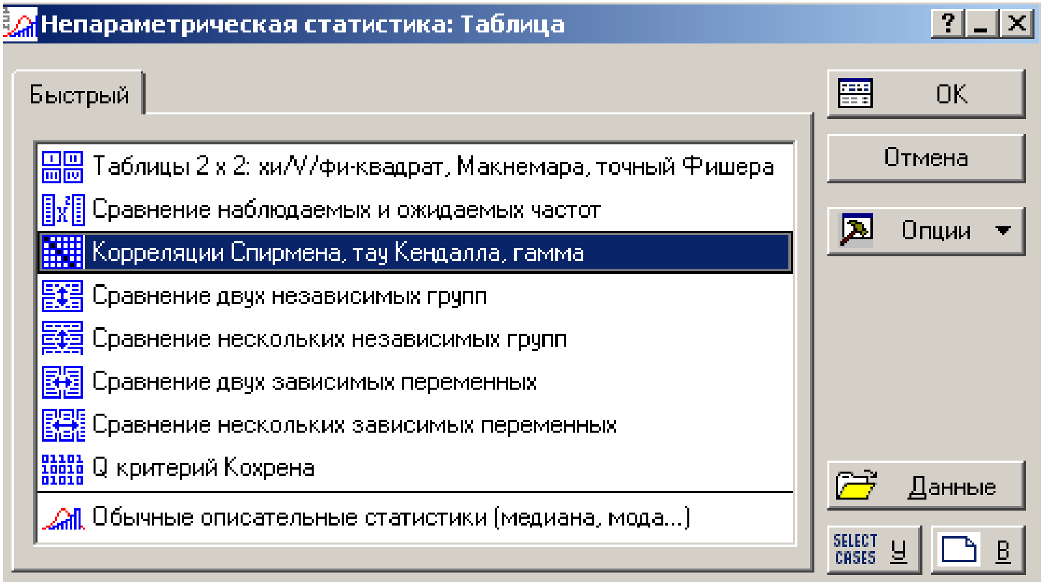


Рис. 3.7. Непараметрическая статистика

В окне настройки параметров ранговой корреляции (рис. 3.8) в списке «*Вычислить*» установить «*Подробный отчет*».

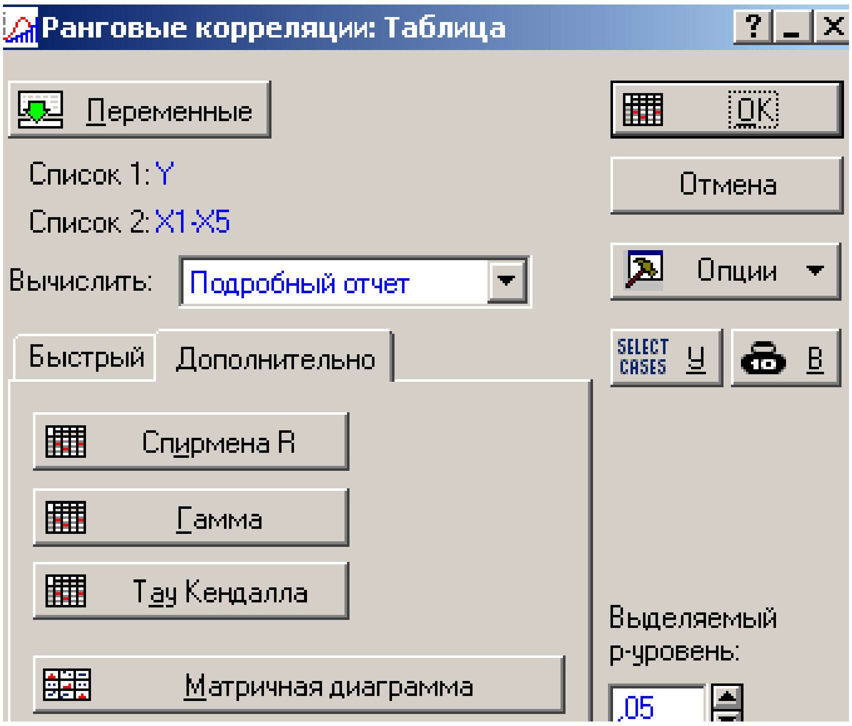


Рис. 3.8. Окно настройки параметров ранговой корреляции

В первый список переменных ввести *Y*, а во второй – все *X*. Далее в опции «*Дополнительно*» выбрать название вычисляемого коэффициента → «*Спирмена*». Результаты отчета (рис. 3.9) показывают значения коэффициентов корреляции, а также проверку их значимости по *t*-критерию Стьюдента на уровне $p < 0{,}05$.

Пара перем.	Ранговые корреляции Спирмена (Таблица) ПД попарно удалены Отмеченные корреляции значимы на уровне p <,0500			
	Число набл.	Спирмена R	t(N-2)	p-уров.
Y & X1	15	0,971289	14,72038	0,000000
Y & X2	15	0,945898	10,51108	0,000000
Y & X4	15	0,977548	16,72705	0,000000
Y & X5	15	0,992812	29,90935	0,000000

Рис. 3.9. Результаты отчета

Если в опции «*Вычислить*» установить «*Квадратная матрица*», то все переменные выбираются в одном списке. В результате получаем таблицу парных коэффициентов корреляции (рис. 3.10).

Перем.	Ранговые корреляции Спирмена (Таблица) ПД попарно удалены Отмеченные корреляции значимы на уровне p <,050				
	Y	X1	X2	X4	X5
Y	1,000000	0,971289	0,945898	0,977548	0,992812
X1	0,971289	1,000000	0,904045	0,974084	0,974957
X2	0,945898	0,904045	1,000000	0,914728	0,933516
X4	0,977548	0,974084	0,914728	1,000000	0,977619
X5	0,992812	0,974957	0,933516	0,977619	1,000000

Рис. 3.10. Ранговые коэффициенты корреляции Спирмена

Аналогичным образом можно получить ранговые коэффициенты корреляции Кендалла (рис. 3.11).

Пара перем.	Тау корреляции Кендалла (Таблица) ПД попарно удалены Отмеченные корреляции значимы на ур			
	Число набл.	Кендалла тау	Z	p-уров.
Y & X1	15	0,897828	4,665251	0,000003
Y & X2	15	0,875633	4,549921	0,000005
Y & X4	15	0,902134	4,687627	0,000003
Y & X5	15	0,965623	5,017523	0,000001

Рис. 3.11. Ранговые коэффициенты корреляции Кендалла

Регрессионный анализ

Выбрать в главном меню пункт «*Анализ*» → «*Множественная регрессия*». В этом окне вводим значения переменных, выбранные для исследования (рис. 3.12): зависимые переменные – Y, независимые переменные X_1, X_2 и остальные переменные, далее «*OK*».

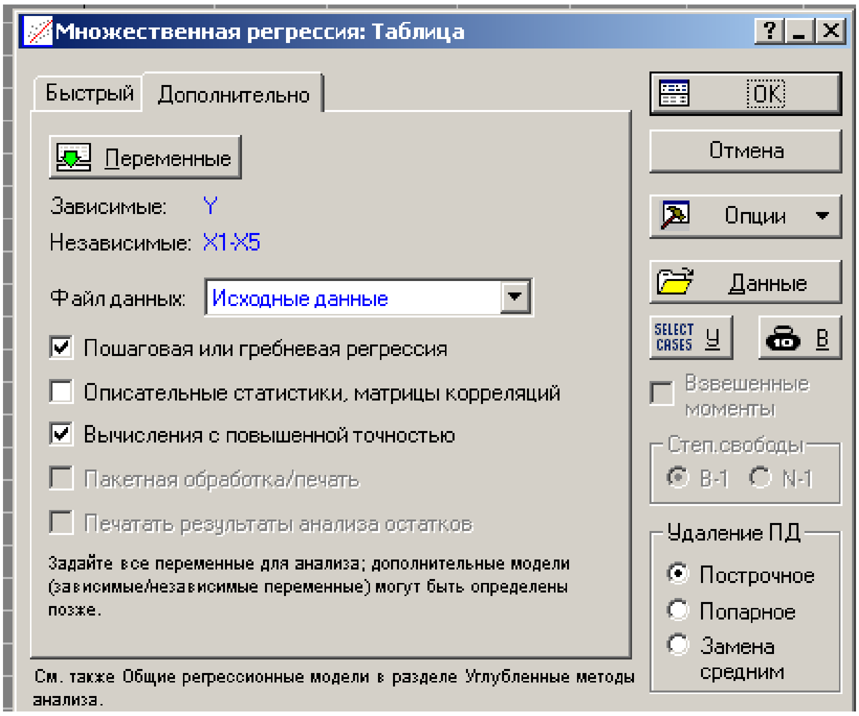


Рис. 3.12. Диалоговое окно «*Множественная регрессия*»

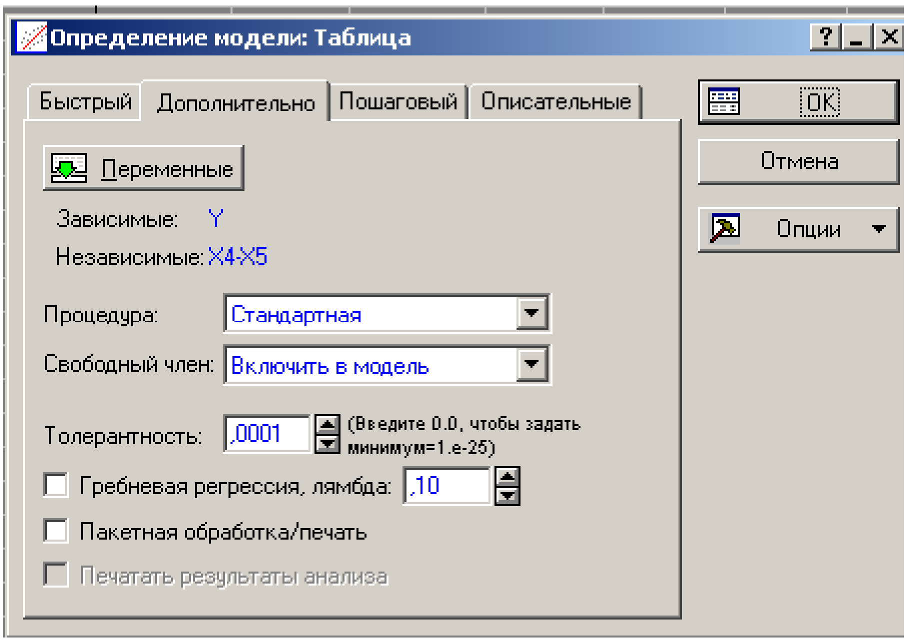


Рис. 3.13. Окно выбора модели

Открывается следующее окно (рис. 3.13), в котором выбираем модель и указываем процедуру поиска: стандартную, пошаговую вперед или пошаговую назад. Если выбираем «Стандартную» процедуру, тогда «*OK*» и получаем первый результат множественной регрессии (рис. 3.14).

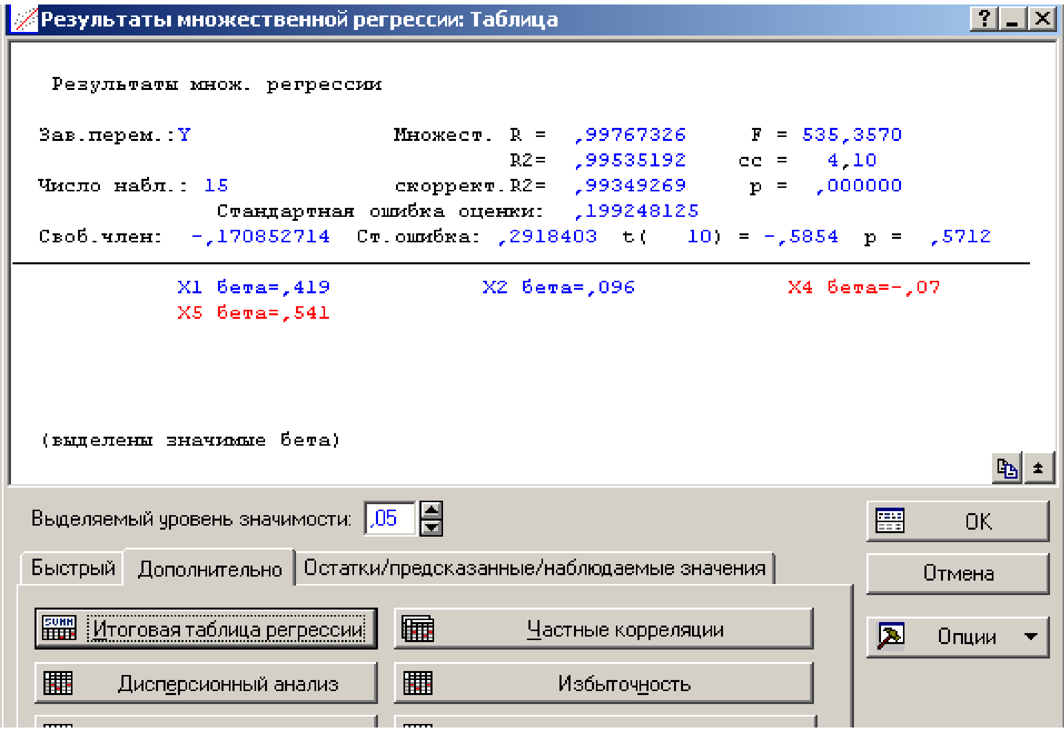


Рис. 3.14. Результаты множественной регрессии

В верхней части окна (рис. 3.14) представлены все итоговые статистики, а также коэффициенты уравнения регрессии.

Далее устанавливаем «*Итоговая таблица регрессии*», где будут представлены две таблицы: оцененные параметры модели (рис. 3.15) и основные показатели адекватности множественного уравнения регрессии – итоговые статистики (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Итоговые статистики

Статистика	Значение
Множественный коэффициент корреляции, R	0,997
Множественный коэффициент детерминации, R^2	0,995
Скорректированный коэффициент детерминации, $R2$	0,993
Критерий Фишера расчетный – $F(4,10)$	535,36
P	0,000
Стандартная ошибка оценки	0,1992

Каждый показатель данной таблицы необходимо проанализировать и сделать соответствующий вывод.

Итоги регрессии для зависимой переменной: Y (Таблица)
R= ,99767326 R2= ,99535192 Скорректир. R2= ,99349269
F(4,10)=535,36 p<,00000 Станд. ошибка оценки: ,19925

N=15	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(10)	p-уров.
Св.член			-0,170853	0,291840	-0,58543	0,571231
X1	0,418578	0,192558	0,059965	0,027586	2,17378	0,054819
X2	0,096084	0,071237	0,035942	0,026648	1,34879	0,207154
X4	-0,074558	0,031585	-0,000036	0,000015	-2,36055	0,039916
X5	0,540838	0,205794	3,857704	1,467892	2,62806	0,025246

Рис. 3.15. Результаты оценивания уравнения регрессии

Рассмотрим результаты оценки параметров уравнения регрессии по столбцам (рис. 3.15). В первом столбце перечислены члены регрессионного уравнения, в том числе и свободный член уравнения.

Во втором столбце содержатся β-коэффициенты, которые являются отвлеченными (абстрактными) величинами и указывают на сколько среднеквадратических отклонений увеличится зависимая переменная при изменении соответствующего независимой переменной на 1 среднеквадратическое отклонение. На практике данный показатель используется для выявления фактора оказывающего наибольшее влияние на зависимую переменную. В рассматриваемом примере, наибольшее (положительное) влияние оказывает показатель X_5 ($\beta_5 = 0{,}54$).

В четвертом столбце содержатся значения параметров a_j оцененного уравнения, т.е. в данном случае получаем следующую регрессионную модель:

$$Y\,(X) = -0{,}17 + 0{,}059 \cdot X_1 + 0{,}036 \cdot X_2 - 0{,}000036 \cdot X_4 + 3{,}857 \cdot X_5.$$

В пятом столбце указаны стандартные ошибки коэффициентов уравнения. Стандартные ошибки показывают статистическую надежность коэффициента. Если стандартные ошибки имеют нормальное распределение, то примерно в 2 случаях из 3 истинный коэффициент регрессора находится в пределах одной стандартной ошибки соответствующего коэффициента, и примерно в 95 случаях из 100 в пределах двух стандартных ошибок. Значение стандартных ошибок используют для построения доверительных интервалов.

Шестой столбец выводит расчетное значение *t*-статистики Стьюдента. Ее значение используется для проверки значимости соответствующего коэффициента.

Анализируемый коэффициент $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ считается значимым, если рассчитанное системой *Statistica* для него значение *t*-критерия по абсолютной величине превышает $t_{табл}$, определяемым с использованием специальных таблиц по заданным уровню значимости (например, α = 0,05) и числу степеней свободы ($df = n - m - 10$).

Седьмой столбец (p-уровень) – показывает вероятность принять или отвергнуть гипотезу о равенстве нулю соответствующего коэффициента. Значения вероятности, указанные в таблице известны в статистике как уровни значимости α. Коэффициент регрессии a_0, a_1, a_2,…, a_m признается значимым, если рассчитанное системой *Statistica* для него значение уровня значимости p меньше (или равно) 0,05 (для 95 %-й доверительной вероятности). Если значение вероятности ниже уровня значимости α, то гипотеза H_0 отвергается и соответствующий коэффициент не равен нулю.

В рассматриваемом примере параметры a_4 и a_5 при переменных X_4 и X_5 значимы при уровне значимости α меньше, чем 0,05. Остальные коэффициенты получены не значимыми при уровне α = 0,05, так как значение вероятности для них больше 0,05.

Так же проверить статистическую значимость параметров можно используя табличное значение t-критерия Стьюдента. В нашем случае для α = 0,05 и df = 15 – 4 – 1 = 10, $t_{10,\ 0,05}$ = 2,23. Сравним для примера расчетное значение t-критерия Стьюдента (рис. 3.15) с табличным для:

$a_0 - t_{рас} = |-0,585| < 2,23 \rightarrow$ параметр статистически не значим;
$a_4 - t_{рас} = |-2,360| > 2,23 \rightarrow$ параметр статистически значим.

Так как оцененная множественная регрессионная модель получена, незначима по трем параметрам, необходимо исключить их из рассмотрения.

Чтобы получить новую модель необходимо повторить вышеописанную процедуру. При этом в модель не включаем незначимый свободный член. В список переменных ввести только значимые параметры.

Выбираем в меню «Анализ» → «Множественная регрессия» → «Переменные». В появившемся окне «*Список переменных*» слева выбираем Y, справа выбираем X_4, X_5 → «ОК». Получаем новые значения параметров для уравнения регрессии (рис. 3.16).

N=15	Итоги регрессии для зависимой переменной: Y (Таблица) R= ,99979057 R2= ,99958118 Скорректир. R2= ,99951674 F(2,13)=15513, p<0,0000 Станд. ошибка оценки: ,22687					
	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	B	Стд.Ош. B	t(13)	p-уров.
X4	-0,023811	0,007322	-0,000044	0,000013	-3,2518	0,006306
X5	1,014663	0,007322	7,574851	0,054664	138,5717	0,000000

Рис. 3.16. Результаты оценивания уравнения регрессии

Оценив вторую модель, можно утверждать, что она пригодна для практического использования, так как параметры модели статистически значимы по t-критерию Стьюдента, а уравнение в целом проходит тест по F-критерию Фишера. Записываем новое уравнение регрессии

$$Y(X) = -\ 0{,}000044 \cdot X_4 + 7{,}574 \cdot X_5.$$

В зависимости от целей исследования можно выбирать разные методы поиска модели. Можно выбрать не стандартную процедуру, а процедуру пошагового оценивания, указав, отображать результаты на каждом шаге или только итоги.

Для выполнения прогнозов по полученному уравнению необходимо показать, что регрессионная модель адекватна результатам наблюдений. С этой целью можно воспользоваться критерием Дарбина-Уотсона, согласно которого, рассчитанный системой *Statistica* коэффициент $d_{расч}$ необходимо сравнить с табличным значением $d_{табл}$ (для совокупности объемом n = 15, уровня значимости α = 0,05 и двух оцениваемых параметров регрессии, значение $d_{табл}$ = 1,54). Если $d_{расч} > d_{табл}$, то полученная модель адекватна и пригодна для прогнозирования.

Для определения критерия Дарбина-Уотсона ($d_{расч}$) в окне «*Результаты множественной регрессии*» на вкладке «*Остатки*» выбрать опцию «*Анализ остатков*» → «*Дополнительно*» → «*Статистика Дарбина-Уотсона*» (рис. 3.17).

Значения критерия Дарбина-Уотсона представлены в таблице (рис. 3.18).

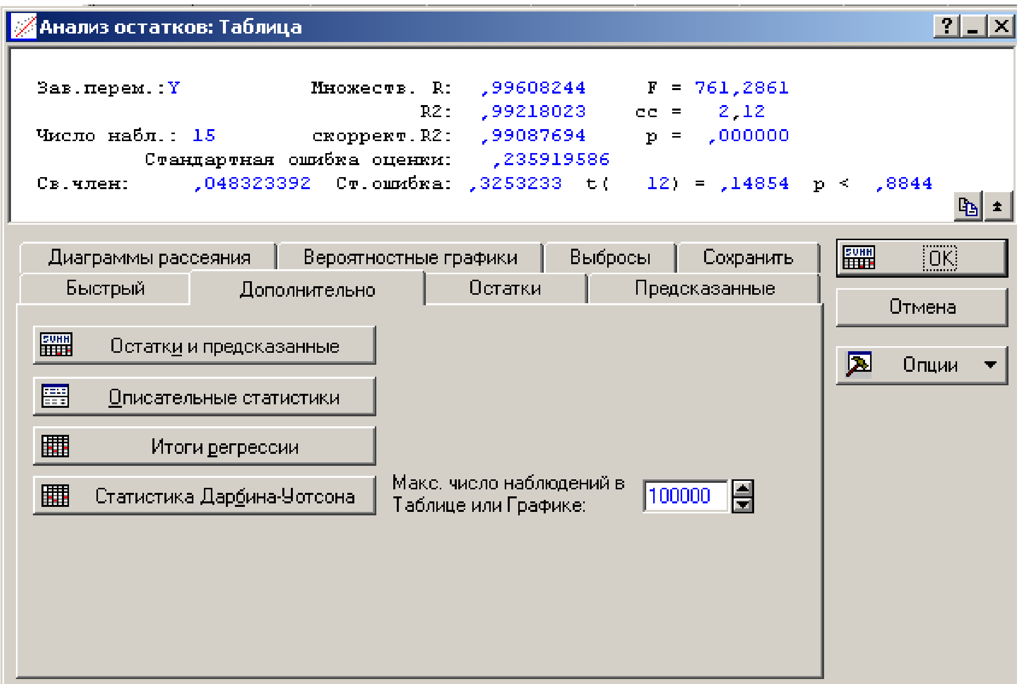


Рис. 3.17. Анализ остатков по критерию Дарбина-Уотсона

	Дарбина-Уотсона d (Таблица) и сериальная корреляция остатков	
	Дарбина-Уотсон.d	Сериал. Корр.
Оценка	2,737621	-0,584588

Рис. 3.18. Статистика Дарбина-Уотсона

В рассматриваемом примере $d_{\text{расч}}$ = 2,74 > 1,54, следовательно, модель можно использовать для прогнозирования.

В случае, когда модель адекватна результатам наблюдения для выполнения прогноза в окне «*Результаты множественной регрессии*» на вкладке «*Остатки/ предсказанные / наблюдаемые значения*» выбрать опцию «*Предсказать зависимую переменную*» (рис. 3.19).

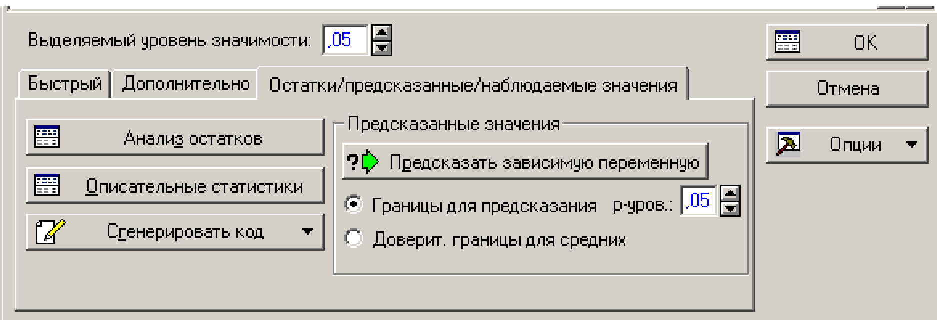


Рис. 3.19. Окно установки прогноза (показана нижняя часть окна)

Для того чтобы найти прогнозное значение зависимой переменной в пространственной модели, нужно задать (ввести в соответствующие поля окна) значение независимой переменной в соответствии с содержанием задачи на условия прогноза (рис. 3.20).

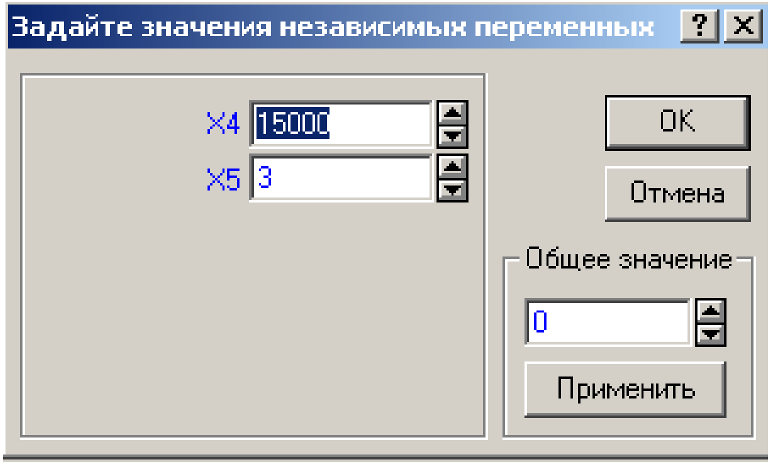


Рис. 3.20. Установка прогнозируемых значений переменной

Для выполнения прогноза: «Как изменится производительность труда (Y) на московском предприятии, если среднегодовую численность рабочих (X_4) сократить на 780 человек, а коэффициент сменности оборудования (X_5) повысить до 3?» необходимо в окне (рис. 3.20) задать соответствующие значения в X_4 и X_5. Результаты полученного прогноза представлены на рис. 3.21.

	Предск.значения для (Таблица) перемен.: Y		
Переменная	**B-Веса**	Значение	B-Веса * знач.
X4	-0,000042	15000,00	-0,62817
X5	7,536567	3,00	22,60970
Св.член			0,04832
Предсказ.			22,02986
-95,0%ДП			21,32611
+95,0%ДП			22,73360

Рис. 3.21. Прогнозные значения

В первом столбце (рис. 3.21) содержатся наименования расчетных и исходных показателей. Во втором столбце приведено значение параметров a_4 и a_5. В третьем – значение независимых переменных используемых для расчета прогноза. В четвертом – значение независимой переменной (с доверительным интервалом) рассчитанное в результате оценивания прогноза.

По рассмотренному алгоритму можно выполнять прогнозирование для каждого из значимых факторов в разных вариантах.

Контрольные вопросы

1. Перечислите виды статистического анализа данных.

2. Для чего используются коэффициенты парной корреляции?

3. В каких случаях применяются коэффициенты множественной корреляции?

4. Как определить характер связи по значению коэффициента корреляции?

5. Какие задачи решаются методом корреляции?

6. Когда применяются коэффициенты ранговой корреляции?

7. С помощью какого критерия проверяется значимость уравнения регрессии?

8. Как оценивается статистическая значимость параметров уравнения регрессии?

9. Для каких целей используется β-коэффициент?

10. Что показывает коэффициент эластичности?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание 1. Руководство компании по результатам производственной деятельности 15 своих филиалов в различных городах России за год (табл. 3.4, 3.5) анализирует факторы, влияющие на производительность труда (y) и предполагает, что важнейшими из них являются следующие:

x_1 – среднегодовая стоимость основных фондов, тыс. руб.

x_2 – удельный вес рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих, %

x_3 – трудоемкость единицы продукции

x_4 – среднегодовая численность рабочих

x_5 – коэффициент сменности оборудования

x_6 – удельный вес потерь от брака

x_7 – среднегодовой фонд заработной платы, тыс. руб.

Выполнить

Корреляционный анализ:

– построить диаграммы рассеяния;

– получить матрицу парных коэффициентов корреляции (Пирсона);

– вычислить частные коэффициенты корреляции;

– построить матричную диаграмму рассеяния;

– вычислить ранговые коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла;

– проанализировать все полученные результаты.

Регрессионный анализ:

– получить линейное уравнение множественной регрессии, выбрав в качестве зависимой переменной – Y, в качестве независимых переменных X_i, соответствующие варианту;

– определить коэффициент множественной корреляции и коэффициент детерминации полученной модели;

– проверить значимость построенной модели, используя уровень значимости $\alpha = 0{,}05$;

– если модель значима, дать оценку коэффициентов множественной регрессии на основе t-критерия Стьюдента;

– пересчитать уравнение множественной регрессии, используя только значимые факторы;

– проверить адекватность полученной регрессионной модели;

– выполнить прогнозирование в соответствии с вариантом задания.

Таблица 3.4

Производственные показатели филиалов

Город	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Москва	14	101,03	35	0,4	15780	2,01	0,22	13002
Санкт-Петербург	14,02	98,54	36	0,42	14760	1,86	0,25	10145,6
Нижний Новгород	7,03	49	17	1,83	630	0,95	0,5	5040,9
Ульяновск	7,01	50	17	1,85	633	0,93	0,52	5027,39
Пенза	8,21	57,42	19	1,43	752	1,08	0,44	5903,3
Самара	10	70	24	1,01	920	1,33	0,35	7100
Чебоксары	9,02	61,03	22	1,23	830	1,19	0,39	6494,6
Саранск	11	78,09	26	0,82	1028	1,44	0,37	7500
Челябинск	9,05	63,31	28	1,2	804	1,2	0,38	6516,5
Тольятти	11	77,05	29	0,81	1028	1,46	0,32	7940
Волгоград	12	84,03	27	0,64	1126	1,6	0,29	8900
Рязань	12	83	29	0,66	1127	1,59	0,25	8668
Красноярск	12	84	30	0,68	1096	1,59	0,29	8670,91
Тула	7,26	50,81	17	1,75	657	0,96	0,49	5209,8
Казань	7,01	55,01	16	1,85	631	0,93	0,51	5027,3

Таблица 3.5

Варианты индивидуальных заданий

Вариант, №	Независимые переменные (факторные признаки)	Задания по прогнозированию
		Как изменится производительность труда на московском предприятии, если:
1	2	3
1	x_1, x_3, x_4, x_5	среднегодовую стоимость основных фондов увеличить на 80 тыс. руб., а и трудоемкость единицы продукции на 0,6?
2	x_3, x_4, x_5, x_6	трудоемкость единицы продукции сократить в 4 раза, а коэффициент сменности оборудования снизить в 2 раза?
3	x_1, x_2, x_3, x_5	среднегодовую стоимость основных фондов увеличить на 60 тыс. руб., а коэффициент сменности оборудования – на 0,9?
4	x_1, x_2, x_6, x_7	среднегодовую стоимость основных фондов сократить до 90 тыс. руб., а удельный вес потерь от брака понизить в 2 раза?

Окончание таблицы

1	2	3
5	x_1, x_3, x_4, x_7	среднегодовую стоимость основных фондов сократить до 95 тыс. руб., а трудоемкость единицы продукции понизить на 0,1?
6	x_1, x_2, x_5, x_7	коэффициент сменности оборудования увеличить в 2 раза, а среднегодовой фонд заработной платы уменьшить на 92 тыс. руб.?
7	x_4, x_5, x_6, x_7	коэффициент сменности оборудования уменьшить в 2 раза, а среднегодовой фонд заработной платы увеличить на 92 тыс. руб.
8	x_1, x_3, x_5, x_7	коэффициент сменности оборудования увеличить на 1,5, а среднегодовой фонд заработной платы уменьшить на 32 тыс. руб.?
9	x_1, x_3, x_5, x_7	коэффициент сменности оборудования уменьшить на 1,5, а среднегодовой фонд заработной платы увеличить на 32 тыс. руб.?
10	x_1, x_2, x_4, x_5	среднегодовую численность рабочих сократить на 780 человек, а коэффициент сменности оборудования повысить до 3?

Задание 2. Рассматриваются следующие показатели для 50 предприятий:

Y_1 – производительность труда;

Y_2 – индекс снижения себестоимости продукции;

Y_3 – рентабельность;

X_4 – трудоемкость единицы продукции;

X_5 – удельный вес рабочих;

X_6 – удельный вес покупных изделий;

X_7 – коэффициент сменности оборудования;

X_8 – премии и вознаграждения на одного работника;

X_9 – удельный вес потерь от брака;

X_{10} – фондоотдача;

X_{11} – среднегодовая численность работников;

X_{12} – среднегодовая стоимость основных производственных фондов;

X_{13} – среднегодовой фонд заработной платы работников;

X_{14} – фондовооруженность труда;

X_{15} – непроизводственные расходы.

Выполнить регрессионный анализ для параметров соответствующих своему варианту.

Таблица 3.6

Варианты заданий 1–10

№ варианта	Результативный признак Y_j	Номер факторных признаков X_i
1	1	6, 8, 11, 12, 15
2	1	8, 11, 12, 13, 15
3	1	8, 9, 13, 14, 15
4	3	8, 9, 10, 11, 15
5	3	8, 9, 10, 12, 15
6	2	4, 5, 6, 8, 9
7	2	4, 5, 6, 7, 9
8	2	4, 5, 6, 8, 9
9	2	4, 5, 8, 9, 15
10	2	4, 5, 7, 9, 15

Значения параметров для расчета приведены в Приложении.

4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Случайные открытия совершают
только подготовленные умы.
Блез Паскаль

4.1. Представление результатов экспериментов

Ранее мы рассматривали пассивный эксперимент, и математическая статистика использовалась, в частности при обработке экспериментальных данных. На стадии постановки эксперимента она не применялась. При активном же эксперименте математическая статистика используется уже на стадии постановки и планирования эксперимента.

Под математической теорией планирования эксперимента будем понимать науку о способах составления экономичных экспериментальных планов, которые позволяют извлекать наибольшее количество информации об объекте исследования, о способах проведения эксперимента, о способах обработки экспериментальных данных и их использования для оптимизации производственных процессов, а также инженерных расчетов

До середины XVIII в. вопросами организации эксперимента целиком занимались экспериментаторы. Уделом математиков была обработка уже проведенного эксперимента. Постепенно стало ясно, что речь должна идти не только об обработке экспериментальных данных, а об оптимальной процедуре математико-статистического анализа. Такие процедуры и были разработаны усилиями многих математиков. Основные этапы становления планирования эксперимента:

– метод наименьших квадратов (А. Лежандр, К. Гаусс, конец XVIII – начало XIX в.);

– основы регрессионного и корреляционного анализа (Ф. Гальтон, К. Пирсон, конец XIX – начало XX в.);

– концепция малых выборок (Госсет, более известный под псевдонимом Стьюдент, начало XX в.);

– основы математического планирования эксперимента (Р. Фишер, середина XX в.);

– разработка последовательной стратегии экспериментирования, шаговая стратегия экспериментирования (Бокс и Уилсон).

Причем получается определенная сбалансированность между стремлением к минимизации числа опытов и уровнем точности и надежности полученных результатов. Хорошо спланированный эксперимент обеспечивает оптимальную обработку результатов, и, следовательно, возможность четких статистических выводов. Однако, в основе статистических методов обработки данных (дисперсионный и регрессионный анализ) лежат определенные предпосылки о свойствах законов распределения случайных величин, их независимости, однородности дисперсий и т.д., что в реальных задачах выполняется далеко не всегда. Совокупность таких предпосылок принято называть моделью ситуации. Возникает вопрос: зачем оптимально планировать эксперимент, если нет уверенности в том, выполняются ли предпосылки принятой модели ситуации? В конце 70-х гг. XX в. центр тяжести переместился на проблему принятия решения при выборе модели ситуации и обработке данных. Так возникло новое направление, известное под названием анализа данных. Здесь можно выделить такие основные этапы, как:

– проверка выполнимости предпосылок модели ситуации;

– использование априорной информации (байесовские методы);

– применение устойчивых (робастных) процедур в случае нарушения тех или иных предпосылок или невозможности их проверки.

Таким образом, экспериментатор должен наилучшим образом выбрать модель ситуации, план эксперимента и метод обработки.

Под экспериментом будем понимать совокупность операций совершаемых над объектом исследования с целью получения информации об его свойствах. Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта. Ее можно использовать и при анализе процессов и при проектировании объектов. Можно получить хорошо аппроксимирующую математическую модель, если целенаправленно применяется активный эксперимент. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации, является задача оптимизации, то есть нахождения такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный показатель оптимальности принимает экстремальное значение.

Опыт – это отдельная экспериментальная часть.

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок проведения опытов.

Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий). Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления. В процессе измерений, последующей обработки данных, а также формализации результатов в виде математической модели возникают погрешности и теряется часть информации, содержащейся в исходных данных. Применение методов планирования эксперимента позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то применение методов планирования эксперимента позволяет модернизировать математическую модель с проведением дополнительных опытов без потери предыдущей информации и с минимальными затратами.

Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения опытов, при которых удается получить надежную и достоверную информацию об объекте с наименьшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

– планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;

– планы оптимизации (экстремального эксперимента), задачей которого является поиск оптимума – максимального или минимального значения параметра;

– планы аппроксимации для установления аналитической зависимости между параметрами и факторами (регрессионные модели);

– планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;

– планирование при изучении динамических процессов и т.д.

Инициатором применения планирования эксперимента является Рональд А. Фишер, другой автор известных первых работ – Френк Йетс. Далее идеи планирования эксперимента формировались в трудах Дж. Бокса, Дж. Кифера. В нашей стране – в трудах Г.К. Круга, Е.В. Маркова и др.

В настоящее время методы планирования эксперимента заложены в специализированных пакетах программных продуктов.

При использовании методов планирования эксперимента необходимо найти ответы на 4 вопроса:

1. Какие сочетания факторов и сколько таких сочетаний необходимо взять для определения функции отклика (Y)?

2. Как найти коэффициенты уравнения регрессии?

3. Как оценить точность представления функции отклика?

4. Как использовать полученное представление для поиска оптимальных значений Y?

4.2. Планирование полного факторного эксперимента

Студент должен

освоить понятия: матрица планирования эксперимента, планы первого порядка, кодирование факторов, уровни факторов, ортогональность, ротатабельность, рандомизация;

получить навыки: выбора и построения матрицы эксперимента, выбора факторов и их кодирования, статистического анализа полученной модели уравнения регрессии и интерпретации результатов эксперимента.

Экспериментально-статистические модели

Полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов. На основании полного факторного эксперимента строят регрессионные модели и вычисляют коэффициенты уравнения регрессии.

Математическая модель зависимости параметра от факторов обычно ищется в виде полинома первой, второй или высших степеней.

По порядку аппроксимирующего полинома, коэффициенты которого ищутся в ходе эксперимента, бывают планы:

– первого порядка, предназначенные для поиска коэффициентов линейного уравнения

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i ,$$

где Y – параметр; k – количество факторов; X_i – i-й фактор; b_0, b_i – искомые коэффициенты;

– планы второго порядка, в которых искомая зависимость аппроксимируется уравнением

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{i,j=1}^{C} b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} X_i^2 ,$$

где j – порядковый номер, отличный от i, причем $j < i$; C – количество возможных сочетаний из k по 2:

$$C = \frac{k!}{2(k-2)!}$$

– планы высших порядков.

По способу перебора факторов различают:

– полный факторный эксперимент (ПФЭ), при котором выполняется перебор всех возможных сочетаний уровней факторов;

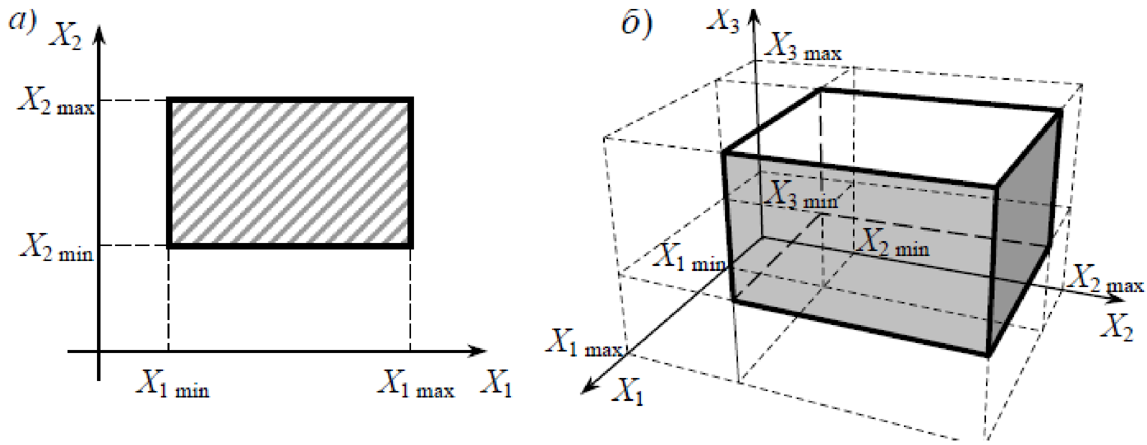
– дробный факторный эксперимент (ДФЭ), план которого представляет некоторую часть плана ПФЭ (и т.д.), при этом перебор сочетаний факторов будет неполным.

Кодирование факторов

Областью определения факторов называется диапазон изменения их значений, принятый при реализации плана эксперимента:

$$X_i \in [X_{i\min}; X_{i\max}].$$

Для двух факторного эксперимента область определения представляет собой прямоугольник (рис. 4.1, *а*), для трехфакторного – прямоугольный параллелепипед (рис. 4.1, *б*), для *k*-факторного – *k*-мерный параллелепипед.



а *б*

Рис. 4.1. Области определения двухфакторного (*а*) и трехфакторного (*б*) экспериментов

Установление области определения факторов – важный этап планирования эксперимента. От его правильного выполнения зависит успех эксперимента. Выбор значимых факторов и области их определения выполняется на основе априорной информации или путем постановки отсеивающего эксперимента. После выявления значимых факторов области их определения устанавливают их уровни.

Уровнем фактора называется его значение, фиксируемое в эксперименте. Экспериментатор может устанавливать любой уровень фактора в пределах области его определения. Различают верхний, нижний и нулевой уровни. Верхний и нижний уровни соответствуют границам области определения: X_i – max и X_i – min. Нулевой уровень соответствует середине интервала:

$$X_{i0} = \frac{X_{i\min} + X_{i\max}}{2}.$$

Интервалом варьирования называют величину, равную максимальному отклонению уровня фактора от нулевого:

$$\Delta X_i = X_{i0} - X_{i\,\min} = X_{i\,\max} - X_{i0}.$$

Для дальнейшего планирования эксперимента целесообразно перейти от натуральных значений факторов к кодированным.

Кодированным называется значение

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i},$$

где X_i – натуральное значение i-го фактора на некотором уровне.

Кодированные значения любого фактора на нижнем, верхнем и нулевом уровнях составляют:

$$x_{i\,min} = -1;\ x_{i\,max} = +1;\ x_{i\,0} = 0.$$

Область определения кодированных факторов для двухфакторного эксперимента представляет собой квадрат (рис. 4.2).

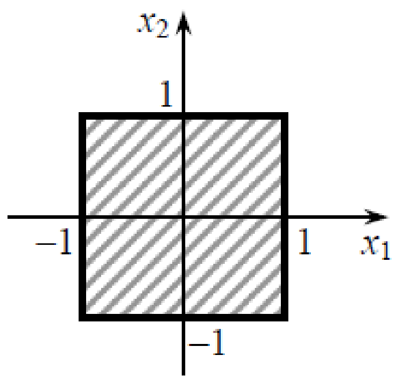


Рис. 4.2. Область определения кодированных факторов
при двухфакторном эксперименте

В дальнейшем как планирование эксперимента, так и обработка экспериментальных данных выполняются с использованием кодированных значений факторов. При составлении плана это дает следующие преимущества:

– кодированные значения безразмерны, что позволяет сравнивать между собой уровни различных физических величин;

– кодированное значение уровня фактора, в отличие от натурального, дает представление о положении уровня относительно границ области определения;

– использование кодированных значений значительно облегчает разработку матрицы планирования эксперимента.

При обработке результатов эксперимента и аппроксимации этих результатов полиномами, в которых натуральные значения факторов заменены кодированными значениями, использование кодированных значений позволяет:

– значительно упростить вычисления;

– получить возможность сравнивать коэффициенты уравнения.

Поскольку кодированные значения безразмерны и изменяются в одинаковых интервалах [–1; +1], то все коэффициенты полинома имеют одинаковую размерность, равную размерности параметра Y, а величина коэффициентов однозначно определяет степень влияния данного члена полинома на величину параметра. Исключив из уравнения члены, коэффициенты при которых малы, можно значительно упростить полученную зависимость.

Матрица планирования полного факторного эксперимента

План эксперимента принято составлять в виде матрицы планирования – таблицы, каждая строка которой соответствует некоторому сочетанию уровней факторов, которое реализуется в опыте. Существует несколько приемов построения матрицы. При фиксации каждого фактора только на двух уровнях (–1 и +1), наиболее распространен прием чередования знаков. Прием состоит в том, что для первого фактора знак меняется в каждой следующей строке, для второго – через строку, для третьего – на каждой четвертой строке и т.д. Построенные таким образом матрицы для двух, трех и четырех факторов приведены в табл. 4.1.

Фактор x_0 – фиктивный и введен для удобства определения свободного члена полинома b_0. Значение фактора x_0 всегда равно +1.

Матрицы ПФЭ обладают рядом свойств, позволяющих проверить правильность их составления.

1. Свойство симметричности: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю (за исключением столбца, соответствующего свободному члену); каждый фактор в матрице на верхнем уровне встречается столько же раз, сколько и на нижнем:

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu} = 0,$$

где u – номер опыта, n – количество опытов, $n = 2^k$.

2. Свойство нормирования: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов; каждый фактор в матрице встречается только на уровнях –1 и +1:

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu}^2 = n.$$

3. Свойство ортогональности: скалярное произведение всех вектор-столбцов (сумма почленных произведений элементов двух любых вектор-столбцов матрицы) равны нулю:

$$\sum_{u=1}^{n} x_{iu} x_{ju} = 0.$$

4. Свойство ротатабельности: точки в матрице выбираются так, что точность предсказания параметра одинакова во всех направлениях.

Планы, для которых выполняется свойство 3, называют ортогональными. Благодаря этому свойству резко уменьшаются трудности, связанные с расчетом коэффициентов уравнения регрессии.

Таблица 4.1

Матрица планирования эксперимента

Номер опыта	Факторы					Параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	+1	+1	-1	-1	-1	Y_1
2	+1	-1	-1	-1	-1	Y_2
3	+1	+1	+1	-1	-1	Y_3
ПФЭ 2^2 4	+1	-1	+1	-1	-1	Y_4
5	+1	+1	-1	+1	-1	Y_5
6	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
7	+1	+1	+1	+1	-1	Y_7
ПФЭ 2^3 8	+1	-1	+1	+1	-1	Y_8
9	+1	+1	-1	-1	+1	Y_9
10	+1	-1	-1	-1	+1	Y_{10}
11	+1	+1	+1	-1	+1	Y_{11}
12	+1	-1	+1	-1	+1	Y_{12}
13	+1	+1	-1	+1	+1	Y_{13}
14	+1	-1	-1	+1	+1	Y_{14}
15	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{15}
ПФЭ 2^4 16	+1	-1	+1	+1	+1	Y_{16}

Поскольку результаты наблюдений отклика носят случайный характер, приходится в каждой точке плана проводить не один, а m* параллельных опытов, осреднение результатов которых, дает возможность уменьшить погрешности оценки истинного значения отклика в $\sqrt{m^*}$ раз.

В каждой серии экспериментов их последовательность рандомизируется, т.е. с помощью таблиц случайных чисел определяется случайная последовательность реализации экспериментов. Рандомизация дает возможность свести эффект некоторого случайного фактора к случайной погрешности.

Таким образом, планирование активного эксперимента – это процедура выбора условий проведения опытов, их количества, необходимых и достаточных для решения задач с поставленной точностью.

Использование теории планирования эксперимента обеспечивает:

– предельное сокращение необходимого числа опытов;

– одновременное варьирование всех факторов;

– выбор четкой стратегии, что позволяет принимать обоснованные решения после каждой серии опытов;

– минимизацию ошибок эксперимента.

Определение коэффициентов уравнения регрессии

Коэффициенты линейного уравнение множественной регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

и уравнения с коэффициентами двойного взаимодействия:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \ldots + b_{23}x_2x_3$$

определяются методом наименьших квадратов:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right) \to \min_{b_i};$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - b_0 - b_1X_{1j} - b_2X_{2j}\right)X_{1j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_jX_{1j} - b_0\sum_{j=1}^{n}X_{1j} - b_1\sum_{j=1}^{n}X_{1j}^2 - b_2\sum_{j=1}^{n}X_{1j}X_{2j} = 0.$$

На основании свойств ПФЭ:

– симметричности $b_0 \sum X_{1j} = 0$;

– нормирования $b_1 \sum X_{1j}^2 = nb_1$;

– ортогональности $b_2 \sum X_{1j} X_{2j} = 0$;

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{1j}}{n}; \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{2j}}{n}; \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j X_{0j}}{n}.$$

Следовательно, любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец x, деленным на число опытов n.

Можно показать, что аналогичным образом определяются коэффициенты, если в уравнении учитываются линейные взаимодействия (двойные, тройные):

$$b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j (X_1 X_2)_j}{n}; \quad b_{123} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j (X_1 X_2 X_3)}{n}; \text{ и т.д.}$$

Следует обратить особое внимание на то, что все линейные коэффициенты независимы, так как в формулы для их расчета входят свои одноименные переменные. Поэтому каждый коэффициент характеризует роль соответствующей переменной в процессе или силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем больше влияние оказывает этот фактор на величину y. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора отклик увеличивается, а если минус – уменьшается.

Факторы, имеющие коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, могут быть выведены из состава уравнения, так как их влияние на параметры отклика будет отнесено к ошибке эксперимента. Учитывая ортогональность плана, оставшиеся коэффициенты уравнения регрессии можно не пересчитывать. При отсутствии ортогональности плана эксперимента все коэффициенты необходимо пересчитать заново.

Статистический анализ результатов

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Планирование эксперимента исходит из статистического характера зависимостей, поэтому полученные уравнения подвергаются статистическому анализу с целью извлечь из результатов эксперимента максимум информации и убедиться в достоверности полученной зависимости и ее точности.

Надежность оценок b_i уравнения регрессии можно охарактеризовать их доверительными интервалами Δb_i, в которых с заданной вероятностью находится истинное значение этого параметра.

Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии проводится по t-критерию Стьюдента. При этом проверяется нуль-гипотеза H_0: $b_i = 0$, т.е. коэффициент при заданном уровне значимости α отличен от нуля.

По таблице определяем критические значения t-критерия для уровня значимости α = 0,05 и числа степеней свободы $f = n – l$, где l – число определенных параметров, n – число опытов. Вычисляется дисперсия для коэффициентов регрессии

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{n}, \; S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2.$$

Строится доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии: $\Delta b_i = S_b \cdot t_{\alpha,f}$.

Тогда доверительный интервал для коэффициентов уравнения регрессии составит:

$$b_i + \Delta b_i \;,\; b_i - \Delta b_i.$$

Чем уже доверительный интервал, тем с большей уверенностью можно говорить о значимости этого коэффициента.

Необходимо помнить, что если абсолютная величина коэффициента регрессии больше, чем его доверительный интервал, то этот коэффициент значим.

Таким образом, если $b_i > \Delta b$, то коэффициент b_i значим, в противном случае нет.

Проверка адекватности модели

Основное требование к математической модели заключается в ее пригодности для решения поставленной задачи и адекватности процессу. Регрессионную модель называют адекватной, если предсказанные по ней значения Y согласуются с результатами наблюдений.

Сформулируем нуль-гипотезу H_0: уравнение регрессии адекватно. Альтернативная гипотеза H_1: уравнение регрессии неадекватно. Для проверки этих гипотез применяют F-критерий Фишера.

При отсутствии параллельных опытов и дисперсии воспроизводимости адекватность уравнения оценивается по критерию Фишера сравнением остаточной дисперсии $S^2_{\text{ост}}$ и дисперсии относительно среднего S^2_y

$$F = \frac{S_y^2}{S_{\text{ост}}^2},\; S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2.$$

В этом случае критерий Фишера показывает, во сколько раз уменьшается рассеяние относительно полученного уравнения регрессии по сравнению с рассеянием относительно среднего. То есть во сколько раз уравнение регрессии предсказывает результаты лучше, чем среднее. Чем больше значение F критерия превышает табличное для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы, тем эффективнее уравнение регрессии:

$$F > F_\alpha\left(f_1, f_2\right),\; f_1 = n - 1,\; f_2 = n - l.$$

Следовательно, все коэффициенты уравнения регрессии ПФЭ имеют одинаковую точность (дисперсию). В этом заключается принципиальное отличие коэффициентов уравнения регрессии, полученных по плану, от коэффициентов уравнений, полученных пассивным экспериментом. Планы, по результатам которых коэффициенты уравнения регрессии определяются с одинаковой дисперсией, называются ротатабельными. Статистически незначимые коэффициенты исключаются из уравнения, а остальные коэффициенты при этом не пересчитываются. После этого уравнение регрессии составляется в виде уравнения связи выходного параметра y и переменных x_i.

Порядок выполнения расчета

1. Записать содержание задания и таблицу исходных данных в соответствии с вариантом.

2. Выполнить расчет по алгоритму для плана 3^k (рис. 4.3.)

3. Провести анализ результатов и сделать вывод.

Рис. 4.3 Алгоритм выполнения работы

Контрольные вопросы

1. Чем отличается активный эксперимент от пассивного?

2. Что понимаем под функцией отклика?

3. Как выбирается математическая модель для проведения эксперимента?

4. Для чего используется метод наименьших квадратов?

5. Какие факторы выбираются для проведения эксперимента?

6. В чем заключатся процедура кодирования факторов?

7. Перечислите свойства матрицы планирования эксперимента.

8. В чем состоят этапы проведения регрессионного анализа?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание 1. Необходимо установить зависимости флегмового числа и расхода греющего пара на обогрев ректификационной колонны, предназначенной для разделения изопентан-пентан-гексановой фракции, от количества изопентана, пентана и гексана в исходной смеси.

Исходные данные: для получения уравнения регрессии проведен факторный эксперимент 2^k (табл. 4.2–4.6).

Таблица 4.2

Варианты 1, 2

№ опыта	Количество изопентана, кг/ч	Количество пентана, кг/ч	Количество гексана, кг/ч	Флегмовое число	Тепловая нагрузка на кипятильник, кДж/ч
1	6477,0	6936,0	2640,0	18,0	38476547,9
2	6477,0	6936,0	10185,0	21,0	44546006,0
3	6477,0	10151,0	2640,0	25,0	52670991,5
4	6477,0	10151,0	10185,0	27,0	56719158,0
5	9183,5	6936,0	2640,0	11,0	24296811,9
6	9183,5	6936,0	10185,0	13,0	26300916,3
7	9183,5	10151,0	2640,0	14,5	31399481,9
8	9183,5	10151,0	10185,0	15,5	33423869,8

Таблица 4.3

Варианты 3, 4

№ опыта	Количество изопентана, кг/ч	Количество пентана, кг/ч	Количество гексана, кг/ч	Флегмовое число	Тепловая нагрузка на кипятильник, кДж/ч
1	6577,0	6800,0	2650,0	18,0	38476547,9
2	6577,0	6800,0	10105,0	21,0	44546006,0
3	6577,0	10100,0	2650,0	25,0	52670991,5
4	6577,0	10100,0	10105,0	27,0	56719158,0
5	9083,5	6800,0	2650,0	11,0	24296811,9
6	9083,5	6800,0	10105,0	13,0	26300916,3
7	9083,5	10100,0	2650,0	14,5	31399481,9
8	9083,5	10100,0	10105,0	15,5	33423869,8

Таблица 4.4

Варианты 5, 6

№ опыта	Количество изопентана, кг/ч	Количество пентана, кг/ч	Количество гексана, кг/ч	Флегмовое число	Тепловая нагрузка на кипятильник, кДж/ч
1	6450,0	6750,0	2600,0	18,0	38476547,9
2	6450,0	6750,0	10201,0	21,0	44546006,0
3	6450,0	10251,0	2600,0	25,0	52670991,5
4	6450,0	10251,0	10201,0	27,0	56719158,0
5	9400,5	6750,0	2600,0	11,0	24296811,9
6	9400,5	6750,0	10201,0	13,0	26300916,3
7	9400,5	10251,0	2600,0	14,5	31399481,9
8	9400,5	10251,0	10201,0	15,5	33423869,8

Таблица 4.5

Варианты 7, 8

№ опыта	Количество изопентана, кг/ч	Количество пентана, кг/ч	Количество гексана, кг/ч	Флегмовое число	Тепловая нагрузка на кипятильник, кДж/ч
1	6333,0	6860,0	2240,0	18,0	38476547,9
2	6333,0	6860,0	10308,0	21,0	44546006,0
3	6333,0	11151,0	2240,0	25,0	52670991,5
4	6333,0	11151,0	10308,0	27,0	56719158,0
5	9353,5	6860,0	2240,0	11,0	24296811,9
6	9353,5	6860,0	10308,0	13,0	26300916,3
7	9353,5	11151,0	2240,0	14,5	31399481,9
8	9353,5	11151,0	10308,0	15,5	33423869,8

Таблица 4.6.

Варианты 9,10

№ опыта	Количество изопентана, кг/ч	Количество пентана, кг/ч	Количество гексана, кг/ч	Флегмовое число	Тепловая нагрузка на кипятильник, кДж/ч
1	6740,0	6609,0	2599,0	18,0	38476547,9
2	6740,0	6936,0	10085,0	21,0	44546006,0
3	6740,0	10155,0	2599,0	25,0	52670991,5
4	6740,0	10155,0	10085,0	27,0	56719158,0
5	9459,0	6609,0	2599,0	11,0	24296811,9
6	9459,0	6609,0	10085,0	13,0	26300916,3
7	9459,0	10155,0	2599,0	14,5	31399481,9
8	9459,0	10155,0	10085,0	15,5	33423869,8

Задание 2. Необходимо установить зависимость концентрации триметилкарбинола (ТМК) в очищенной изобутиленовой фракции на выходе из абсорбера от давления в аппарате, начальной температуры загрязненного газа, расхода и температуры абсорбента (воды).

Исходные данные: для получения уравнения регрессии проведен полный факторный эксперимент 2^k (табл. 4.7–4.10).

Таблица 4.7

Варианты 11, 12

№ опыта	Давление, атм	Температура газа, °С	Расход абсорбента, кг/ч	Температура абсорбента, °С	Концентрация ТМК, % масс.
1	1	30	8000	10	0,37
2	1	30	8000	30	0,47
3	1	30	9000	10	0,26
4	1	30	9000	30	0,49
5	1	30	8000	10	0,70
6	1	30	8000	30	0,78
7	1	30	9000	10	0,56
8	1	30	9000	30	0,76
9	1,3	30	8000	10	0,20
10	1,3	30	8000	30	0,42
11	1,3	30	9000	10	0,06
12	1,3	30	9000	30	0,44
13	1,3	50	8000	10	0,45
14	1,3	50	8000	30	0,66
15	1,3	50	9000	10	0,29
16	1,3	50	9000	30	0,67

Таблица 4.8

Варианты 13,14

№ опыта	Давление, атм	Температура газа, °С	Расход абсорбента, кг/ч	Температура абсорбента, °С	Концентрация ТМК, % масс.
1	1,01	31	8500	9	0,375
2	1,01	31	8500	29	0,475
3	1,01	31	9500	9	0,265
4	1,01	31	9500	29	0,495
5	1,01	52	8500	9	0,705
6	1,01	52	8500	29	0,785
7	1,01	52	9500	9	0,565
8	1,01	52	9500	29	0,765
9	1,305	31	8500	9	0,205
10	1,305	31	8500	29	0,425
11	1,305	31	9500	9	0,065
12	1,305	31	9500	29	0,445
13	1,305	52	8500	9	0,455
14	1,305	52	8500	29	0,665
15	1,305	52	9500	9	0,295
16	1,305	52	9500	29	0,675

Таблица 4.9

Варианты 15, 16

№ опыта	Давление, атм	Температура газа, °С	Расход абсорбента, кг/ч	Температура абсорбента, °С	Концентрация ТМК, % масс.
1	0,95	29	7900	11	0,365
2	0,95	29	7900	31	0,465
3	0,95	29	9100	11	0,259
4	0,95	29	9100	31	0,48
5	0,95	49	7900	11	0,69
6	0,95	49	7900	31	0,77
7	0,95	49	9100	11	0,55
8	0,95	49	9100	31	0,75
9	1,28	29	7900	11	0,19
10	1,28	29	7900	31	0,41
11	1,28	29	9100	11	0,05
12	1,28	29	9100	31	0,43
13	1,28	49	7900	11	0,44
14	1,28	49	7900	31	0,65
15	1,28	49	9100	11	0,28
16	1,28	49	9100	31	0,66

Таблица 4.10

Варианты 17, 18

№ опыта	Давление, атм	Температура газа, °С	Расход абсорбента, кг/ч	Температура абсорбента, °С	Концентрация ТМК, % масс.
1	0,98	30,5	8250	8	0,37
2	0,98	30,5	8250	33,5	0,47
3	0,98	30,5	9080	8	0,26
4	0,98	30,5	9080	33,5	0,49
5	0,98	53	8250	8	0,70
6	0,98	53	8250	33,5	0,78
7	0,98	53	9080	8	0,55
8	0,98	53	9080	33,5	0,76
9	1,29	30,5	8250	8	0,20
10	1,29	30,5	8250	33,5	0,42
11	1,29	30,5	9080	8	0,06
12	1,29	30,5	9080	33,5	0,44
13	1,29	53	8250	8	0,45
14	1,29	53	8250	33,5	0,66
15	1,29	53	9080	8	0,29
16	1,29	53	9080	33,5	0,67

Таблица 4.11

Варианты 19, 20

№ опыта	Давление, атм	Температура газа, °C	Расход абсорбента, кг/ч	Температура абсорбента, °C	Концентрация ТМК, % масс.
1	1	33	8600	8	0,35
2	1	33	8600	25	0,45
3	1	33	9700	8	0,23
4	1	33	9700	25	0,44
5	1	52,5	8600	8	0,65
6	1	52,5	8600	25	0,73
7	1	52,5	9700	8	0,52
8	1	52,5	9700	25	0,72
9	1,4	33	8600	8	0,15
10	1,4	33	8600	25	0,38
11	1,4	33	9700	8	0,01
12	1,4	33	9700	25	0,40
13	1,4	52,5	8600	8	0,41
14	1,4	52,5	8600	25	0,62
15	1,4	52,5	9700	8	0,23
16	1,4	52,5	9700	25	0,62

4.3. Планирование экспериментов при построении квадратичной модели

Студент должен

освоить понятия: композиционный план, ортогональный план, ядро плана, звездные точки;

получить навыки*:* построения композиционных ортогональных планов второго порядка, расчета коэффициентов полученной модели, статистического анализа результатов эксперимента, интерпретации результатов.

Планы второго порядка

Описание поверхности отклика полиномами первого порядка часто оказывается недостаточным. Во многих случаях удовлетворительная аппроксимация может быть достигнута, если воспользоваться полиномом второго порядка.

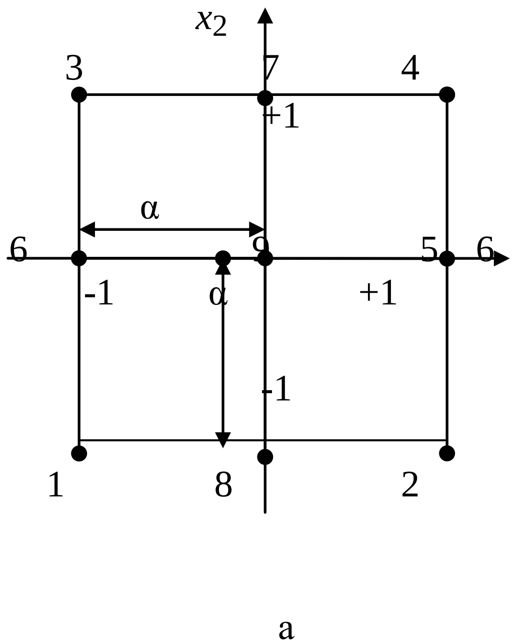
В этом случае требуется, чтобы каждый фактор варьировался не менее чем на трех уровнях. В этом случае полный факторный эксперимент содержит слишком большое количество опытов, равное 3^k. Так, при k = 3 опытов – 27, а число коэффициентов b = 10, при k = 5 число опытов 243, а коэффициентов 21. В связи с этим осуществление ПФЭ для планов второго порядка не только сложно, но и нецелесообразно.

Сократить число опытов можно, воспользовавшись так называемым композиционным или последовательным планом, разработанным Боксом и Уилсоном. Они обосновали возможность использования схем, в которых план типа 2^k, используемый в качестве «ядра», дополняется «звездными» точками (по две на каждый фактор), а также нулевой точкой в центре плана.

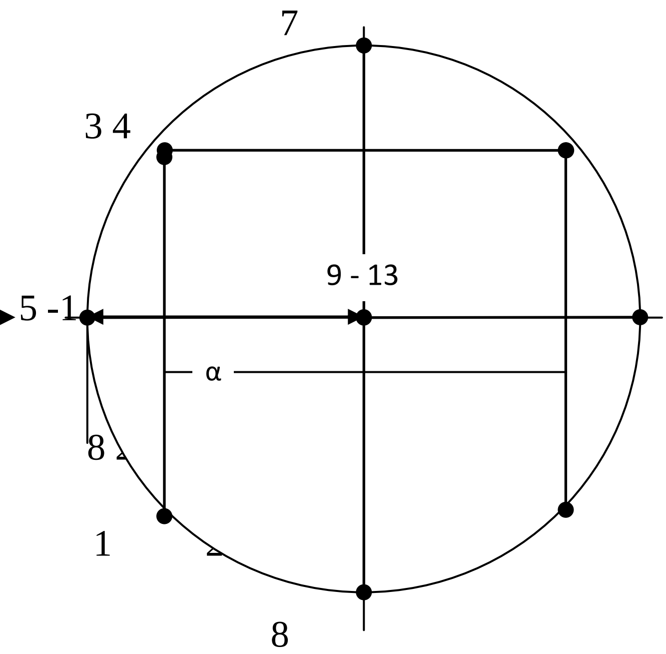
Так, при двух факторах модель функции отклика $y = f(x_1, x_2)$ второго порядка представляет собой поверхность в виде цилиндра, конуса, эллипса и т.д., описываемую в общем виде уравнением

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2.$$

Для определения такой поверхности необходимо располагать координатами не менее трех точек, т.е. факторы x_1 и x_2 должны варьироваться не менее чем на трех уровнях. Поэтому план эксперимента в плоскости факторов x_1 и x_2 (рис. 4.4, *а*) не может состоять лишь из опытов ПФЭ 2^2, располагающихся в вершинах квадрата (точки 1, 2, 3, 4), как это было для модели первого порядка. К ним должны быть добавлены опыты (звездные точки – 5, 6, 7, 8), расположенные на осях x_1 и x_2 с координатами (± α; 0), (0; ± α) и обязательно опыт 9 в центре квадрата, чтобы по любому направлению (5-9-6), (1-9-4) и т.д. располагалось три точки, определяющие кривизну поверхности в этом направлении.



а



б

Рис. 4.4. Планы второго порядка при k = 2:
а – ортогональный; б – ротатабельный

Таким образом, в общем случае ядро композиционного плана составляет при $k < 5$ ПФЭ 2^k, а при $k \geq 5$ – дробную реплику от него. Если линейное уравнение регрессии оказалось неадекватным, необходимо:

1) добавить 2^k звездных точек, расположенных на координатных осях факторного пространства (± α, 0, 0,…,0), (0, ± α, 0,…, 0), …, (0, 0,…,± α), где α – звездное плечо или расстояние до звездной точки;

2) провести n_0 опытов при значениях факторов в центре плана. При k факторах общее число опытов составит:

$$n = 2^k + 2 \cdot k + n_0 \text{ при } k < 5,$$

$$n = 2^{k-1} + 2 \cdot k + n_0 \text{ при } k \geq 5.$$

При этом величина звездного плеча α и число опытов в центре плана n_0 зависит от выбранного вида композиционного плана.

Композиционный план для $k = 2$ и $n_0 = 1$ представлен в табл. 4.12.

Таблица 4.12

Номер опыта		Факторы						Результат
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_1
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
	5	+1	+α	0	0	$α^2$	0	y_5
Звездные точки	6	+1	- α	0	0	$α^2$	0	y_6
	7	+1	0	+α	0	0	$α^2$	y_7
	8	+1	0	- α	0	0	$α^2$	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	y_9

Аналогичным образом составляются планы и для большего числа факторов.

В общем виде план, представленный в табл. 4.12, не ортогонален, так как

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} x_{ij}^2 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 x_{uj}^2 \neq 0, \quad i \neq u$$

.

Приведем его к ортогональному виду, для чего введем новые переменные (преобразования для квадратичных эффектов):

$$x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}{n} = x_{ij}^2 - \overline{x}_i^2.$$

При этом

$$\sum_{j=1}^{n} x_0 x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}^2 - \overline{x}_i^2\right) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - n\overline{x}_i^2 = 0.$$

Тогда уравнение регрессии будет записано как

$$\hat{y} = b'_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b'_{ii} x'_i.$$

Композиционные планы легко привести к ортогональным, выбирая звездное плечо α. В табл. 4.13 приведено значение α для различного числа факторов k и числа опытов в центре плана n_0.

Таблица 4.13

Число опытов в центре плана n_0	Звездное плечо α при различном числе факторов k			
	k=2	k=3	k=4	k=5*
1	1,000	1,215	1,414	1,546
2	1,077	1,285	1,471	1,606
3	1,148	1,353	1,546	1,664
4	1,214	1,414	1,606	1,718
5	1,267	1,471	1,664	1,772
6	1,320	1,525	1,718	1,819
7	1,369	1,575	1,772	1,868
8	1,414	1,623	1,819	1,913
9	1,454	1,668	1,868	1,957
10	1,498	1,711	1,913	2,000

Ортогональный план второго порядка для $k = 2$ и $n_0 = 1$ представлен в табл. 4.14, а его геометрическая интерпретация – на рис. 4.4, *а*.

Представленный на рис. 4.4, *а* и в табл. 4.14 прямоугольный (квадратный) план эксперимента для модели второго порядка работоспособен, хотя и несколько избыточен (9 опытов для определения 6 коэффициентов). Благодаря трем избыточным опытам он позволяет усреднить случайные погрешности и оценить их характер.

В этой таблице

$$x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}{9} = x_{ij}^2 - \frac{2}{3}.$$

Таблица 4.14

Ортогональный план второго порядка

Номер опыта		Факторы						Результат
		x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1'	x_2'	y_1
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	y_1
	2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	y_2
	3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	y_3
	4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	y_4
Звездные точки	5	+1	α = +1	0	0	+1/3	-2/3	y_5
	6	+1	α = -1	0	0	+1/3	-2/3	y_6
	7	+1	0	α = +1	0	-2/3	+1/3	y_7
	8	+1	0	α = -1	0	-2/3	+1/3	y_8
Центр плана	9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

В силу ортогональности матрицы планирования все коэффициенты уравнения регрессии b определяются независимо один от другого по формулам

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_j}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}'^2}; \quad b'_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} y_j}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}; \quad b_{iu} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} x_{uj}\right) y_j}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{ij} x_{iu}\right)^2},$$

где i – номер столбца в матрице планирования; j – номер строки; суммы в знаменателях различны для линейных, квадратичных эффектов и взаимодействий.

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии следующие:

$$S_{bi}^2 = S_{\text{восп}}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2; \; S_{bii}'^2 = S_{\text{восп}}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}'^2; \quad S_{biu}^2 = S_{\text{восп}}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} x_{uj}\right)^2.$$

Коэффициенты уравнения регрессии, получаемые с помощью ортогональных планов второго порядка, определяются с разной точностью, в то время как ортогональные планы первого порядка обеспечивают одинаковую точность коэффициентов, т.е. план, являющийся ортогональным и обеспечивающий независимость определения коэффициентов b, не является ротатабельным.

В результате расчетов по матрице с преобразованными столбцами для квадратичных эффектов получим уравнение регрессии в виде:

$$\hat{y} = b_0' + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' \left(x_i^2 - \bar{x}_i^2 \right).$$

Для преобразования к обычной форме записи следует перейти от коэффициента b_0' к коэффициенту b_0, используя выражение

$$b_0 = b_0' - \sum_{i=1}^{k} b_{ii}' \bar{x}_i^2 .$$

При этом дисперсия этого коэффициента рассчитывается по следующему соотношению:

$$S_{b0}^2 = S_{b'0}^2 + \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 \cdot S_{b'ii}^2 .$$

В дальнейшем, зная дисперсию воспроизводимости, проверяют значимость коэффициентов и адекватность уравнения:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,u=1}^{k} b_{iu} x_i x_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 .$$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента $t_i = |b_i| / S_{bi}$. Коэффициент значим, если $t_i > t_{\alpha,m}$, где m – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости.

Дисперсия воспроизводимости для параллельных опытов определяется в центре плана

$$S_{\text{воспр}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{m} (y_{0u} - \bar{y}_0)}{m-1}, \quad S_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} (y_j - y_j)^2}{n-l}.$$

Адекватность уравнения проверяется по критерию Фишера

$$F = S_{\text{ад}}^2 \Big/ S_{\text{восп}}^2 .$$

Уравнение адекватно, если составленное таким образом F – отношение меньше теоретического: $F < F_{\alpha;m_1;m_2}$, где $m_1 = n - l$ – число степеней свободы дисперсии адекватности; m_2 – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости; l – число коэффициентов в уравнении регрессии второго порядка, равное числу сочетаний k+2 по 2.

После статистического анализа модели, полученной для описания изучаемой функции отклика и записанной в кодированных обозначениях факторов необходимо перейти к натуральным обозначениям

$$x_1 = (X_1 - X_{10}) \,/\, \Delta X_1\,,\; x_i = (X_i - X_{i0}) \,/\, \Delta X_i,$$

где x_1 – кодированное значение фактора; X_1 – натуральное значение фактора; ΔX_1 – интервал варьирования первого фактора.

Порядок выполнения расчета

1. Записать содержание задания и таблицу исходных данных в соответствии с вариантом.

2. Выполнить работу по алгоритму для плана 3^k (рис. 4.5).

3. Проанализировать полученное уравнение на экстремум относительно X_1 и X_2, сделать вывод.

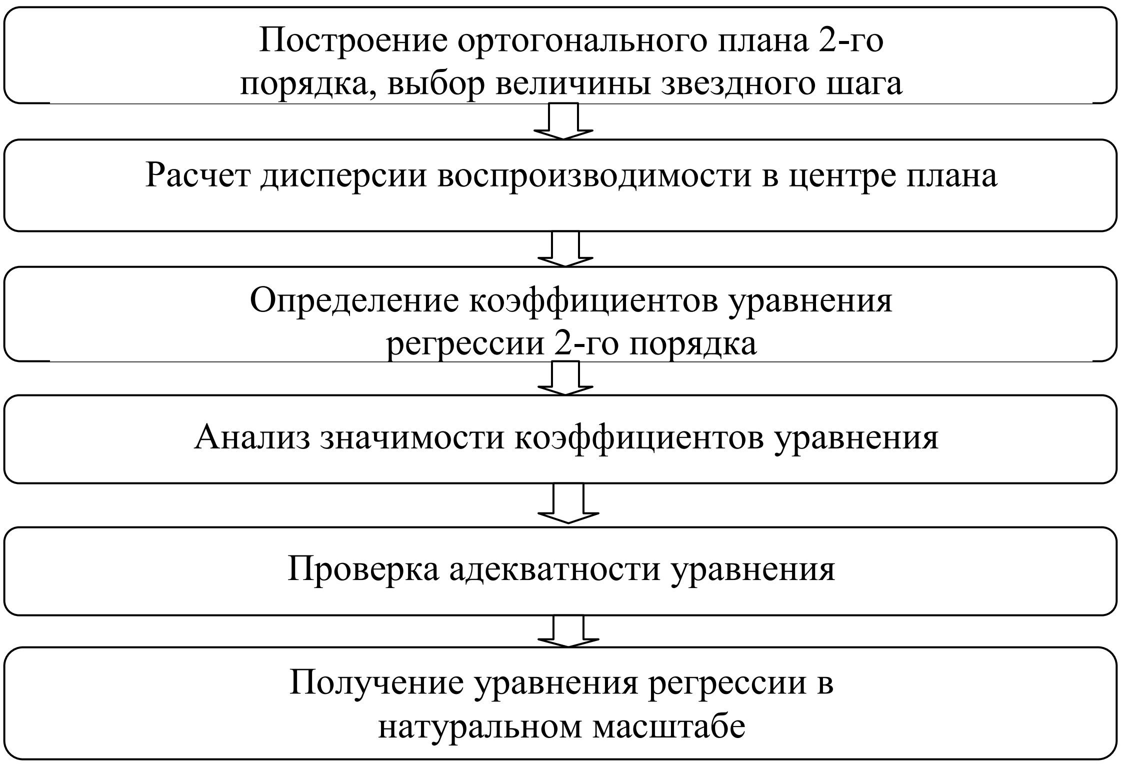


Рис. 4.5. Алгоритм метода

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятиям: композиционные планы, ядро плана.

2. Что такое звездные точки, звездное плечо?

3. Для каких целей используются звездные точки, звездное плечо.

4. Какова структура ортогональных планов?

5. В каких случаях применяют ортогональные планы второго порядка?

6. Каким критерием оценивают значимость коэффициентов уравнения регрессии?

7. Для чего проверяют адекватность полученной модели?

8. Почему планы 3^k имеют ограниченное применение?

9. Какое назначение критерия Фишера в статистическом анализе?

10. Как перейти от кодированных факторов к натуральным в уравнении регрессии?

ЗАДАНИЕ НА СРС

Задание. Определите зависимость степени разложения боратов y (%) смесью серной и фосфорной кислот от следующих факторов: z_1 – температура реакции (°С); z_2 – продолжительность реакции (мин.); z_3 – норма фосфорной кислоты (%); z_4 – концентрация фосфорной кислоты (% P_2O_5).

Исходные данные: основной уровень (z_j^0) и интервал варьирования ((Δz_j) приведены в табл. 4.15.

Таблица 4.15

Исходные данные

Уровень	z_1, °С	z_2, мин	z_3, %	z_4, %
z_j^0	55,5	37,5	82	34,8
Δz_j	25	21,5	18	18,0

Для получения уравнения регрессии построен ортогональный композиционный план 2-го порядка (табл. 4.16 – 4.20). В центре плана проведено три дополнительных опыта: y_{01} = 61,8 %, y_{02} = 60 %, y_{03} = 62,3 %.

Таблица 4.16

Варианты 1, 2

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	86,5
2	+1	-1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	40,5
3	+1	+1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	66,1
4	+1	-1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	34,2
5	+1	+1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	75,8
6	+1	-1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	54,7
7	+1	+1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	91,5
8	+1	-1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	47,1
9	+1	+1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	74
10	+1	-1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	53
11	+1	+1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	71,2
12	+1	-1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	30,1
13	+1	+1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	94,8
14	+1	-1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	49,7
15	+1	+1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	66
16	+1	-1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	52,3
17	+1	0	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	62,4
18	+1	1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	95,4
19	+1	-1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	40,7
20	+1	0	1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	79,3
21	+1	0	-1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	42,9
22	+1	0	0	1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	77,5
23	+1	0	0	-1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	58,2
24	+1	0	0	0	1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	41,2
25	+1	0	0	0	-1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	52,3

Таблица 4.17

Варианты 3,4

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	85,5
2	+1	-1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	41,5
3	+1	+1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	65,1
4	+1	-1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	33,2
5	+1	+1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	76,8
6	+1	-1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	57,7
7	+1	+1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	90,5
8	+1	-1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	49,0

Окончание табл. 4.17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	+1	+1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	74,5
10	+1	-1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	53,5
11	+1	+1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	73,1
12	+1	-1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	32,2
13	+1	+1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	95,8
14	+1	-1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	50,1
15	+1	+1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	66,5
16	+1	-1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	50,3
17	+1	0	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	61,7
18	+1	1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	96,5
19	+1	-1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	43,8
20	+1	0	1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	77,4
21	+1	0	-1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	40,1
22	+1	0	0	1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	76,1
23	+1	0	0	-1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	59,5
24	+1	0	0	0	1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	40,4
25	+1	0	0	0	-1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	54,3

Таблица 4.18

Варианты 5, 6

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	85,5
2	+1	-1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	44,5
3	+1	+1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	65,1
4	+1	-1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	31,2
5	+1	+1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	76,8
6	+1	-1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	59,7
7	+1	+1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	90,5
8	+1	-1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	50,0
9	+1	+1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	74,4
10	+1	-1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	53,3
11	+1	+1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	73,2
12	+1	-1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	33,2
13	+1	+1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	95,9
14	+1	-1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	51,2
15	+1	+1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	66,6
16	+1	-1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	49,3
17	+1	0	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	62,4
18	+1	1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	97,5
19	+1	-1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	44,8
20	+1	0	1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	78,4
21	+1	0	-1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	41,1
22	+1	0	0	1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	77,1
23	+1	0	0	-1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	58,5
24	+1	0	0	0	1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	40,5
25	+1	0	0	0	-1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	52,3

Таблица 4.19

Варианты 7, 8

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	83,5
2	+1	-1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	46,5
3	+1	+1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	64,1
4	+1	-1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	32,2
5	+1	+1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	77,8
6	+1	-1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	59,8
7	+1	+1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	90,4
8	+1	-1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	50,5
9	+1	+1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	74,4
10	+1	-1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	53,5
11	+1	+1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	73,1
12	+1	-1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	33,0
13	+1	+1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	93,9
14	+1	-1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	52,2
15	+1	+1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	65,6
16	+1	-1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	47,3
17	+1	0	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	61,7
18	+1	1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	95,5
19	+1	-1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	43,8
20	+1	0	1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	79,4
21	+1	0	-1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	42,1
22	+1	0	0	1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	77,2
23	+1	0	0	-1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	58,6
24	+1	0	0	0	1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	40,0
25	+1	0	0	0	-1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	52,2

Таблица 4.20

Варианты 9,10

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	86,4
2	+1	-1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	40,9
3	+1	+1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	65,1
4	+1	-1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	31,2
5	+1	+1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	-1	-1	+1	-1	74,8
6	+1	-1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	54,9
7	+1	+1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	90,5
8	+1	-1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	46,1
9	+1	+1	-1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	74,5
10	+1	-1	+1	+1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	53,2

Окончание табл. 4.20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
11	+1	+1	+1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	71,0
12	+1	-1	-1	-1	+1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	30,4
13	+1	+1	+1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	94,9
14	+1	-1	-1	+1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	+1	-1	+1	-1	+1	-1	48,7
15	+1	+1	-1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	-1	-1	+1	+1	+1	66,1
16	+1	-1	+1	-1	-1	0,2	0,2	0,2	0,2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	52,4
17	+1	0	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	61,4
18	+1	1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	-0,8	0	0	0	0	0	0	93,4
19	+1	-1,414	0	0	0	1,2	-0,8	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	40,9
20	+1	0	1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	79,2
21	+1	0	-1,414	0	0	-0,8	1,2	-0,8	0,2	0	0	0	0	0	0	42,3
22	+1	0	0	1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	78,5
23	+1	0	0	-1,414	0	-0,8	-0,8	1,2	0,2	0	0	0	0	0	0	58,1
24	+1	0	0	0	1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	41,0
25	+1	0	0	0	-1,414	-0,8	-0,8	-0,8	1,2	0	0	0	0	0	0	52,0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование научно обоснованных методов планирования, постановки и проведения эксперимента в сочетании с современными методами информационных технологий, в том числе вычислительного эксперимента, способствуют повышению эффективности научных исследований.

Учебное пособие состоит из четырех глав, в которых последовательно излагается материал, составляющий основу современных представлений о теории и практике эффективной организации научного эксперимента.

Изложенный материал сопровождается многочисленными примерами, демонстрирующими возможности применения математической теории эксперимента для решения различных прикладных задач.

По каждой теме приводится комплект заданий для самостоятельной работы. Особое внимание уделяется необходимости анализа и обсуждения полученных результатов.

Для проверки результатов усвоения дисциплины и сформированности планируемых компетенций в каждом модуле приводятся контрольные вопросы.

Модульная структура построения учебного пособия позволяет использовать его как для теоретической подготовки, так и для проведения лабораторных и практических занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Таблица исходных данных

№ предприятия	Y_1	Y_2	Y_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1	9,26	204,2	13,26	0,23	0,78	0,40	1,37	1,23	0,23	1,45
2	9,38	209,6	10,16	0,24	0,75	0,26	1,49	1,04	0,39	1,30
3	12,11	222,6	13,72	0,19	0,68	0,40	1,44	1,80	0,43	1,37
4	10,81	236,7	12,85	0,17	0,70	0,50	1,42	0,43	0,18	1,65
5	9,35	62,0	10,63	0,23	0,62	0,40	1,35	0,88	0,15	1,91
6	9,87	53,1	9,12	0,43	0,76	0,19	1,39	0,57	0,34	1,68
7	8,17	172,1	25,83	0,31	0,73	0,25	1,16	1,72	0,38	1,94
8	9,12	56,5	23,39	0,26	0,71	0,44	1,27	1,70	0,09	1,89
9	5,88	52,6	14,68	0,49	0,69	0,17	1,16	0,84	0,14	1,94
10	6,30	46,6	10,05	0,36	0,73	0,39	1,25	0,60	0,21	2,06
11	6,22	53,2	13,99	0,37	0,68	0,33	1,13	0,82	0,42	1,96
12	5,49	30,1	9,68	0,43	0,74	0,25	1,10	0,84	0,05	1,02
13	6,50	146,4	10,03	0,35	0,66	0,32	1,15	0,67	0,29	1,85
14	6,61	18,1	9,13	0,38	0,72	0,02	1,23	1,04	0,48	0,88
15	4,32	13,6	5,37	0,42	0,68	0,06	1,39	0,66	0,41	0,62
16	7,37	89,8	9,86	0,30	0,77	0,15	1,38	0,86	0,62	1,09
17	7,02	62,5	12,62	0,32	0,78	0,08	1,35	0,79	0,56	1,60
18	8,25	46,3	5,02	0,25	0,78	0,20	1,42	0,34	1,76	1,53
19	8,15	103,5	21,18	0,31	0,81	0,20	1,37	1,60	1,31	1,40
20	8,72	73,3	25,17	0,26	0,79	0,30	1,41	1,46	0,45	2,22
21	6,64	76,6	19,40	0,37	0,77	0,24	1,35	1,27	0,50	1,32
22	8,10	73,01	21,0	0,29	0,78	0,10	1,48	1,58	0,77	1,48
23	5,52	32,3	6,57	0,34	0,72	0,11	1,24	0,68	1,20	0,68
24	9,37	199,6	14,19	0,23	0,79	0,47	1,40	0,86	0,21	2,30
25	13,17	598,1	15,81	0,17	0,77	0,53	1,45	1,98	0,25	1,37
26	6,67	71,2	5,23	0,29	0,80	0,34	1,40	0,33	0,15	1,51
27	5,68	90,8	7,99	0,41	0,71	0,20	1,28	0,45	0,66	1,43
28	5,22	82,1	17,50	0,41	0,79	0,24	1,33	0,74	0,74	1,82
29	10,02	76,2	17,16	0,22	0,76	0,54	1,22	0,03	0,32	2,62
30	8,16	119,5	14,54	0,29	0,78	0,40	1,28	0,99	0,89	1,75

Продолжение табл. П.1

№ предприятия	Y_1	Y_2	Y_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
31	3,78	21,9	6,24	0,51	0,62	0,20	1,47	0,24	0,23	1,54
32	6,48	48,4	12,68	0,36	0,75	0,64	1,27	0,57	0,32	2,25
33	10,44	173,5	19,49	0,23	0,71	0,42	1,51	1,22	0,54	1,07
34	7,65	74,1	9,28	0,26	0,74	0,27	1,46	0,68	0,75	1,44
35	8,77	68,6	11,42	0,27	0,65	0,37	1,27	1,0	0,16	1,40
36	7,00	60,8	10,31	0,29	0,66	0,38	1,43	0,81	0,24	1,31
37	11,06	355,6	8,65	0,01	0,84	0,35	1,50	1,27	0,59	1,12
38	9,02	264,8	10,94	0,02	0,74	0,42	1,35	1,14	0,56	1,16
39	13,28	526,6	9,87	0,18	0,75	0,32	1,41	1,89	0,63	0,88
40	9,27	118,6	6,14	0,25	0,75	0,33	1,47	0,67	1,10	1,07
41	6,70	37,1	12,93	0,31	0,79	0,29	1,35	0,96	0,39	1,24
42	6,69	57,7	9,78	0,38	0,72	0,30	1,40	0,67	0,73	1,49
43	9,42	51,6	13,22	0,24	0,70	0,56	1,2Ь	0,98	0,28	2,03
44	7,24	64,7	17,29	0,31	0,66	0,42	1,15	1,16	0,10	1,84
45	5,39	48,3	7,11	0,42	0,69	0,26	1,09	0,54	0,68	1,22
46	5,61	15,0	22,49	0,51	0,71	0,16	1,26	1,23	0,87	1,72
47	5,59	87,5	12,14	0,31	0,73	0,45	1,36	0,78	0,49	1,75
48	6,57	108,4	15,25	0,37	0,65	0.31	1,15	1,16	0,16	1,46
49	6,54	267,3	31,34	0,16	0,82	0,08	1,87	4,44	0,85	1,60
50	4,23	34,2	11,56	0,18	0,80	0,68	1,17	1,06	0,13	1,47

Продолжение табл. П.1

№ предприятия	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
1	26006	167,69	47750	6,40	17,72
2	23935	186,10	50391	7,80	18,39
3	22589	220,45	43149	9,76	26,46
4	21220	169,30	41089	7,90	22,37
5	7394	39,53	14257	5,35	28,13
6	11586	40,41	22661	9,90	17,55
7	26609	102,96	52509	4,50	21,92

Продолжение табл. П.1

№ предприятия	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
8	7801	37,02	14903	4,88	19,52
9	11587	45,74	25587	3,46	23,99
10	9475	40,07	1661	3,60	21,76
11	10811	45,44	19459	3 56	25,68
12	6371	41,08	12973	5,65	18,13
13	26761	136,14	50907	4,28	25,74
14	4210	42,39	6920	8,85	21,21
15	3557	37,39	5736	8,52	22,97
16	14148	101,78	26705	7,19	16,38
17	9872	47,55	20068	4,82	13,21
18	5975	32,61	11487	5,46	14,48
19	16662	103,25	32029	6,20	13,38
20	9166	38,95	18946	4,25	13,69
21	15118	81,32	28025	5,38	16,66
22	11429	67,26	20968	5,88	15,06
23	6462	59,92	11049	9,27	20,09
24	24628	107,34	45893	4,36	15,98
25	49727	512 60	99400	10,31	18,27
26	11470	53,8,1	20719	4,69	14,42
27	19448	80,83	36813	4,16	22,76
28	18963	59,42	33956	3,13	15,41
29	9185	36,96	17016	4,02	19,35
30	17478	91,43	34873	5,23	16,83
31	6265	17,16	11237	2,74	30,53
32	8810	27,29	17306	3,10	17,98
33	17659	184,33	39250	10,44	22,09
34	10342	58,42	19074	5,65	18,29
35	8901	59,40	18452	6,67	26,05
36	8402	49,63	17500	5,91	26,20
37	32625	391,27	7888	11,99	17,26

Продолжение табл. П.1

№ предприятия	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
38	31160	258,62	58947	8,30	18,83
39	46461	75,66	94697	1,63	19,70
40	13833	123,68	29626	8,94	16,87
41	6391	37,21	11688	5,82	14,63
42	11115	53,37	21955	4,80	22,17
43	6555	32,87	12243	5,01	22,62
44	11085	45,63	20193	4,12	26,44
45	9484	48,41	20122	5,10	22,26
46	3967	13,58	7612	3,49	19.13
47	15283	63,99	27404	4,19	18,28
48	20874	104,55	39648	5,01	28,23
49	19418	222,11	43799	11,44	12,39
50	3351	25,76	6235	7,67	11,64

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов И.Н. Основы научных исследований: учеб. пособие / И.Н. Кузнецов. – М.: Дашков и К, 2014. – 284 с.

2. Семенов Б.А. Инженерный эксперимент в промышленной теплотехнике, теплоэнергетике и теплотехнологиях [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / А.Б. Семенов. – 2-е изд., доп. – СПб.: Лань, 2013. – 400 с. – Режим доступа: www. lanbook. ru.

3. Рыжков И.Б. Основы научных исследований и изобретательства [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / И.Б. Рыжков. –2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 224 с. – Режим доступа: www. lanbook. ru.

4. Тихонов В.А. Основы научных исследований: теория и практика: учеб. пособие для вузов / В.А. Тихонов. – М.: Гелиос АРВ, 2006.– 352 с.

5. Боровиков В.П. Популярное введение в современный анализ данных в системе *Statistica* / В.П. Боровиков. – М.: Финансы и статистика, 2012. –427 с.

6. Халафян А.А. Математическая статистика с элементами теории вероятностей: учебник для вузов / А.А. Халафян.– М.: Бином, 2010. – 356 с.

7. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 551 с.

8. Кулаичев А.П. Методы и средства комплексного анализа данных: учеб. пособие для вузов / А.П. Кулаичев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Инфра, 2006. – 512 с.

9. Галеев Э.Р. Моделирование систем: метод. указания / Э.Р. Галеев, В.В. Елизаров, В.И. Елизаров. – Нижнекамск: филиал КГТУ, 2009. – 89 с.

10. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций: учеб. пособие для вузов / Э.А. Вуколов. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 464 с.

11. Семенов С.А. Планирование эксперимента в химии и химической технологии: учеб.-метод. пособие / С.А. Семенов. – М.: ИПЦ МТТХТ, 2005. – 126 с.

12. Будникова И.К. Моделирование распределений случайных величин в пакете Statistica: учеб.-метод. пособие для практ. занятий / И.К. Будникова. – Казань: КГЭУ, 2010. – 31 с.

13. Будникова И.К. Статистические методы прогнозирования: учеб.-метод. пособие для практ. занятий / И.К. Будникова. – Казань: КГЭУ, 2011. – 99 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Будникова Иветта Константиновна

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА НАУЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Кафедра инженерной кибернетики КГЭУ

Редактор издательского отдела: *К.В. Аршинова*
Компьютерная верстка: *К.В. Аршинова*
Дизайн обложки: *Ю.Ф. Мухаметшина*

Подписано в печать 14.11.14.
Формат 60×84/16. Бумага «Business».
Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 8,39. Тираж 500 экз. Заказ № 4839.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ, 420066,
Казань, Красносельская, 51

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК