

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Н. КОНСТАНТИНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РЕЖИМОВ РАБОТЫ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие
по дисциплине
«Математическое моделирование в электроэнергетике»

Казань 2014

УДК 621.31:519.85

ББК 31.2:22.18

М34

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент
Казанского федерального университета *А.С. Храмов*;
кандидат физико-математических наук, доцент Казанского
государственного энергетического университета *И.К. Будникова*

Константинов В.Н.

М34 Математическое моделирование режимов работы
электроэнергетических систем: учебное пособие /
В.Н. Константинов. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2014. – 148 с.

Изложены основные математические методы, применяемые при решении
электроэнергетических задач. Описаны алгоритмы и математические модели
для расчета установившихся и переходных режимов электрических систем.
Рассмотрены примеры решения задач на ЭВМ.

Предназначено для студентов всех форм обучения по профилю
«Электрические станции» направления подготовки 140400 «Электро-
энергетика и электротехника».

УДК 621.31:519.85

ББК 31.2:22.18

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные задачи расчетов режимов электрических систем сводятся, главным образом, к определению параметров режима, нахождению их взаимных функциональных связей и связей с параметрами системы. Современные электрические системы, как правило, являются сложными по своим энергетическим и топологическим структурам. К сложности обычно приводит стремление обеспечить высокую надежность электроснабжения потребителей при одновременном выполнении требований оптимизации, то есть снижения приведенных затрат.

Анализ рабочих режимов сложных электрических систем связан с существенными трудностями, поскольку очень сложными получаются схемы замещения электрических сетей. Поэтому приходится ориентироваться на применение современной вычислительной техники в виде АВМ, ЭВМ и специальных автоматизированных расчетных моделей. Для этого требуется иметь формализованный подход к составлению схем замещения и уравнений состояния электрических систем, который был бы одинаков для схем любой сложности и конфигурации. Такой подход может быть создан с помощью методов теории графов и матричной алгебры, что позволит разрабатывать алгоритмы и программы расчетов параметров режима для любых схем.

Основу учебного пособия составил курс лекций «Математические задачи электроэнергетики», прочитанный автором студентам Института электроэнергетики Казанского государственного энергетического университета. Хотя имеется достаточное число книг по применению методов прикладной математики к задачам электроэнергетики (см., например, [1] – [8]), опыт преподавания этой дисциплины показал, что студенты с трудом осваивают обширный материал, разбросанный по разным пособиям и в некоторых аспектах имеющий незаконченный вид. Поэтому автор предпринял попытку дать по возможности простое и компактное введение в предмет, не претендуя на полное и исчерпывающее изложение вопроса.

ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

1.1 Режимы и параметры электрической системы

Электрическая система – это электрическая часть энергетической системы, то есть совокупность элементов, вырабатывающих, преобразующих, передающих, распределяющих и потребляющих электрическую энергию.

Электрическая система включает в себя силовые элементы (генераторы, трансформаторы, преобразователи, нагрузки), электрические сети и элементы управления, изменяющие и регулирующие состояние системы или режим системы.

Режим системы – это ее состояние в любой момент времени. Режим системы определяется параметрами режима.

Параметры режима – это показатели, зависящие от изменения режима системы. К ним относятся напряжения в различных точках системы, токи в ее элементах, ЭДС, активные и реактивные мощности и т.д.

Различают три основных вида режимов электрических систем:

1) нормальный установившийся режим – это режим, применительно к которому проектируется электрическая система;

2) послеаварийный установившийся режим – это режим, наступающий после аварийного отключения какого-либо элемента. В этом режиме система может работать с несколько ухудшенными (по сравнению с нормальным режимом) характеристиками;

3) переходный режим – это режим, во время которого система переходит от одного состояния к другому.

Нормальный и послеаварийный установившиеся режимы характеризуются параметрами, не изменяющимися во времени. Связи между параметрами в этих режимах представляются алгебраическими уравнениями. Для переходного режима характерно изменение всех его параметров во времени. Переходный режим описывается дифференциальными уравнениями.

Параметры режима электрической системы связаны между собой соотношениями, в которые входят коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств элементов системы и от способов соединения их между собой. Эти коэффициенты называются параметрами системы. К ним относятся полные, активные и реактивные сопротивления, собственные и взаимные проводимости элементов, коэффициенты трансформации, коэффициенты усиления, постоянные времени обмоток машин и аппаратов, постоянные инерции двигателей и генераторов.

Параметры системы могут зависеть от изменений ее режима. В этом случае система называется нелинейной. Все реальные электрические системы в той или иной степени нелинейные. Во многих задачах в целях упрощения расчетов параметры системы полагают приближенно постоянными, считая систему на каком-либо исследуемом участке линейной. Эта процедура называется линеаризацией. Но в энергосистеме присутствует всегда и другой вид нелинейности – это нелинейность, обусловленная характером соотношений между параметрами ее режима. Например, на участке цепи с сопротивлением R мощность связана квадратичной зависимостью с напряжением:

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (1.1)$$

От нелинейностей этого вида нельзя избавиться, поэтому их необходимо всегда учитывать.

1.2. Схема замещения электрической системы

Схема замещения электрической системы представляет собой совокупность схем замещения отдельных элементов системы, соединенных между собой в той же последовательности, что и в реальной схеме.

Исследование электрической системы начинается с составления ее схемы замещения. При этом сначала вводятся допущения, принимаемые в соответствии с поставленной задачей. Например, в случае электрических сетей можно не учитывать следующие нелинейные явления в элементах системы:

- 1) насыщение магнитных цепей трансформаторов;
- 2) случайное «переменное сопротивление» грозовых разрядников;
- 3) эффект «короны» на линиях электропередачи сверхвысокого напряжения (то есть ионизацию воздуха и свечение);
- 4) диэлектрические потери в изоляционных материалах статических конденсаторов.

Эти допущения дают возможность считать сеть линейной и применять в расчетах метод наложения.

Метод наложения (или принцип суперпозиции) заключается в том, что результат нескольких одновременных воздействий на линейную

систему можно представить в виде суммы результатов отдельных воздействий, рассматриваемых независимо одно от другого.

При исследовании сетей низкого и среднего напряжений можно пренебречь также поперечными проводимостями (то есть проводимостями линий электропередачи на землю, потери в стали трансформаторов и так далее). Но в схемах замещения дальних передач высокого и сверхвысокого напряжения поперечные проводимости следует учитывать.

В итоге схему замещения электрической сети можно представить в виде пассивной цепи, состоящей из сопротивлений ветвей, соединенных в цепи и контуры. В узлах цепи подключены генераторы или нагрузки.

После того, как схема замещения подобрана, расчет состояния электрической системы (то есть ее режима) сводится к обычному, известному из курса «Теоретические основы электротехники», расчету электрической цепи.

Основные трудности при исследовании сложных электрических цепей заключаются в необходимости, во-первых, учета нелинейности или, если это возможно, избавления от ее учета, а во-вторых, составления и решения большого количества уравнений состояния сложной по конфигурации сети.

1.3. Электрическая система трехфазного переменного тока

Основными источниками электрической энергии являются трехфазные синхронные генераторы, приводимые в движение паровыми или гидравлическими турбинами. Для электрической системы трехфазная цепь оказалась более подходящей с точки зрения экономной передачи электроэнергии. Во-первых, такая цепь требует меньше проводов, а во-вторых, основная масса электрических двигателей – трехфазные, более экономичные и надежные. Поэтому существующие электрические сети в основном – трехфазные переменного тока. Потребители электроэнергии могут включаться между фазами на линейное напряжение, а также между нейтралью и каждой из фаз. На практике добиваются равномерной загрузки фаз. В нормальной эксплуатации трехфазную электрическую сеть можно считать симметричной.

Рассмотрим участок простейшей трехфазной цепи (рис. 1.1) и запишем уравнения равновесия фазных напряжений для мгновенных значений:

$$\begin{cases} U_a = i_a \cdot R_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + M_{ab} \cdot \frac{di_b}{dt} + M_{ac} \cdot \frac{di_c}{dt} \\ U_b = i_b \cdot R_b + M_{ba} \cdot \frac{di_a}{dt} + L_b \cdot \frac{di_b}{dt} + M_{bc} \cdot \frac{di_c}{dt} \\ U_c = i_c \cdot R_c + M_{ca} \cdot \frac{di_a}{dt} + M_{cb} \cdot \frac{di_b}{dt} + L_c \cdot \frac{di_c}{dt} \end{cases} \quad (1.2)$$

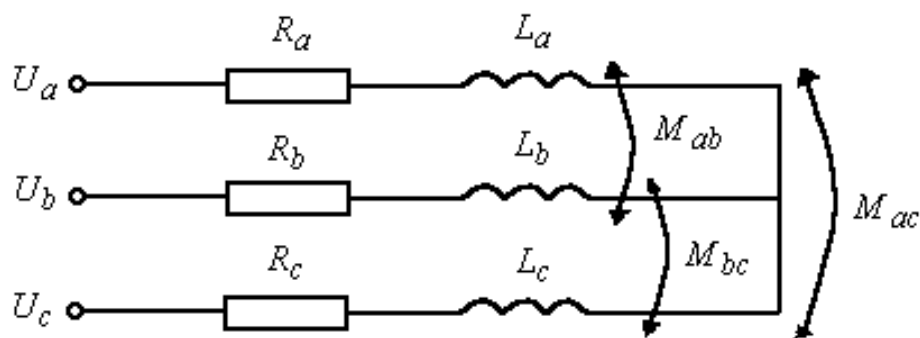


Рис. 1.1. Простейшая трехфазная цепь: U – фазное напряжение; R – активное сопротивление фазы; L – собственная индуктивность фазы; M – коэффициент взаимной индуктивности фаз; a, b, c – индексы фаз

При условии симметричности фаз:

$$\begin{aligned} R_a &= R_b = R_c = R; \\ L_a &= L_b = L_c = L; \\ M_{ab} &= M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{bc} = M_{cb} = M \end{aligned}$$

и сумма фазных токов равна нулю:

$$i_a + i_b + i_c = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} U_a = i_a \cdot R + (L - M) \cdot \frac{di_a}{dt} \\ U_b = i_b \cdot R + (L - M) \cdot \frac{di_b}{dt} \\ U_c = i_c \cdot R + (L - M) \cdot \frac{di_c}{dt} \end{cases} \quad (1.3)$$

Очевидно, что для дальнейшего анализа достаточно оставить только одно из уравнений системы (1.3), например, для фазы a , поскольку в него не входят параметры других фаз, а схему замещения на рис. 1.1 представить в виде однолинейной схемы замещения (рис. 1.2).

$$U = i \cdot R + (L - M) \cdot \frac{di}{dt}. \quad (1.4)$$

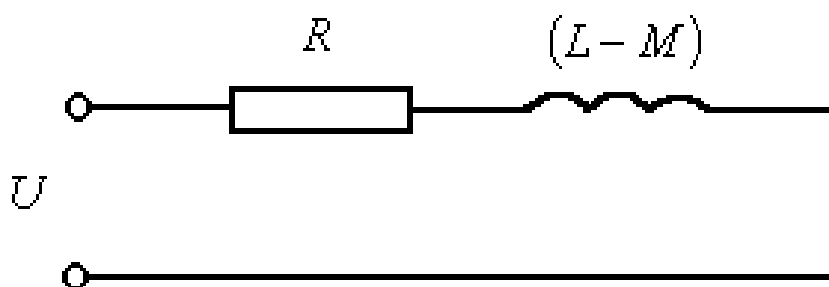


Рис. 1.2. Однолинейная схема замещения трехфазной электрической цепи

Можно показать, что для описания процессов в любой линейной электрической цепи, содержащей активные, индуктивные и емкостные сопротивления, а также внешние ЭДС, получается система уравнений, в которую входят линейные дифференциальные уравнения не выше второго порядка. Эту систему с помощью замены переменных можно заменить одним дифференциальным уравнением более высокого порядка для тока в любой ветви схемы. При этом внешние ЭДС можно вынести отдельно в правую часть этого уравнения:

$$A_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + A_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \cdot \frac{di}{dt} + A_0 \cdot i = f(t). \quad (1.5)$$

Здесь $f(t)$ – функция внешних ЭДС, а A_i – постоянные коэффициенты. Такое уравнение можно составить для любой линейной электрической цепи.

Если в уравнении (1.5) нет правой части, то есть $f(t) = 0$, то оно называется однородным и это означает, что в цепи отсутствуют источники ЭДС и она не получает энергии извне. Ясно, что в такой цепи процессы не могут развиваться или оставаться неизменными, а должны затухать, так как энергия будет расходоваться на необратимые потери в активных сопротивлениях (нагревание, излучение и так далее), то есть решение i_0

однородного уравнения для электрической цепи при $R \neq 0$ должно стремиться по времени к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_0 = 0. \quad (1.6)$$

Известно, что общее решение линейного дифференциального уравнения с правой частью (то есть неоднородного) содержит его частное решение i_1 и решение i_0 уравнения без правой части:

$$i = i_0 + i_1. \quad (1.7)$$

Следовательно, общее решение состоит из двух частей, одна из которых (i_0) описывает процессы в изолированной системе без внешнего воздействия и определяется начальными условиями задачи, а другая (i_1) описывает процессы в системе, находящейся под внешним воздействием, но по истечении достаточного времени. При этом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i = i_1. \quad (1.8)$$

Здесь i_0 называется решением для свободных токов, а i_1 – решением для вынужденных токов, поддерживаемых внешней ЭДС.

Таким образом, если рассматривается установившийся режим, то вполне достаточно найти одно частное решение уравнения (1.5), считая при этом, что внешнее воздействие существовало достаточно продолжительное время. Переходные же процессы описываются решением, содержащим начальные условия, то есть общим решением i .

Для расчетов установившегося режима можно добиться дальнейшего упрощения, применив комплексный или символический метод, разработанный американским электротехником Штейнметцем. С помощью этого метода от дифференциальных уравнений можно перейти к комплексным алгебраическим уравнениям. Например, комплексная форма записи уравнения (1.4) имеет вид:

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot Z, \quad (1.9)$$

где

$$Z = R + j \cdot \omega \cdot (L - M). \quad (1.10)$$

Здесь \dot{U} – вектор фазного напряжения в комплексной плоскости, \dot{I} – вектор тока, Z – комплексное сопротивление, а ω – круговая частота переменного тока.

Алгебраические уравнения типа (1.9), определяющие рабочий режим схемы замещения, называются уравнениями состояния. В расчетах

режимов электрической сети стремятся рассматривать линеаризованные уравнения состояния. Но поскольку нагрузка в основном нелинейная, в расчетах потокораспределения приходится прибегать к методам решения нелинейных уравнений. В расчетах же токов короткого замыкания в начальный момент возмущения нагрузочными ветвями пренебрегают и схему замещения можно считать линейной.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрической системе.
2. Какие элементы включает в себя электрическая система?
3. Что такое режим электрической системы?
4. Какие параметры режима Вы знаете?
5. Какие существуют виды режимов электрических систем?
6. Что такое параметры системы?
7. Какая электрическая система называется линейной?
8. Какая процедура называется линеаризацией?
9. Дайте определение схемы замещения электрической системы.
10. Какие допущения принимают при составлении схемы замещения электрической сети?
11. В чем состоит метод наложения или принцип суперпозиции?
12. Каковы основные трудности при исследовании сложных электрических систем?
13. В чем состоят особенности электрической системы трехфазного переменного тока?
14. Нарисуйте участок простейшей трехфазной электрической цепи и напишите уравнения равновесия фазных напряжений для этой цепи.
15. Какое упрощение возникает при условии симметричности фаз в простейшей трехфазной цепи?
16. Какими дифференциальными уравнениями можно описать электрическую систему?
17. Что называется решением для свободных токов дифференциального уравнения электрической цепи?
18. Что называется решением для вынужденных токов дифференциального уравнения электрической цепи?
19. Какое решение дифференциального уравнения электрической цепи используется для описания установившегося режима?
20. В чем состоит комплексный или символический метод Штейнметца?
21. Какие уравнения называются уравнениями состояния электрической схемы замещения?

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Электроэнергетическая система и ее схема замещения

Рассмотрим электрическую систему (рис. 2.1), содержащую две электростанции (ЭС1, ЭС2) и три понизительные подстанции (А, В, С), связанные между собой шестью линиями электропередачи одного номинального напряжения (Л1 – Л6). Суммарная нагрузка потребителей, питающихся от шин низшего напряжения каждой из подстанций, условно обозначена стрелками.

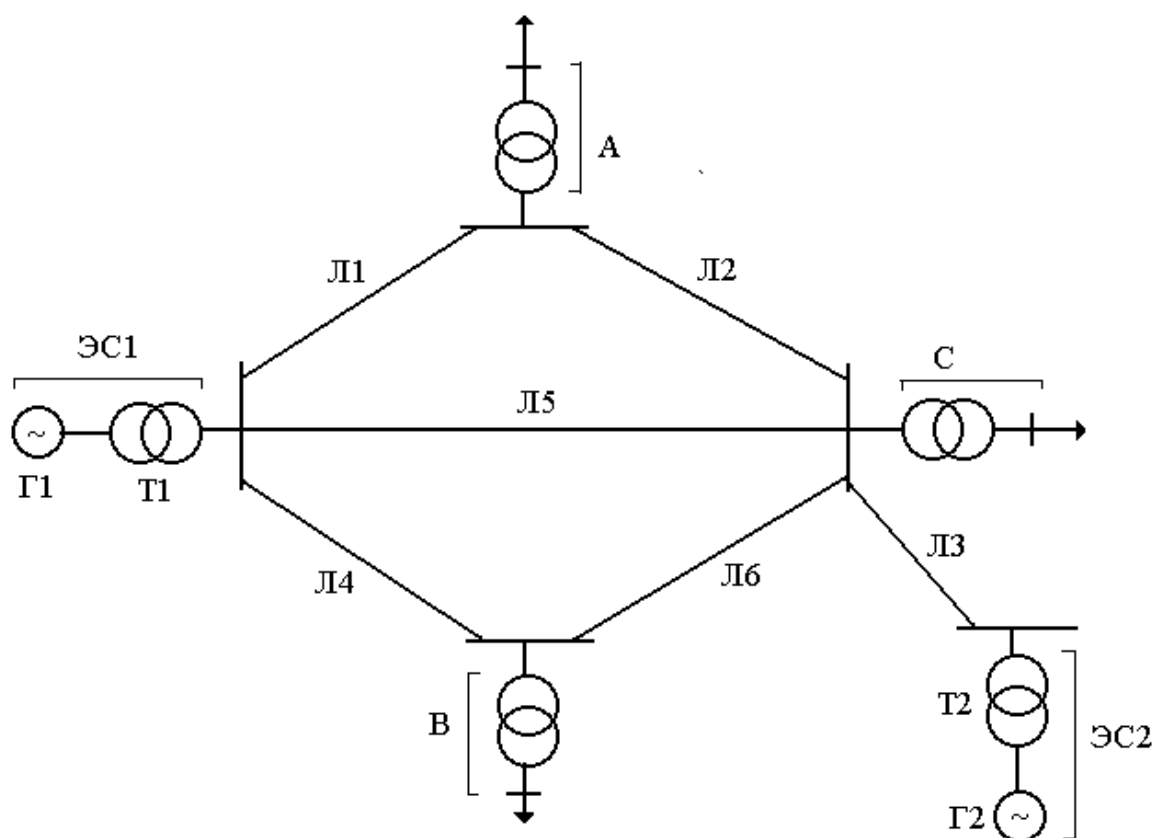


Рис. 2.1. Схема электроэнергетической системы

При рассмотрении симметричных установившихся режимов системы трехфазного переменного тока все величины, характеризующие схемы замещения ее элементов, определяются комплексными числами. При этом схема замещения составляется на одну фазу с нейтралью. Отдельные элементы электрической системы представляются схемами замещения, состоящими из элементов электрической цепи: источников напряжения или тока и сопротивлений.

Источники электроэнергии могут быть представлены или в виде источника напряжения с ЭДС \dot{E} и внутренним сопротивлением Z (рис. 2.2, а) или в виде источника тока \dot{J} , значение которого равно току установившегося режима \dot{I} (рис. 2.2, б), причем последний обычно отображают просто задающим током \dot{J} (рис. 2.2, в).

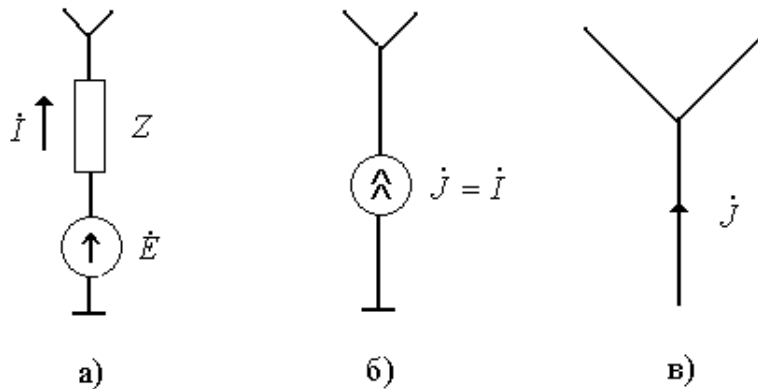


Рис. 2.2. Схемы замещения источников электроэнергии

Нагрузки (то есть потребители электроэнергии) имеют схему замещения либо в виде сопротивления Z (рис. 2.3, а), либо в виде источника тока \dot{J} , равному взятому с обратным знаком току нагрузки \dot{I} (рис. 2.3, б), либо в виде задающего тока \dot{J} (рис. 2.3, в).

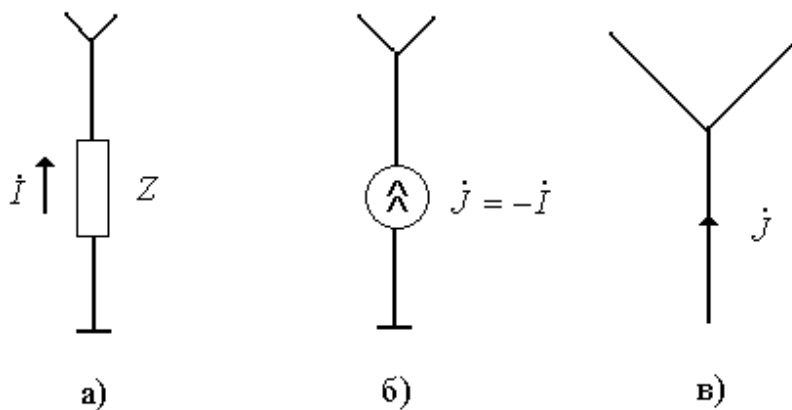


Рис. 2.3. Схемы замещения потребителей электроэнергии

Линии электропередачи, трансформаторы подстанций и электростанций представляются в схеме замещения системы в виде сопротивлений, причем схемы замещения трансформаторов могут быть объединены со схемами замещения соответствующих источников питания и нагрузок.

Для электроэнергетической системы, показанной на рис. 2.1, можно составить два варианта схемы замещения. В первом варианте (рис. 2.4) электростанции представлены источниками напряжения, а подстанции (трансформаторы и нагрузки) – сопротивлениями. Во втором варианте схемы замещения (рис. 2.5) как электростанции, так и подстанции представлены задающими токами. Выбор того или иного варианта схемы замещения определяется целями расчета и исходными данными.

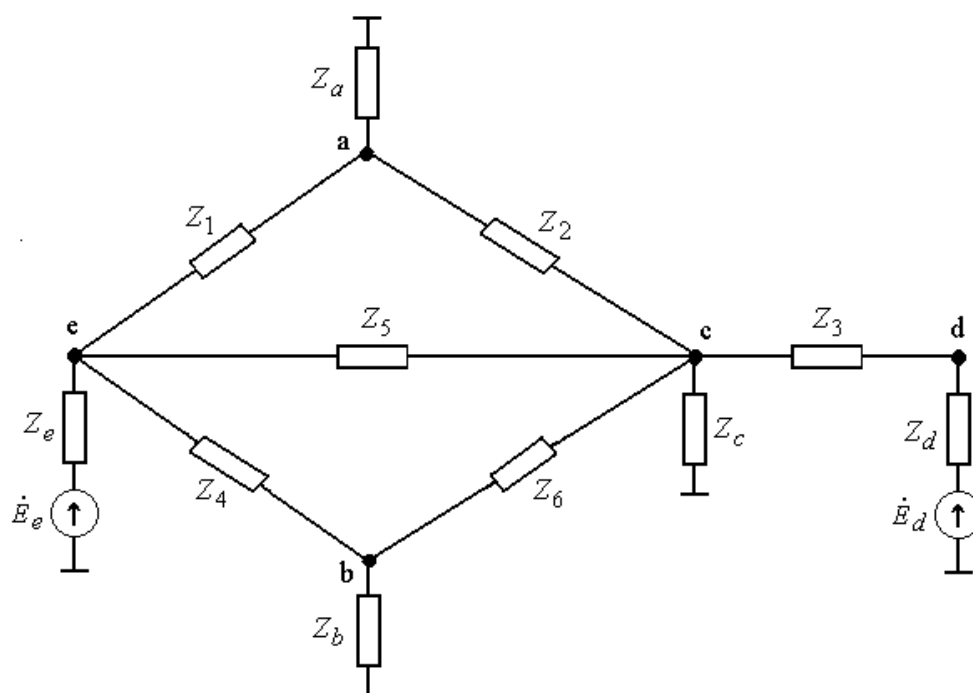


Рис. 2.4. Первый вариант схемы замещения электроэнергетической системы

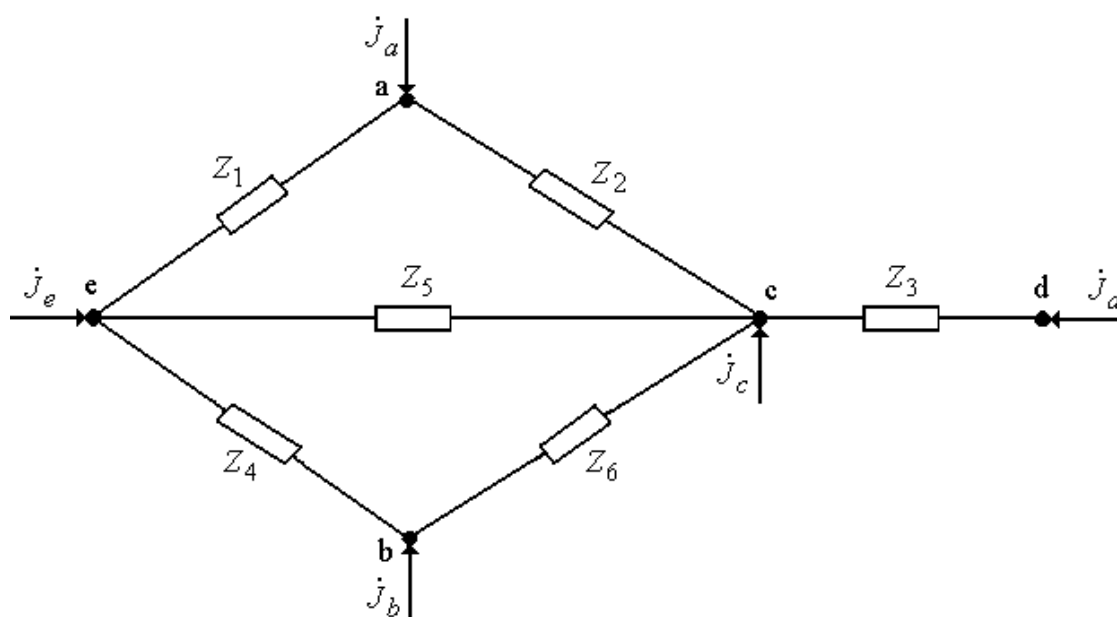


Рис. 2.5. Второй вариант схемы замещения электроэнергетической системы

Таким образом, схема замещения электрической системы, используемая для расчетов установившихся режимов, представляет собой электрическую цепь, к которой применимы такие понятия, как ветвь, узел и контур.

Ветвью называется участок цепи, который состоит из последовательно соединенных ЭДС и сопротивления (или только сопротивления) и вдоль которого в любой заданный момент времени ток имеет одно и то же значение.

Узел определяется как точка соединения двух и более ветвей.

Контур – это участок цепи, образованный таким последовательным соединением нескольких ветвей, при котором начало первой ветви контура соединено с концом последней в одном узле. Схема замещения, содержащая контуры, называется замкнутой; при отсутствии контуров схема замещения называется разомкнутой.

Схема замещения на рис. 2.4 содержит 11 ветвей и 6 узлов: a, b, c, d, e и узел нейтрали (земли), имеющей нулевой потенциал. Ветви, соединенные с узлом нейтрали (то есть ветви источников питания и нагрузок), называются поперечными (их всего 5), а остальные ветви называются продольными.

Схема замещения на рис. 2.5, в которой источники питания и нагрузки представлены задающими токами, содержит только 6 продольных ветвей и 5 узлов, так как узел нейтрали в ней отсутствует. Обе схемы содержат контуры и поэтому являются замкнутыми.

2.2. Уравнения состояния электрической цепи

Сопротивления, входящие в схему замещения электрической системы, при расчетах ее установившихся режимов обычно принимают постоянными, то есть не зависящими от значений токов и напряжений. При этом схема замещения системы представляет собой линейную электрическую цепь. Поэтому математическим описанием установившегося режима электрической системы являются уравнения состояния линейной электрической цепи.

Состояние линейной электрической цепи описывается уравнениями законов Ома и Кирхгофа. Закон Ома определяет взаимосвязь параметров каждой из ветвей цепи.

Для i -ой ветви, характеризующейся сопротивлением Z_i , действующей в ней ЭДС \dot{E}_i и протекающим по ней током \dot{I}_i (рис. 2.6), разность потенциалов между ее концами (то есть падение напряжения на ветви) определяется уравнением:

$$\dot{U}_i = Z_i \cdot \dot{I}_i - \dot{E}_i. \quad (2.1)$$

Отметим, что, строго говоря, в случае переменного тока закон Ома для мгновенных значений тока, напряжения и ЭДС неприменим. Однако его можно применять для амплитудных значений, не зависящих от времени, каковыми и являются величины \dot{U}_i , \dot{I}_i и \dot{E}_i в выражении (2.1).

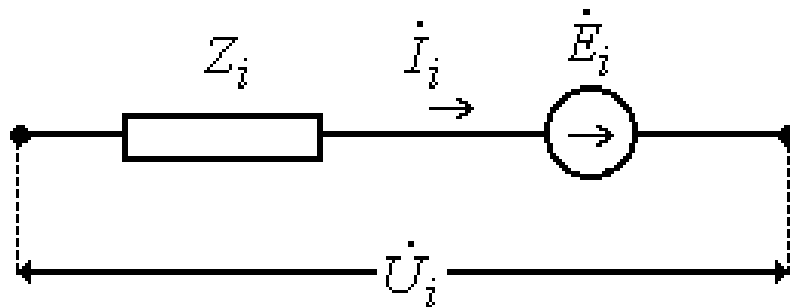


Рис. 2.6. i -я ветвь схемы замещения

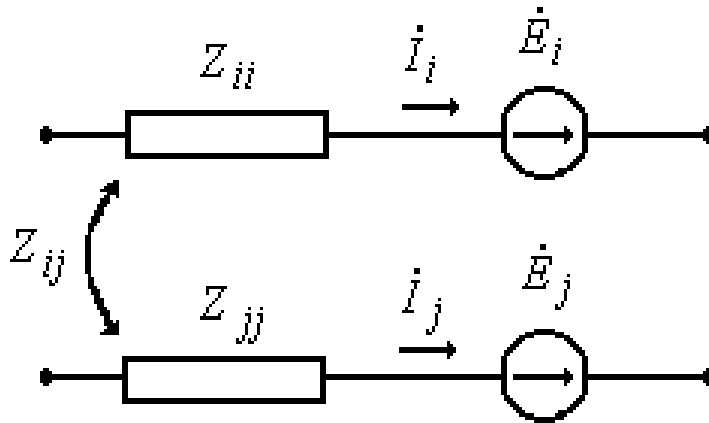
В общем случае между отдельными ветвями i и j схемы замещения могут существовать взаимные сопротивления Z_{ij} , обусловленные, например, взаимной индуктивностью. Взаимное сопротивление определяет ЭДС $\Delta \dot{E}_j$, наведенную в ветви j током \dot{I}_i , протекающим в ветви i , и наоборот:

$$Z_{ij} = \frac{\Delta \dot{E}_j}{\dot{I}_i} = \frac{\Delta \dot{E}_i}{\dot{I}_j} = Z_{ji}. \quad (2.2)$$

Для ветвей i и j , имеющих взаимное сопротивление (рис. 2.7), связь между параметрами определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{U}_i = Z_{ii} \cdot \dot{I}_i - \dot{E}_i + Z_{ij} \cdot \dot{I}_j \\ \dot{U}_j = Z_{jj} \cdot \dot{I}_j - \dot{E}_j + Z_{ji} \cdot \dot{I}_i \end{cases} \quad (2.3)$$

при указанных на рис. 2.7 положительных направлениях.

Рис. 2.7. Взаимное сопротивление ветвей i и j

Величины \dot{E}_i и \dot{J}_i являются исходными (независимыми) параметрами режима, а величины Z_{ii} и Z_{ij} – параметрами системы. Знание этих величин необходимо для определения остальных (зависимых) параметров режима – токов \dot{I}_i и падений напряжения \dot{U}_i на ветвях схемы.

Первый закон Кирхгофа определяет баланс токов в каждом узле электрической цепи и формулируется так: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю.

Для произвольного узла, содержащего источник тока \dot{J} и соединяющего k ветвей (рис. 2.8), уравнение первого закона Кирхгофа имеет вид:

$$\sum_{i=1}^k \dot{I}_i - \dot{J} = 0, \quad (2.4)$$

где за положительное принимается направление тока от узла.

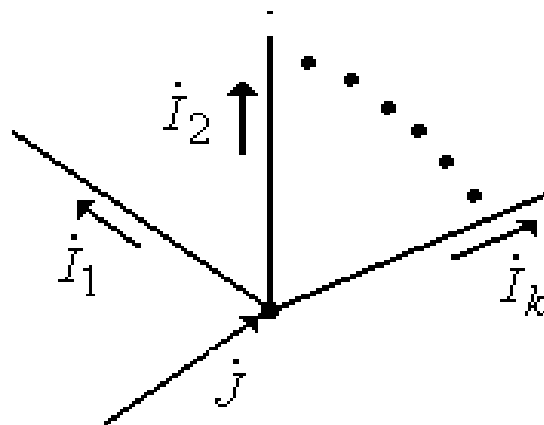


Рис. 2.8. Узел схемы замещения

Второй закон Кирхгофа определяет баланс напряжений в контурах электрической цепи и формулируется так: алгебраическая сумма падений напряжения на ветвях контура равна нулю. Для произвольного контура, содержащего l ветвей, уравнение второго закона Кирхгофа имеет вид:

$$\sum_{i=1}^l \dot{U}_i = 0. \quad (2.5)$$

Состояние электрической цепи полностью описывается уравнениями законов Ома и Кирхгофа.

Составим уравнения состояния для второго варианта схемы замещения электрической системы, представленного на рис. 2.5, полагая для общности, что в каждую ветвь дополнительно введен источник напряжения с ЭДС \dot{E}_i , где $i = 1, 2, \dots, 6$ (рис. 2.9). Пусть требуется определить токи в ветвях \dot{I}_i при заданных значениях задающих токов \dot{J}_i , сопротивлений Z_i и ЭДС \dot{E}_i , пренебрегая взаимными сопротивлениями ветвей Z_{ij} .

Запишем уравнения первого закона Кирхгофа для узлов $a - e$:

$$\begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{J}_a = 0 \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 - \dot{J}_b = 0 \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 - \dot{J}_c = 0. \\ \dot{I}_3 - \dot{J}_d = 0 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_4 + \dot{I}_5 - \dot{J}_e = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Сумма этих уравнений приводит к тождеству $0 \equiv 0$. Это обусловлено тем, что ток каждой ветви входит только в два уравнения, поскольку ветвь соединяет два узла, причем с противоположными знаками. Кроме того, сумма задающих токов равна нулю:

$$\dot{J}_a + \dot{J}_b + \dot{J}_c + \dot{J}_d + \dot{J}_e = 0,$$

поскольку условие баланса требует, чтобы сумма токов источников энергии равнялась сумме токов нагрузок. Таким образом, уравнения (2.6) не являются взаимно независимыми.

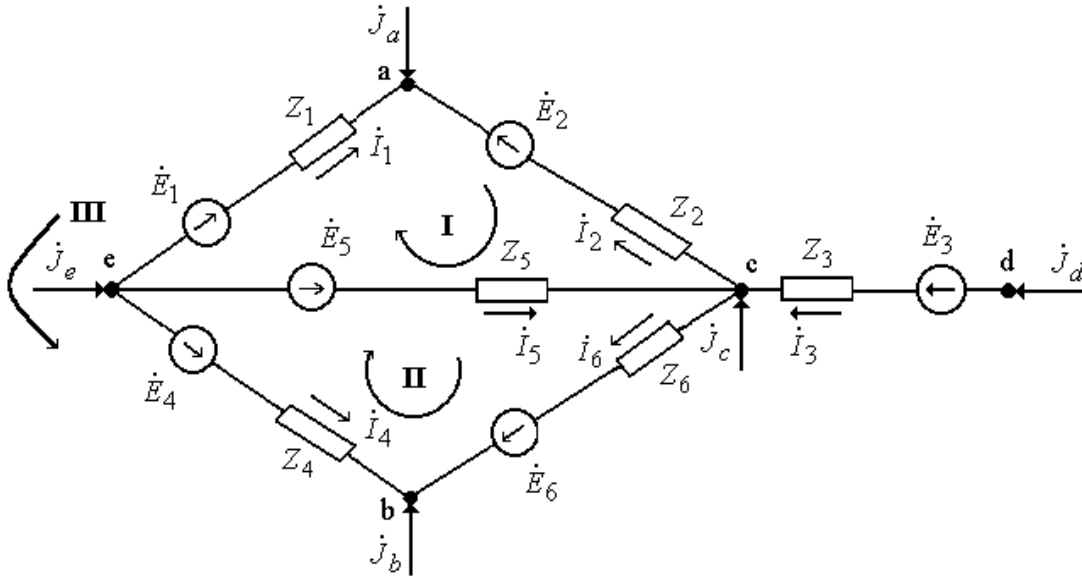


Рис. 2.9. Схема замещения электрической системы

Известно, что для электрической цепи, содержащей $n+1$ узлов, можно составить n взаимно независимых уравнений первого закона Кирхгофа вида (2.4), то есть один из узлов можно исключить из рассмотрения. Этот узел называется балансирующим узлом, а число n – числом независимых узлов схемы.

Выберем в схеме на рис. 2.9 узел e в качестве балансирующего. Это соответствует исключению последнего уравнения из системы (2.6). Оставшиеся четыре взаимно независимые уравнения можно записать в виде:

$$\begin{cases} -i_1 - i_2 = j_a \\ -i_4 - i_6 = j_b \\ i_2 - i_3 - i_5 + i_6 = j_c \\ i_3 = j_d \end{cases} \quad (2.7)$$

Число неизвестных токов в уравнениях (2.7) равно числу ветвей $k=6$, то есть на два больше числа уравнений. Для получения недостающих уравнений воспользуемся вторым законом Кирхгофа. Схема на рис. 2.9 содержит три контура: I, II и III, образуемых ветвями 1 – 2 – 5, 4 – 5 – 6 и 1 – 2 – 6 – 4. Для этих трех контуров запишем уравнения второго закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} I & \dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_5 = 0 \\ II & -\dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_6 = 0 \\ III & -\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_4 - \dot{U}_6 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Полученные уравнения не являются взаимно независимыми – их суммирование приводит к тождеству $0 \equiv 0$. Это объясняется тем, что любой из контуров содержит ветви, входящие только в два из трех контуров, и, следовательно, уравнение для одного контура получается суммированием уравнений двух других контуров.

Известно, что для схемы, содержащей k ветвей и $n+1$ узлов, число взаимно независимых уравнений второго закона Кирхгофа или, что то же самое, число независимых контуров равно:

$$l = k - n. \quad (2.9)$$

В нашем случае $l = 6 - 4 = 2$. В качестве независимых выберем контуры I и II, положительные направления обхода которых указаны на рис. 2.9. Уравнения второго закона Кирхгофа для этих контуров есть:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_5 = 0 \\ -\dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_6 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Используя уравнения закона Ома (2.1), перепишем систему (2.10) в виде:

$$\begin{cases} Z_1 \cdot \dot{I}_1 - Z_2 \cdot \dot{I}_2 - Z_5 \cdot \dot{I}_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_5 \\ -Z_4 \cdot \dot{I}_4 + Z_5 \cdot \dot{I}_5 + Z_6 \cdot \dot{I}_6 = -\dot{E}_4 + \dot{E}_5 + \dot{E}_6 \end{cases} \quad (2.11)$$

Объединяя системы (2.7) и (2.11), получим систему из шести взаимно независимых уравнений, которые необходимы и достаточны для определения токов в ветвях схемы:

$$\begin{cases} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{J}_a \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 = \dot{J}_b \\ \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = \dot{J}_c \\ \dot{I}_3 = \dot{J}_d \\ Z_1 \cdot \dot{I}_1 - Z_2 \cdot \dot{I}_2 - Z_5 \cdot \dot{I}_5 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_5 \\ -Z_4 \cdot \dot{I}_4 + Z_5 \cdot \dot{I}_5 + Z_6 \cdot \dot{I}_6 = -\dot{E}_4 + \dot{E}_5 + \dot{E}_6 \end{cases} \quad (2.12)$$

В общем случае электрической цепи, содержащей $n+1$ узлов и k ветвей, число взаимно независимых уравнений первого и второго законов Кирхгофа $n + (k - n) = k$, то есть равно числу ветвей схемы.

Схемы замещения современных сложных электрических систем содержат десятки, и даже сотни узлов и ветвей. Количество уравнений состояния для таких систем настолько велико, что для их решения необходимо использовать вычислительные машины. Более того,

составление уравнений состояния для сложных схем является весьма трудоемкой процедурой и решение данной задачи также целесообразно возложить на ЭВМ. Для этого требуется иметь формализованный подход к составлению уравнений, который был бы одинаков для схем любой сложности и конфигурации. Такой подход может быть разработан на основе аналитического представления конфигурации схемы замещения с помощью теории графов и алгебры матриц.

2.3. Элементы теории графов

Конфигурацию схемы замещения электрической системы можно отобразить в виде графа.

Граф представляет собой множество вершин (или узлов) и ребер (или ветвей), соединяющих некоторые (а может быть и все) пары вершин.

Любая часть графа называется подграфом.

Совокупность ребер, соединяющих две произвольные вершины графа, образует подграф, определяемый как путь графа.

Если начальная и конечная вершины пути графа совпадают, то этот путь графа является замкнутым и образует контур.

Если в графе можно выбрать путь, который соединяет любые две его вершины, то этот граф является связанным; если же нельзя – то несвязанным.

Если ребра графа имеют фиксированные направления, то этот граф называется направленным. Каждое ребро направленного графа имеет начальную и конечную вершины; его направление принимается от первой вершины ко второй.

Схема замещения электрической системы обычно является связанным направленным графом, ребрами которого служат ветви, а вершинами – узлы. При изображении схем в виде графов нет необходимости в специальных обозначениях сопротивлений и ЭДС. Ветви графически изображаются отрезками прямых с указанием их направлений в виде стрелок. Направление ветви от начального узла к конечному узлу одновременно является положительным направлением в этой ветви ЭДС \dot{E} , тока \dot{I} и падения напряжения \dot{U} . Условимся нумеровать ветви просто цифрами, узлы – цифрами, заключенными в окружность, а контуры – цифрами, заключенными в квадраты. Один из узлов выбирается в качестве балансирующего и обозначается через $\textcircled{0}$. Схема замещения, приведенная на рис. 2.9, представлена в виде графа на рис. 2.10.

Деревом называется наименьший связанный подграф, содержащий все вершины графа и не содержащий контуры. Другими словами, дерево – это разомкнутая часть замкнутой схемы, которая соединяет все ее узлы. Число ветвей, входящих в состав дерева схемы, равно числу независимых узлов:

$$m_{\text{д}} = n. \quad (2.13)$$

Меньшим числом ветвей нельзя соединить те же узлы.

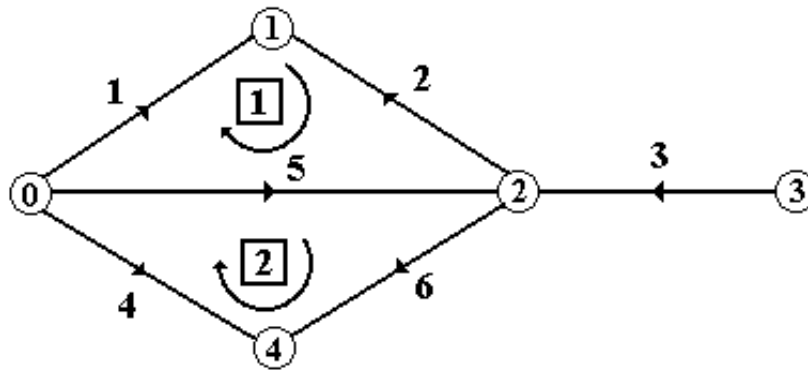


Рис. 2.10. Граф схемы замещения электроэнергетической системы

Разомкнутая схема получается путем исключения некоторых ветвей, входящих в независимые контуры исходной схемы. Каждый контур схемы размыкается, если исключается одна из входящих в него ветвей. При поочередном размыкании всех независимых контуров одновременно размыкаются и все прочие контуры. В результате остается разомкнутая часть схемы – дерево.

Ветви, не вошедшие в дерево схемы, называются хордами. Число хорд равно числу независимых контуров схемы:

$$m_{\text{х}} = k - m_{\text{д}} = k - n = l. \quad (2.14)$$

Подграф, состоящий из хорд, может содержать контуры, если число хорд больше двух. Он может получиться и несвязанным.

Одна и та же схема может быть разделена на дерево и хорды по-разному. Для сложных схем число вариантов такого деления очень велико. Граф, изображенный на рис. 2.10, содержит два независимых контура, поэтому достаточно исключить две ветви, чтобы оставшиеся соединяли все узлы, то есть составляли дерево. Существует 8 вариантов деления этого графа на дерево и хорды. При этом два из подграфов, состоящих из хорд, получаются несвязанными. В данном случае они не содержат контуры, поскольку число хорд равно двум.

2.4. Первая матрица инцидентий

Топологию графа схемы замещения описывает матрица соединений ветвей в узлах или первая матрица инцидентий. Полная первая матрица инцидентий \mathbf{M}_Σ – это прямоугольная матрица, число строк которой равно числу вершин (узлов) графа $n + 1$, а число столбцов – числу ребер (ветвей) k :

$$\mathbf{M}_\Sigma = (M_{ij}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.15)$$

Номера строк i соответствуют номерам узлов (вершин), а номера столбцов j – номерам ветвей (ребер). Элементы матрицы \mathbf{M}_Σ могут принимать одно из трех значений:

$M_{ij} = +1$, если узел i является начальной вершиной ветви j ;

$M_{ij} = -1$, если узел i является конечной вершиной ветви j ;

$M_{ij} = 0$, если узел i не является вершиной ветви j .

Каждая строка матрицы \mathbf{M}_Σ показывает, какими вершинами соответствующие ветви присоединяются к данному узлу схемы; каждый столбец – какие узлы являются начальной и конечной вершинами данной ветви. Для графа на рис. 2.10 полная первая матрица инцидентий имеет вид:

$$\mathbf{M}_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

В каждом столбце матрицы \mathbf{M}_Σ может быть только одна положительная и одна отрицательная единицы; остальными элементами являются нули. Следовательно, сумма всех строк этой матрицы должна давать нулевую строчную матрицу:

$$\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

где \mathbf{n}_t – единичная строка, \mathbf{n} – единичный столбец, а индекс t означает операцию транспонирования (замену строк на столбцы и наоборот).

Если выделить строку, соответствующую балансирующему узлу, обозначив ее \mathbf{M}_0 , то условие (2.17) можно записать в виде:

$$\mathbf{e}_{n_t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

и

$$\mathbf{M}_0 = -\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{M}. \quad (2.18)$$

Здесь \mathbf{M}_0 – строковая матрица соединений для балансирующего узла, а \mathbf{M} – матрица соединений для схемы без балансирующего узла или первая матрица инцидентий:

$$\mathbf{M} = (M_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.19)$$

Полученный результат означает, что для практических расчетов достаточно пользоваться первой матрицей инцидентий \mathbf{M} , по которой может быть восстановлена вся схема. В случае надобности матрица \mathbf{M}_Σ может быть восстановлена по выражению:

$$\mathbf{M}_\Sigma = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Для графа на рис. 2.10 матрица \mathbf{M} есть:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

По этой матрице можно восстановить исключенную строку, которая является матрицей \mathbf{M}_0 :

$$\mathbf{M}_0 = -\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{e}_{111111} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{111111} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая матрица инцидентий позволяет компактно записать уравнения первого закона Кирхгофа:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.22)$$

где $\dot{\mathbf{I}} = (\dot{I}_i)$ – столбец токов в ветвях ($i = 1, 2, \dots, k$), а $\dot{\mathbf{J}} = (\dot{J}_j)$ – столбец задающих токов в узлах ($j = 1, 2, \dots, n$). Для графа на рис. 2.10 матричное уравнение (2.22) в развернутом виде есть:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \\ \dot{J}_4 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

2.5. Вторая матрица инцидентий

Информацию о контурах схемы замещения содержит вторая матрица инцидентий или матрица соединений ветвей в независимые контуры. Это прямоугольная матрица \mathbf{N} , число строк которой равно числу независимых контуров графа l , а число столбцов – числу ветвей k :

$$\mathbf{N} = (N_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.24)$$

Номера строк i соответствуют номерам независимых контуров, а номера столбцов j – номерам ветвей. Элементы матрицы \mathbf{N} определяются следующим образом:

$N_{ij} = +1$, если ветвь j входит в контур i и их направления совпадают;

$N_{ij} = -1$, если ветвь j входит в контур i и их направления противоположны;

$N_{ij} = 0$, если ветвь j не входит в контур i .

Каждая строка матрицы \mathbf{N} показывает, какие ветви входят в состав соответствующего независимого контура и какое направление они имеют относительно направления этого контура. Каждый столбец матрицы \mathbf{N} показывает, в состав каких независимых контуров входит данная ветвь и совпадает ли ее направление с направлением этих контуров.

Для направленного графа на рис. 2.10 с контурами 1 и 2 в качестве независимых вторая матрица инцидентий имеет вид:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Используя матрицу \mathbf{N} , второй закон Кирхгофа можно записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

где $\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{B}} = (\dot{U}_{\mathbf{B}i})$ – столбец падений напряжений на ветвях схемы ($i = 1, 2, \dots, k$). Для графа на рис. 2.10 матричное уравнение (2.26) в развернутом виде есть:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_{\mathbf{B}1} \\ \dot{U}_{\mathbf{B}2} \\ \dot{U}_{\mathbf{B}3} \\ \dot{U}_{\mathbf{B}4} \\ \dot{U}_{\mathbf{B}5} \\ \dot{U}_{\mathbf{B}6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

2.6. Связь между первой и второй матрицами инцидентий

Первая матрица инцидентий \mathbf{M} содержит исчерпывающую информацию о схеме замещения и ее составление для схемы любой сложности не представляет труда. Составить же вторую матрицу инцидентий \mathbf{N} для сложных электрических систем бывает трудно, поскольку предварительно требуется выделить независимые контуры, количество которых l может быть очень велико. Кроме того, вторая матрица инцидентий в общем случае не содержит полной информации о конфигурации системы, так как разомкнутые части схемы в ней не отражаются. Например, ветвь 3 представлена в матрице \mathbf{N} для схемы на рис. 2.10 нулевыми элементами, так как она не входит ни в один контур, и присоединение ее к любому другому узлу не изменяет матрицу \mathbf{N} . Этой неоднозначности можно избежать, если формализовать процесс составления второй матрицы инцидентий. Эта возможность обусловлена тем, что матрица \mathbf{M} содержит в себе исчерпывающую информацию о конфигурации схемы, в том числе и необходимую для составления матрицы \mathbf{N} . Для реализации этой возможности надо установить аналитическую зависимость, связывающую матрицы \mathbf{M} и \mathbf{N} .

Обозначим напряжение узла i через \dot{U}_i . По столбцу напряжений узлов

$$\dot{\mathbf{U}} = (\dot{U}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

с помощью матрицы \mathbf{M}_Σ можно определить столбец падений напряжений в ветвях по соотношению:

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{M}_{\Sigma t} \cdot \dot{\mathbf{U}}, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{M}_{\Sigma t}$ обозначает транспонированную полную первую матрицу инцидентий. Действительно, для графа на рис. 2.10 имеем:

$$\mathbf{M}_{\Sigma t} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_0 - \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 - \dot{U}_2 \\ \dot{U}_0 - \dot{U}_4 \\ \dot{U}_0 - \dot{U}_2 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{B1} \\ \dot{U}_{B2} \\ \dot{U}_{B3} \\ \dot{U}_{B4} \\ \dot{U}_{B5} \\ \dot{U}_{B6} \end{pmatrix}.$$

Столбец узловых напряжений $\dot{\mathbf{U}}$ записан для всех узлов схемы, включая балансирующий. При этом узловые напряжения могут быть определены относительно любого узла, даже не входящего в состав схемы замещения системы (например, относительно нейтрали сети, с которой узлы схемы могут не иметь связей в виде ветвей).

Часто узловые напряжения целесообразно определять относительно балансирующего узла, то есть как падения напряжения от каждого из независимых узлов схемы до балансирующего. Эти значения отличаются от напряжений относительно нейтрали (при отсутствии поперечных ветвей) на одну и ту же величину – напряжение балансирующего узла \dot{U}_0 :

$$\dot{\mathbf{U}} - \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{U}}_y \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

где \mathbf{n} – единичный столбец, а столбец относительных узловых напряжений

$$\mathbf{U}_y = \langle U_i - U_0 \rangle \equiv \langle U_{yi} \rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$$

определяет напряжения узлов относительно балансирующего узла. Выражение (2.29) теперь становится:

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{M}_{\Sigma t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{U}}_y \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{0t} \cdot \mathbf{M}_t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{U}}_y \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{M}_t \cdot \dot{\mathbf{U}}_y. \quad (2.31)$$

Из матричного уравнения второго закона Кирхгофа (2.26) и уравнения (2.31) следует, что

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}_t \cdot \dot{\mathbf{U}}_y = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

Поскольку это условие справедливо для любого столбца $\dot{\mathbf{U}}_y$, то

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}_t = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

Выражение (2.33) отображает общее топологическое свойство графа и связывает первую и вторую матрицы инциденций. Для графа на рис. 2.10 матричное выражение (2.33) в развернутом виде есть:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

2.7. Нахождение второй матрицы инциденций по известной первой матрице инциденций

Выражение (2.33) не позволяет непосредственно определить матрицу \mathbf{N} по известной матрице \mathbf{M} . Это связано с тем, что одной и той же электрической цепи в общем случае соответствует несколько различных систем независимых контуров. Например, граф на рис. 2.10 содержит три контура, но только два из них являются независимыми и выбрать их можно тремя способами. Сделать однозначный выбор независимых контуров в сложной схеме помогает разбиение графа на дерево и хорды, причем в качестве хорд удобнее использовать ветви с наибольшими

номераи (5 и 6 в случае графа на рис. 2.10). Такое разбиение позволяет представить матрицы \mathbf{M} и \mathbf{N} в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{N}_\beta \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где \mathbf{M}_α – квадратная матрица порядка n , \mathbf{M}_β – прямоугольная матрица размерностью $n \times l$, \mathbf{N}_α – прямоугольная матрица размерностью $l \times n$ и \mathbf{N}_β – квадратная матрица порядка l . Блочные матрицы \mathbf{M}_α и \mathbf{N}_α относятся к дереву графа, а блочные матрицы \mathbf{M}_β и \mathbf{N}_β – к хордам графа.

Теперь уравнение (2.33) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{N}_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\alpha t} \\ \mathbf{M}_{\beta t} \end{pmatrix} = \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{M}_{\alpha t} + \mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{M}_{\beta t} = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Матрица $\mathbf{M}_{\alpha t}$ – квадратная и неособенная (ее определитель не равен нулю), поэтому обратная ей матрица $\mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}$ существует и из уравнения (2.36) следует, что

$$\mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{M}_{\beta t} \cdot \mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}. \quad (2.37)$$

Можно показать, что для любой схемы замещения имеется такая система независимых контуров, для которой \mathbf{N}_β является единичной матрицей порядка l . Такая система называется системой базисных контуров и для нее

$$\mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{M}_{\beta t} \cdot \mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}, \quad \mathbf{N}_\beta = \mathbf{1}, \quad (2.38)$$

где символ $\mathbf{1}$ обозначает единичную матрицу порядка l .

Таким образом, с помощью соотношений (2.38) по известной первой матрице инцидентий \mathbf{M} можно определить вторую матрицу инцидентий \mathbf{N} , соответствующую системе базисных контуров. Для графа на рис. 2.10 разбиение матрицы \mathbf{M} на блоки \mathbf{M}_α , \mathbf{M}_β и их последующее транспонирование дает:

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha t} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\beta t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Обратную матрицу $\mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}$ найдем методом Гаусса (Раздел 5.3). Для этого сформируем объединенную прямоугольную матрицу путем добавления к матрице $\mathbf{M}_{\alpha t}$ справа единичной матрицы того же порядка:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняя преобразования над строками этой матрицы в соответствии с алгоритмом метода Гаусса, переместим единичный блок из правой части в левую часть матрицы. Тогда правая квадратная часть этой объединенной матрицы и будет обратной матрицей $\mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}$.

На первом шаге умножим первую и четвертую строки матрицы на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке первую строку матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_{\alpha t}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Применяя формулы (2.38), получим:

$$\mathbf{N}_{\alpha} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая вторая матрица инцидентий \mathbf{N} , соответствующая системе базисных контуров, имеет вид:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\alpha} \quad \mathbf{N}_{\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Полученной матрице \mathbf{N} соответствуют базисные контуры 1 и 2, показанные на рис. 2.11.

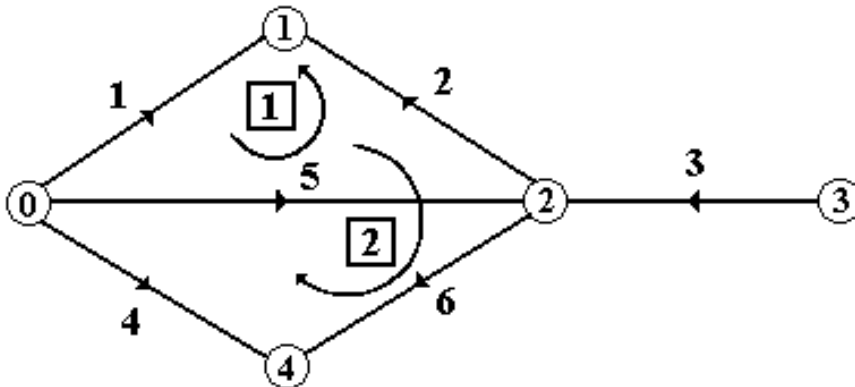


Рис. 2.11. Граф схемы замещения и система базисных контуров

2.8. Обобщенное уравнение состояния

Матрицы \mathbf{M} и \mathbf{N} дают возможность записать уравнения первого и второго законов Кирхгофа в матричной форме (см. уравнения (2.22) и (2.26)). Чтобы ввести в уравнения второго закона Кирхгофа токи в ветвях схемы замещения, воспользуемся законом Ома в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{U}}_B = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.43)$$

где $\dot{\mathbf{E}} = (\dot{E}_i)$ – столбец ЭДС в ветвях ($i = 1, 2, \dots, k$), а $\mathbf{Z} = (Z_{ij})$ – матрица сопротивлений ветвей ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Если между ветвями отсутствует взаимоиндуктивная связь, то матрица \mathbf{Z} является диагональной матрицей порядка k .

Комбинируя (2.26) и (2.43), получим

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{E}}_K, \quad (2.44)$$

где

$$\dot{\mathbf{E}}_K = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.45)$$

Здесь $\dot{\mathbf{E}}_K = (\dot{E}_{Ki})$ – это столбец контурных ЭДС, представляющих собой суммы ЭДС ветвей, входящих в каждый контур ($i = 1, 2, \dots, l$).

Объединяя матричные уравнения (2.22) и (2.44) в общую систему, получим

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{J}} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{E}}_K \end{cases} \quad (2.46)$$

Уравнения системы (2.46) можно заменить одним матричным уравнением, если матрицы \mathbf{M} и $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}$ рассматривать как блоки одной объединенной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

а столбцы $\dot{\mathbf{J}}$ и $\dot{\mathbf{E}}_K$ рассматривать как один объединенный столбец:

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{J}} \\ \dot{\mathbf{E}}_K \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Здесь \mathbf{A} – квадратная матрица порядка k , называемая матрицей параметров схемы замещения системы, а $\dot{\mathbf{F}}$ – столбец, содержащий k элементов и называемый столбцом исходных параметров режима.

В результате получаем одно матричное уравнение, которое называется обобщенным уравнением состояния электрической системы:

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.49)$$

Найдем обобщенное уравнение состояния для графа схемы замещения, изображенного на рис. 2.11. Предварительно определим матрицы $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{\text{к}}$ в предположении, что матрица \mathbf{Z} имеет диагональный вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{\text{к}} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{E}} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \\ \dot{E}_4 \\ \dot{E}_5 \\ \dot{E}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_5 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4 + \dot{E}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{\text{к1}} \\ \dot{E}_{\text{к2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда обобщенное уравнение состояния в развернутом виде есть:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \\ \dot{J}_4 \\ \dot{E}_{\text{к1}} \\ \dot{E}_{\text{к2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} является квадратной и в обычных условиях неособенной, поэтому обобщенное уравнение состояния можно решить относительно токов в ветвях путем обращения матрицы \mathbf{A} :

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.50)$$

В частном случае «разомкнутой» схемы замещения, когда соответствующий граф не содержит контуров и является деревом, а хорды отсутствуют, матрица \mathbf{M} является квадратной и обобщенное уравнение состояния сводится к матричному уравнению первого закона Кирхгофа:

$$\mathbf{M}_p \cdot \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{J}, \quad (2.51)$$

где \mathbf{M}_p – первая матрица инцидентий для разомкнутой схемы. Данное уравнение можно разрешить относительно токов в ветвях

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{M}_p^{-1} \cdot \mathbf{J} \quad (2.52)$$

и нет необходимости находить матрицу \mathbf{N} .

После того, как токи в ветвях $\dot{\mathbf{I}}$ найдены, можно определить падения напряжения в ветвях $\dot{\mathbf{U}}_B$ согласно уравнению закона Ома (2.43). Чтобы найти затем узловые напряжения, воспользуемся уравнением (2.31), связывающим падения напряжения в ветвях схемы $\dot{\mathbf{U}}_B$ с относительными узловыми напряжениями $\dot{\mathbf{U}}_y$. Матрица \mathbf{M}_t , входящая в это уравнение, в общем случае прямоугольная и ее нельзя обратить. Поэтому необходимо разбить матрицу \mathbf{M}_t и столбец $\dot{\mathbf{U}}_B$ на блоки, соответствующие дереву и хордам графа, и тогда уравнение (2.31) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\alpha t} \\ \mathbf{M}_{\beta t} \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{U}}_y = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{B\alpha} \\ \dot{\mathbf{U}}_{B\beta} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_{\alpha t} \cdot \dot{\mathbf{U}}_y = \dot{\mathbf{U}}_{B\alpha} \quad (2.54)$$

и

$$\dot{\mathbf{U}}_y = \mathbf{M}_{\alpha t}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{B\alpha}, \quad (2.55)$$

где матрица $\mathbf{M}_{\alpha t}^{-1}$ уже была найдена раньше при определении второй матрицы инцидентий \mathbf{N} , соответствующей системе базисных контуров.

Определив по уравнению (2.55) относительные узловые напряжения $\dot{\mathbf{U}}_y$, можно затем найти абсолютные узловые напряжения:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_y + \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (2.56)$$

где \dot{U}_0 – напряжение балансирующего узла.

Обозначим через $\dot{S}_y = \begin{pmatrix} \dot{S}_{y1} \\ \vdots \\ \dot{S}_{yn} \end{pmatrix}$ столбец узловых мощностей ($i = 1, 2, \dots, n$). Элементы этого столбца можно найти из соотношений:

$$\dot{S}_{yi} = 3 \cdot \dot{U}_i \cdot J_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.57)$$

где J_i^* – комплексно-сопряженный задающий ток в i -ом узле.

В уравнениях (2.57) мощность трехфазной цепи определяется фазными значениями напряжений и токов. При использовании линейных узловых напряжений мощности узлов определяются как

$$\dot{S}_{yi} = \sqrt{3} \cdot \dot{U}_i \cdot J_i^*.$$

Блок-схема алгоритма расчета установившегося режима путем решения обобщенного уравнения состояния приведена на рис. 2.12.

Изложенная последовательность расчета параметров установившегося режима электрической системы характеризуется тем, что при определении токов в ветвях решается система уравнений порядка k , где k – число ветвей, равное сумме числа независимых узлов n и числа независимых контуров l . Существуют два способа понижения порядка решаемой системы уравнений. Первый сводит обобщенное уравнение состояния к системе из n узловых уравнений, основанных на первом законе Кирхгофа и законе Ома, а второй сводит обобщенное уравнение состояния к системе из l контурных уравнений, базирующихся на втором законе Кирхгофа и законе Ома.

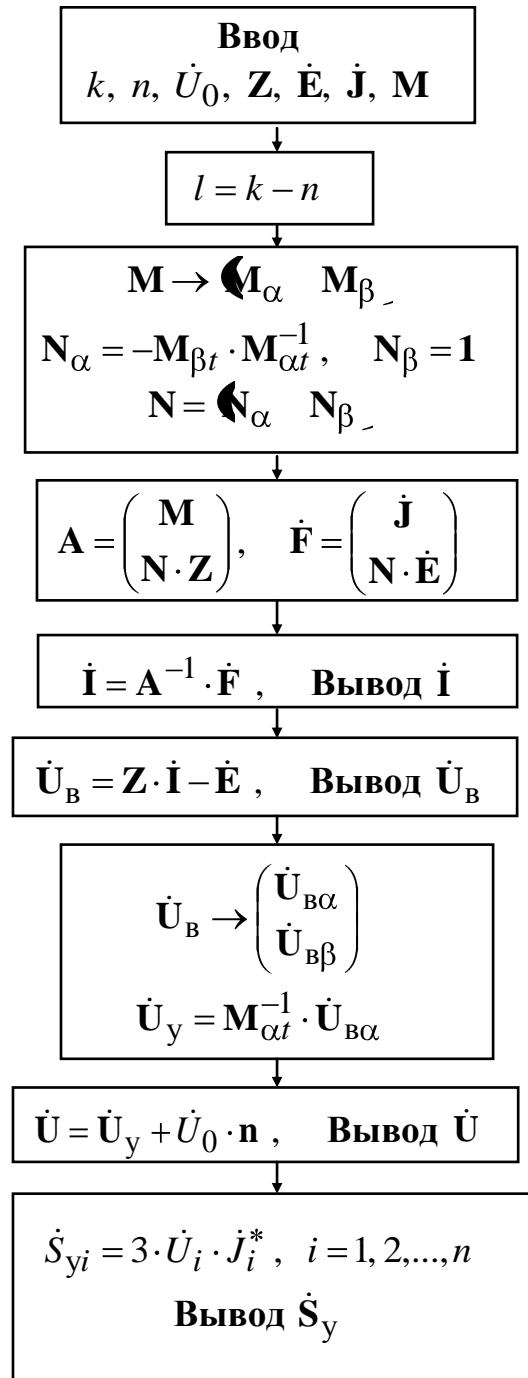


Рис. 2.12. Блок-схема алгоритма расчета параметров установившегося режима методом решения обобщенного уравнения состояния

2.9. Метод контурных токов

Контурные уравнения состояния можно получить следующим образом. Выделяя в матрице \mathbf{M} и столбце $\dot{\mathbf{I}}$ блоки, соответствующие ветвям дерева и хордам, уравнение первого закона Кирхгофа (2.22) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{I}}_\alpha \\ \dot{\mathbf{I}}_\beta \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.58)$$

где $\dot{\mathbf{I}}_\alpha$ и $\dot{\mathbf{I}}_\beta$ – столбцы токов в ветвях дерева и хорд соответственно.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{I}}_\alpha + \mathbf{M}_\beta \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta = \dot{\mathbf{J}}$$

и

$$\dot{\mathbf{I}}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{M}_\beta \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (2.59)$$

При выборе системы независимых базисных контуров справедливо соотношение (2.38), при транспонировании которого получаем:

$$\mathbf{N}_{\alpha t} = -\mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{M}_\beta. \quad (2.60)$$

Тогда уравнение (2.59) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{I}}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{N}_{\alpha t} \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (2.61)$$

Поэтому

$$\dot{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{I}}_\alpha \\ \dot{\mathbf{I}}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{N}_{\alpha t} \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta \\ \mathbf{0} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{\alpha t} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (2.62)$$

Введем обозначение:

$$\mathbf{M}_\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha^{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Здесь \mathbf{M}_γ – прямоугольная матрица размерностью $k \times n$, а $\mathbf{0}$ – нулевая блочная матрица размерностью $l \times n$. Так как

$$\mathbf{N}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{\alpha t} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

то выражение (2.62) преобразуется к виду:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{M}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{N}_t \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta. \quad (2.65)$$

Матричное уравнение второго закона Кирхгофа (2.26) с учетом закона Ома (2.43) и соотношения (2.65) приводит к выражению:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta = \dot{\mathbf{E}}_k - \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{M}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{J}}. \quad (2.66)$$

Величина

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}_t \quad (2.67)$$

представляет собой квадратную матрицу порядка l , которая называется матрицей контурных сопротивлений. Удобно также ввести величину

$$\dot{\mathbf{E}}_\beta = \dot{\mathbf{E}}_k - \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{M}_\gamma \cdot \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.68)$$

представляющую собой столбец, содержащий l элементов и называемый столбцом «приведенных» контурных ЭДС. При отсутствии задающих токов в узлах, что отвечает первому варианту схемы замещения, в котором электростанции представлены источниками напряжения, а нагрузки – сопротивлениями (см., например, рис. 2.4), $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$ и $\dot{\mathbf{E}}_\beta = \dot{\mathbf{E}}_k$.

С учетом обозначений (2.67) и (2.68) система взаимно независимых контурных уравнений состояния в матричной форме (2.66) принимает простой вид:

$$\mathbf{Z}_k \cdot \dot{\mathbf{I}}_\beta = \dot{\mathbf{E}}_\beta. \quad (2.69)$$

Формирование контурных уравнений сводится к определению матрицы контурных сопротивлений \mathbf{Z}_k . В случае, когда матрица сопротивлений ветвей \mathbf{Z} является диагональной, произвольный элемент матрицы \mathbf{Z}_k можно записать в виде:

$$Z_{k \cdot ij} = \sum_{p=1}^k N_{ip} \cdot N_{jp} \cdot Z_p, \quad (2.70)$$

где N_{ip} и N_{jp} – элементы второй матрицы инцидентий \mathbf{N} . При $i = j$ выражение (2.70) переходит в

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ii} = \sum_{p=1}^k N_{ip}^2 \cdot Z_p. \quad (2.71)$$

Из выражений (2.70) и (2.71) вытекают следующие правила составления матрицы контурных сопротивлений $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ в случае, когда матрица \mathbf{Z} имеет диагональную форму:

1) недиагональный элемент $\mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ij}$ равен алгебраической сумме сопротивлений ветвей, одновременно входящих в контуры i и j . Слагаемое этой суммы будет положительным, если направления обхода контуров i и j в пределах данной ветви совпадают, и отрицательным, если не совпадают. Если контуры i и j не имеют общих ветвей, то элемент $\mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ij} = 0$. Матрица $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ является симметричной, поэтому

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ij} = \mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ji};$$

2) диагональный элемент $\mathcal{Z}_{\mathbf{K}} \overset{\sim}{ii}$ равен сумме сопротивлений ветвей, образующих контур i .

Для графа схемы замещения с системой базисных контуров, изображенных на рис. 2.11, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{Z}_{\mathbf{K}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}_t &= \begin{pmatrix} -Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ Z_1 & -Z_2 & 0 & -Z_4 & 0 & Z_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{Z}_K = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_1 - Z_2 \\ -Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{pmatrix}.$$

Система контурных уравнений для этой схемы при $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_1 - Z_2 \\ -Z_1 - Z_2 & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_{\beta 1} \\ \dot{I}_{\beta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{K1} \\ \dot{E}_{K2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_5 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4 + \dot{E}_6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица \mathbf{Z}_K – квадратная и неособенная, то контурное уравнение состояния (2.69) можно решить относительно токов в хордах $\dot{\mathbf{I}}_\beta$ путем обращения матрицы \mathbf{Z}_K :

$$\dot{\mathbf{I}}_\beta = \mathbf{Z}_K^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}}_\beta. \quad (2.72)$$

Зная токи в хордах $\dot{\mathbf{I}}_\beta$, по формуле (2.65) можно определить токи во всех ветвях схемы. Остальные параметры установившегося режима находятся по выражениям (2.43), (2.55)-(2.57). Блок-схема алгоритма расчета параметров установившегося режима методом контурных токов приведена на рис. 2.13.

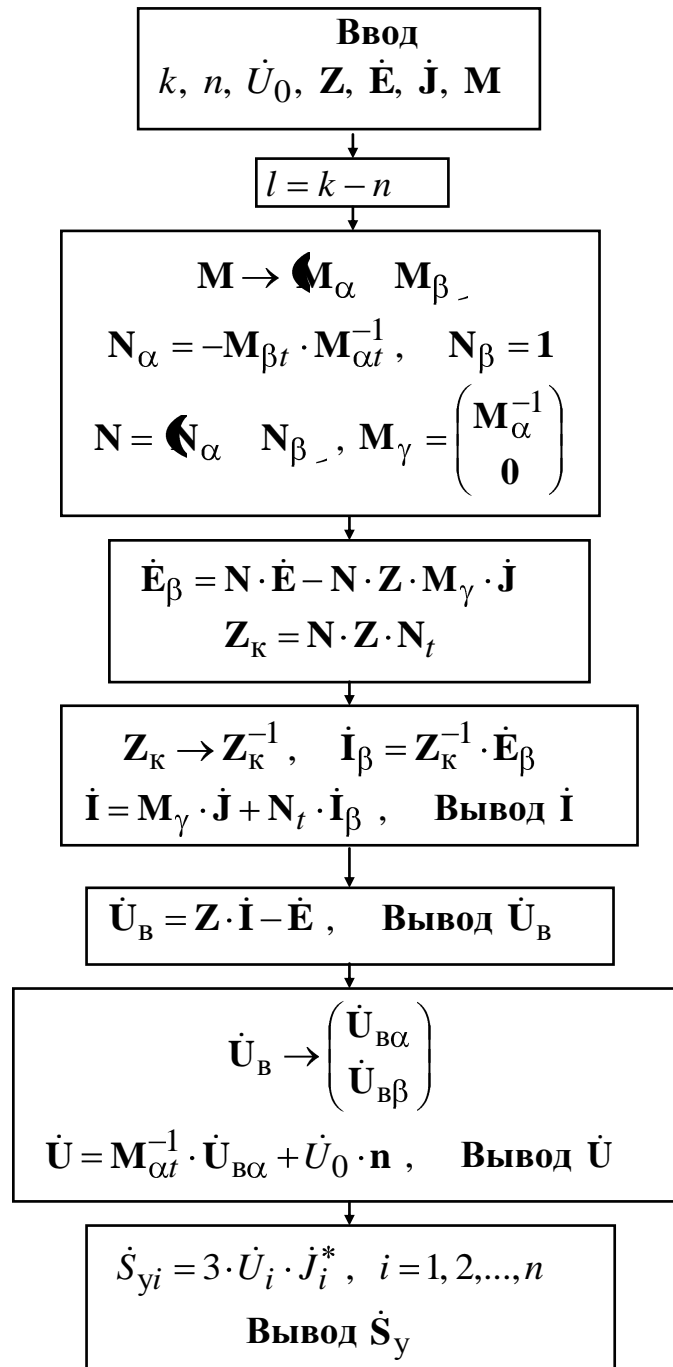


Рис. 2.13. Блок-схема алгоритма расчета параметров установившегося режима методом контурных токов

2.10. Метод узловых напряжений

Узловые уравнения состояния основаны на уравнениях первого закона Кирхгофа и закона Ома. Преимущество их состоит в том, что они не требуют определения второй матрицы инциденций \mathbf{N} и их применение позволяет сократить порядок решаемой системы уравнений до числа

независимых узлов n по сравнению с использованием системы обобщенных уравнений состояния, имеющих порядок, равный числу ветвей k . Поэтому система узловых уравнений широко применяется при расчетах установившихся режимов сложных электрических систем.

Подставляя матричное уравнение закона Ома (2.43) в выражение (2.31), связывающее падения напряжений в ветвях \dot{U}_B с относительными узловыми напряжениями \dot{U}_y , получим:

$$\mathbf{M}_t \cdot \dot{U}_y = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{I}} - \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.73)$$

Матрица сопротивлений ветвей \mathbf{Z} квадратная и неособенная, поэтому

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot (\mathbf{M}_t \cdot \dot{U}_y + \dot{\mathbf{E}}). \quad (2.74)$$

Подставляя выражение (2.74) в уравнение первого закона Кирхгофа (2.22), получаем:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{M}_t \cdot \dot{U}_y + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}$$

или

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{M}_t \cdot \dot{U}_y = \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.75)$$

Величина

$$\mathbf{Y}_y = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{M}_t \quad (2.76)$$

представляет собой квадратную матрицу порядка n , называемую матрицей узловых проводимостей. Введем величину

$$\dot{\mathbf{J}}_y = \dot{\mathbf{J}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.77)$$

которая представляет собой столбец, содержащий n элементов и называемый столбцом «приведенных» токов в узлах. При отсутствии ЭДС в ветвях ($\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$), что характерно для многих схем замещения реальных электрических систем, $\dot{\mathbf{J}}_y = \dot{\mathbf{J}}$. В результате введенных обозначений получим систему узловых уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{Y}_y \cdot \dot{U}_y = \dot{\mathbf{J}}_y. \quad (2.78)$$

Формирование узловых уравнений сводится к определению матрицы узловых проводимостей \mathbf{Y}_y . В случае, когда матрица сопротивлений ветвей \mathbf{Z} является диагональной, произвольный элемент матрицы \mathbf{Y}_y можно записать в виде:

$$Y_{y \ ij} = \sum_{p=1}^k M_{ip} \cdot M_{jp} \cdot Z_p^{-1}, \quad (2.79)$$

где M_{ip} и M_{jp} – элементы первой матрицы инцидентий \mathbf{M} . При $i = j$ выражение (2.79) переходит в

$$Y_{y \ ii} = \sum_{p=1}^k M_{ip}^2 \cdot Z_p^{-1}. \quad (2.80)$$

Из выражений (2.79) и (2.80) вытекают следующие правила составления матрицы узловых проводимостей \mathbf{Y}_y в случае, когда матрица \mathbf{Z} имеет диагональную форму:

1) недиагональный элемент $Y_{y \ ij}$ называется взаимной проводимостью узлов i и j . Если между двумя узлами в схеме нет ветви, то соответствующая взаимная проводимость равна нулю: $Y_{y \ ij} = 0$. Если узлы i и j соединены одной ветвью с сопротивлением Z_p , то

$$Y_{y \ ij} = -\frac{1}{Z_p}. \quad (2.81)$$

Матрица \mathbf{Y}_y является симметричной, поэтому $Y_{y \ ij} = Y_{y \ ji}$;

2) диагональный элемент $Y_{y \ ii}$ называется собственной проводимостью узла i и равен сумме проводимостей всех ветвей, соединенных с узлом i .

Для графа схемы замещения, изображенного на рис. 2.11, имеем:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -Z_1^{-1} & -Z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2^{-1} & -Z_3^{-1} & 0 & -Z_5^{-1} & Z_6^{-1} \\ 0 & 0 & Z_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4^{-1} & 0 & -Z_6^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}_y = \begin{pmatrix} -Z_1^{-1} & -Z_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2^{-1} & -Z_3^{-1} & 0 & -Z_5^{-1} & Z_6^{-1} \\ 0 & 0 & Z_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4^{-1} & 0 & -Z_6^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{Y}_y = \begin{pmatrix} Z_1^{-1} + Z_2^{-1} & -Z_2^{-1} & 0 & 0 \\ -Z_2^{-1} & Z_2^{-1} + Z_3^{-1} + Z_5^{-1} + Z_6^{-1} & -Z_3^{-1} & -Z_6^{-1} \\ 0 & -Z_3^{-1} & Z_3^{-1} & 0 \\ 0 & -Z_6^{-1} & 0 & Z_4^{-1} + Z_6^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Система узловых уравнений для этого графа имеет вид:

$$\begin{pmatrix} Z_1^{-1} + Z_2^{-1} & -Z_2^{-1} & 0 & 0 \\ -Z_2^{-1} & Z_2^{-1} + Z_3^{-1} + Z_5^{-1} + Z_6^{-1} & -Z_3^{-1} & -Z_6^{-1} \\ 0 & -Z_3^{-1} & Z_3^{-1} & 0 \\ 0 & -Z_6^{-1} & 0 & Z_4^{-1} + Z_6^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_{y1} \\ \dot{U}_{y2} \\ \dot{U}_{y3} \\ \dot{U}_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{J}_{y1} \\ \dot{J}_{y2} \\ \dot{J}_{y3} \\ \dot{J}_{y4} \end{pmatrix}.$$

Решив уравнение (2.78) относительно узловых напряжений

$$\dot{U}_y = Y_y^{-1} \cdot \dot{J}_y, \quad (2.83)$$

затем можно рассчитать падения напряжения на ветвях схемы по формуле (2.31) и токи в ветвях по выражению (2.74). Абсолютные узловые напряжения находятся из соотношения (2.56), а узловые мощности – по формулам (2.57).

Блок-схема алгоритма расчета установившегося режима методом узловых напряжений приведена на рис. 2.14.

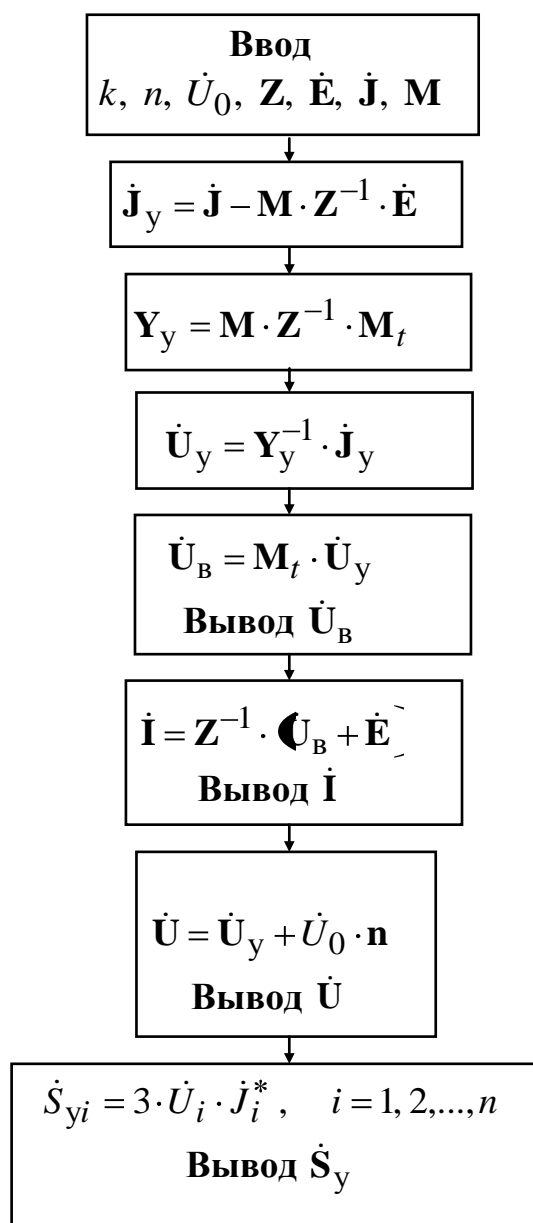


Рис. 2.14. Блок-схема алгоритма расчета параметров установившегося режима методом узловых напряжений

2.11. Нелинейные узловые уравнения состояния электрической системы

Для выполнения расчета установившегося режима электрической системы необходима информация о схеме и ее параметрах, о потребителях (нагрузках) и источниках электроэнергии (электростанциях). Исходными данными о нагрузках часто служат значения потребляемых ими активных P_{Hi} и реактивных Q_{Hi} мощностей, то есть полные мощности $\dot{S}_{Hi} = P_{Hi} + j \cdot Q_{Hi}$.

Исходными данными об источниках питания также могут служить значения активных P_{Gi} и реактивных Q_{Gi} мощностей, аналогично нагрузкам. Кроме того, один из источников (как правило, наиболее мощная электростанция), играющий роль балансирующего узла, задается значением напряжения \dot{U}_0 . При этих исходных данных целью расчета установившегося режима электрической системы является определения мощностей и токов в ветвях схемы замещения и значений напряжений в ее узловых точках. Эта задача сводится к решению системы нелинейных уравнений из-за нелинейной зависимости мощности от тока и напряжения.

Уравнения установившегося режима электрической системы трехфазного переменного тока, связывающие мощности \dot{S}_y , задающие токи \dot{J} и напряжения узлов \dot{U} при отсутствии ЭДС в ветвях ($\dot{E} = \mathbf{0}$) имеют вид:

$$\dot{S}_{yi} = 3 \cdot \dot{U}_i \cdot \dot{J}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.84)$$

$$\mathbf{Y}_y \cdot (\dot{U} - \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n}) = \dot{J}. \quad (2.85)$$

Система нелинейных (2.84) и линейных (2.85) уравнений при заданных мощностях узлов может быть решена только итерационным методом. При этом возможны два подхода к решению:

- 1) поочередное решение уравнений (2.84) и (2.85) в общем итерационном цикле;
- 2) объединение этих уравнений в единую систему нелинейных уравнений и последующее ее решение.

В первом подходе можно использовать следующую схему расчета:

1) задаются начальные приближения напряжений узлов $\dot{U}_i = \dot{U}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$;

2) по значениям напряжений и заданным мощностям из уравнения (2.84) определяются задающие токи:

$$j_i = \frac{\dot{S}_{yi}^*}{3 \cdot \dot{U}_i^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2.86)$$

3) решается система линейных уравнений (2.85) относительно напряжений в узлах при известных значениях задающих токов (2.86) или определяются узловые напряжения путем обращения матрицы узловых проводимостей \mathbf{Y}_y по формуле:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{Y}_y^{-1} \cdot \mathbf{J}. \quad (2.87)$$

Решение системы уравнений методом обращения матрицы \mathbf{Y}_y предпочтительнее в случае не очень сложных схем замещения. Для сложных схем выгоднее использовать другие методы решения системы уравнений (2.85), например, метод Гаусса (Раздел 5.1), который более эффективен в вычислительном отношении;

4) на основе полученных значений напряжений в узлах выполняется следующий шаг итерационного процесса, начиная с пункта 2).

Условием окончания итерационного процесса является достаточно близкое совпадение соответствующих узловых напряжений на двух последовательных итерациях.

Во втором подходе уравнения (2.84) и (2.85) объединяются в одно путем подстановки задающих токов из (2.85) в (2.84), что приводит к следующей системе уравнений:

$$3 \cdot \dot{U}_i^* \cdot \sum_{j=1}^n (Y_y)_{ij} \cdot (\dot{U}_j - \dot{U}_0) = \dot{S}_{yi}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.88)$$

Система нелинейных уравнений (2.88) решается итерационными методами относительно напряжений в узлах. Применяемые на практике методы решения этих уравнений основаны на их линеаризации на каждом шаге итерационного процесса.

Далее можно определить падения напряжений в ветвях:

$$\dot{\mathbf{U}}_{\text{В}} = \mathbf{M}_t \cdot (\dot{\mathbf{U}} - \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n}), \quad (2.89)$$

токи в ветвях:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}_{\text{В}} \quad (2.90)$$

и потери мощности в ветвях:

$$\Delta \dot{S}_j = 3 \cdot \dot{U}_{\text{В}j} \cdot \dot{I}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.91)$$

где величины $\Delta \dot{S}_j$ образуют столбец потерь мощности в ветвях $\Delta \dot{\mathbf{S}}$.

Потоки мощности в ветвях можно вычислить следующим образом:

$$\dot{S}_j = 3 \cdot \dot{U}_i \cdot \dot{I}_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (2.92)$$

где величины \dot{S}_j образуют столбец потоков мощности в ветвях $\dot{\mathbf{S}}$, а \dot{U}_i – напряжение в узле i , который является начальным узлом ветви j . Индекс i может изменяться от 0 до n и определяется по столбцу j полной первой матрицы инцидентий \mathbf{M}_{Σ} , включающей балансирующий узел. Индекс i соответствует элементу +1 в столбце j матрицы \mathbf{M}_{Σ} .

Блок-схема алгоритма расчета параметров установившегося режима путем решения нелинейных узловых уравнений итерационным методом представлена на рис. 2.15.

В матрице \mathbf{M}_{Σ} каждый столбец содержит только по одной положительной и отрицательной единице, поэтому неоднозначности в определении индекса i не возникает. Например, для графа схемы замещения, изображенного на рис. 2.10, и соответствующей ему матрицы \mathbf{M}_{Σ} , представленной в выражении (2.16), имеем:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= 3 \cdot \dot{U}_0 \cdot \dot{I}_1^*, & \dot{S}_2 &= 3 \cdot \dot{U}_0 \cdot \dot{I}_2^*, & \dot{S}_3 &= 3 \cdot \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_3^*, \\ \dot{S}_4 &= 3 \cdot \dot{U}_2 \cdot \dot{I}_4^*, & \dot{S}_5 &= 3 \cdot \dot{U}_4 \cdot \dot{I}_5^*, & \dot{S}_6 &= 3 \cdot \dot{U}_0 \cdot \dot{I}_6^*. \end{aligned}$$

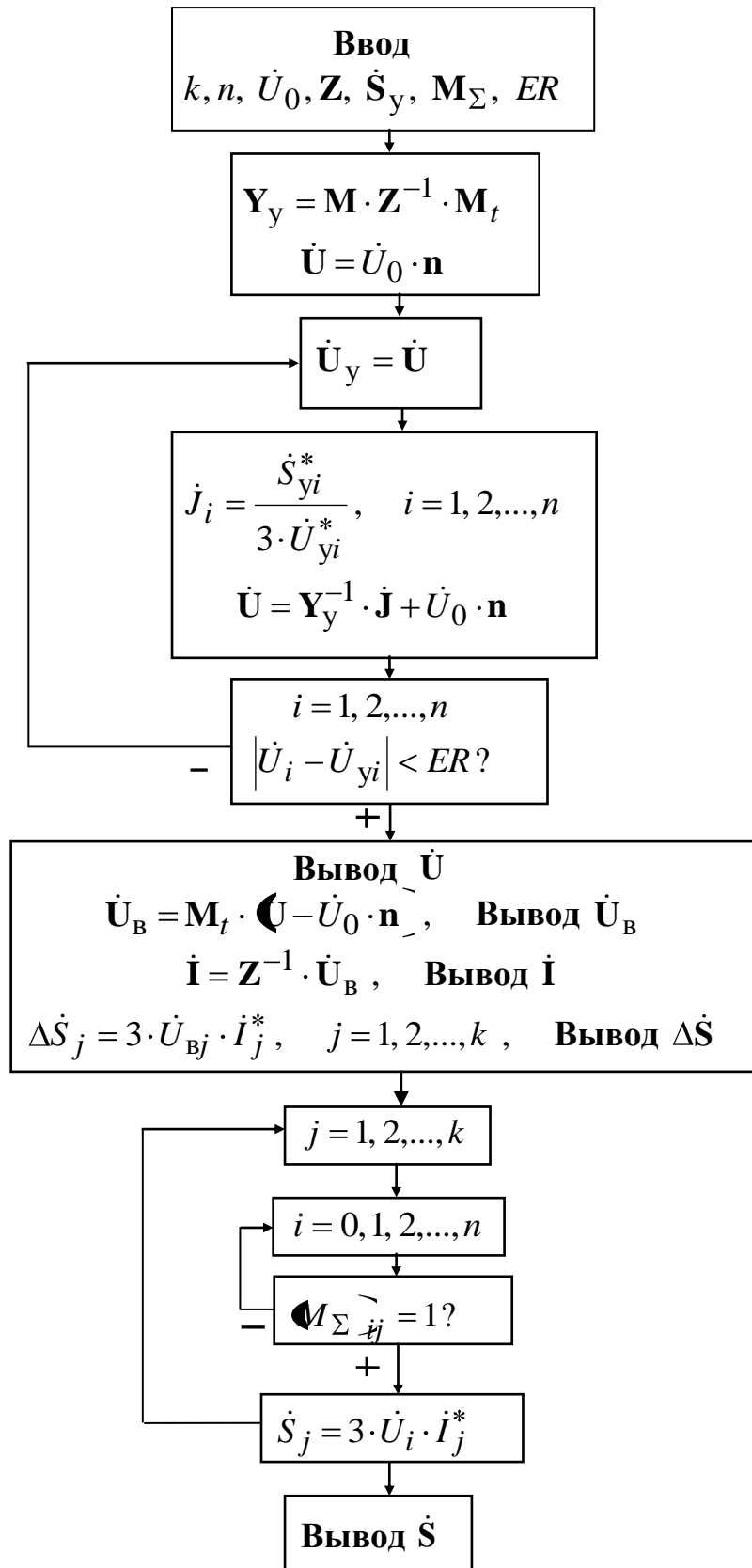


Рис. 2.15. Блок-схема алгоритма решения нелинейных узловых уравнений установившегося режима итерационным методом

Контрольные вопросы

1. Какова схема замещения источников электроэнергии?
2. Какова схема замещения потребителей электроэнергии?
3. Приведите возможные варианты схем замещения энергетической системы и объясните, чем они отличаются.
4. Что называется ветвью, узлом и контуром электрической цепи?
5. Какие ветви схемы замещения называются продольными, а какие – поперечными?
6. Какая схема замещения называется замкнутой, а какая – разомкнутой?
7. Дайте определение закона Ома для произвольного участка электрической цепи.
8. Что подразумевается под взаимным сопротивлением двух ветвей схемы замещения?
9. Приведите связь между параметрами электрической цепи при наличии взаимных сопротивлений между ветвями.
10. Сформулируйте первый закон Кирхгофа для произвольного узла электрической цепи.
11. Сформулируйте второй закон Кирхгофа для произвольного контура электрической цепи.
12. Какой узел электрической цепи называется балансирующим узлом?
13. Чему равно число независимых узлов схемы замещения?
14. Чему равно число независимых контуров схемы замещения?
15. Дайте определение графа.
16. Что называется подграфом?
17. Что такое путь графа?
18. Какой путь графа является замкнутым и образует контур?
19. Какой граф называется связанным, а какой – несвязанным?
20. Какой граф называется направленным?
21. Каким графом обычно является схема замещения электрической системы?
22. Что называется деревом графа?
23. Чему равно число ветвей, входящих в состав дерева схемы?
24. Что называется хордами графа?
25. Чему равно число хорд графа?
26. Как разбить граф на дерево и хорды?
27. Что называется первой матрицей инциденций?
28. Чем отличается полная первая матрица инциденций от первой матрицы инциденций?

29. Как составить первую матрицу инцидентий для произвольного графа схемы замещения?

30. Как можно записать первый закон Кирхгофа в матричной форме с помощью первой матрицы инцидентий?

31. Что называется второй матрицей инцидентий?

32. Как составить вторую матрицу инцидентий для произвольного графа схемы замещения?

33. Как можно записать второй закон Кирхгофа в матричной форме с помощью второй матрицы инцидентий?

34. Какова связь между падениями напряжений в ветвях схемы и напряжениями узлов?

35. Какова аналитическая связь между первой и второй матрицами инцидентий?

36. Как найти вторую матрицу инцидентий по известной первой матрице инцидентий?

37. Что представляет собой система базисных контуров и как ее определить?

38. Выведите обобщенное уравнение состояния электрической системы.

39. Как определить узловые напряжения, зная падения напряжений в ветвях схемы?

40. Приведите блок-схему алгоритма решения обобщенного уравнения состояния.

41. В чем заключается метод контурных токов?

42. Выведите матричное контурное уравнение состояния электрической системы.

43. Что называется матрицей контурных сопротивлений и как ее определить?

44. Приведите блок-схему алгоритма метода контурных токов.

45. В чем состоит метод узловых напряжений?

46. Выведите матричное узловое уравнение состояния электрической системы.

47. Что называется матрицей узловых проводимостей и как она определяется?

48. Приведите блок-схему алгоритма метода узловых напряжений.

49. Как образуются нелинейные уравнения состояния электрической системы?

50. Каким образом решаются нелинейные уравнения состояния?

51. Приведите блок-схему алгоритма решения нелинейных узловых уравнений электрической системы итерационным методом.

ГЛАВА 3. КОРОТКИЕ ЗАМЫКАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

3.1. Виды коротких замыканий, их причины и последствия

Короткое замыкание – это замыкание, при котором токи в ветвях электроустановки, примыкающих к месту его возникновения, резко возрастают, превышая наибольший допустимый ток установившегося режима. Оно происходит из-за случайного или преднамеренного электрического соединения различных точек электроустановки между собой или с землей.

Причинами коротких замыканий являются нарушения изоляции, вызванные:

- 1) перенапряжениями (особенно в сетях с незаземленными нейтралью);
- 2) прямыми ударами молнии;
- 3) старением изоляции;
- 4) механическими повреждениями.

Последствиями коротких замыканий являются:

- 1) механические и термические повреждения оборудования;
- 2) снижение уровня напряжения в сети, ведущее к уменьшению вращающего момента электродвигателей, их торможению или даже полной остановке;
- 3) возгорание в электроустановках.

В трехфазных системах с заземленной нейтралью различают следующие виды коротких замыканий в одной точке:

- 1) трехфазное короткое замыкание;
- 2) двухфазное короткое замыкание;
- 3) однофазное короткое замыкание на землю;
- 4) двухфазное короткое замыкание на землю, то есть замыкание между двумя фазами с одновременным замыканием той же точки на землю.

Трехфазное короткое замыкание является симметричным, так как при нем все фазы остаются в одинаковых условиях. Все остальные виды коротких замыканий являются несимметричными. Подавляющее число коротких замыканий связано с замыканием на землю. Трехфазное короткое замыкание является очень редким. Однако изучение процесса трехфазного короткого замыкания важно в связи с тем, что расчет токов и напряжений прямой последовательности любого несимметричного короткого

замыкания можно свести к расчету соответствующих величин некоторого условного трехфазного короткого замыкания. Кроме того, процесс включения любого трехфазного приемника, невозбужденного синхронного генератора или двигателя можно рассматривать как трехфазное короткое замыкание за некоторым сопротивлением. Наконец, в процессе развития аварии первоначально несимметричное короткое замыкание часто переходит в трехфазное симметричное короткое замыкание.

Расчеты токов короткого замыкания необходимы для:

- 1) сопоставления, оценки и выбора главных схем соединений электростанций и подстанций;
- 2) выбора электрических аппаратов;
- 3) проектирования и настройки устройств релейной защиты и автоматики;
- 4) проектирования заземляющих устройств;
- 5) выбора разрядников;
- 6) анализа устойчивости работы энергосистем.

Для упрощения расчетов токов короткого замыкания обычно принимают следующие допущения, которые приводят к погрешностям расчетов, не превышающих $5 \div 10\%$:

- 1) отсутствие качаний генераторов (то есть в процессе короткого замыкания роторы генераторов вращаются синхронно);
- 2) линейность всех элементов схемы (то есть не учитывается насыщение магнитных систем);
- 3) приближенный учет нагрузок (все нагрузки представляются в виде постоянных индуктивных сопротивлений);
- 4) пренебрежение активными сопротивлениями элементов схемы;
- 5) пренебрежение распределенной емкостью электрических линий;
- 6) пренебрежение током намагничивания трансформаторов.

При коротком замыкании возникает переходный электромеханический процесс. В инженерных расчетах чаще всего требуется знание величины тока короткого замыкания в начальный момент возмущения и в момент начала расхождения контактов выключателя. Эти данные необходимы для проверки электрических аппаратов на термическую и динамическую стойкость и для проверки выключателей на отключающую способность. Ток в начальный момент возмущения называют сверхпереходным. Для его расчета в электрической схеме замещения используются сверхпереходные значения ЭДС и сопротивлений генераторов, а также крупных электродвигателей вблизи места короткого замыкания.

Мы рассмотрим алгоритм расчета трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения. В качестве расчетной модели служит электрическая цепь с заданными параметрами сопротивлений и ЭДС. При этом нагрузочными ветвями пренебрегают и схему замещения считают линейной. Кроме того, пренебрегают также активными сопротивлениями, поэтому имеют дело с вещественными величинами. Для расчета применяют либо метод эквивалентирования схемы замещения, либо метод узловых напряжений и метод наложения. При исследовании электрической сети, содержащей различные напряжения (то есть несколько трансформаторов), удобно привести параметры к основной ступени напряжения. Для этого используют либо систему именованных единиц, либо систему относительных единиц.

В системе именованных единиц производится пересчет параметров всех ступеней напряжения, кроме выбранной основной, с помощью коэффициентов трансформации. Если идти по схеме в направлении от основной ступени напряжения, то коэффициент трансформации K подсчитывается как отношение напряжения предыдущей ступени к напряжению последующей ступени:

$$K_i = \frac{U_{i-1}}{U_i}. \quad (3.1)$$

Параметры n -ой ступени напряжения пересчитываются по формулам:

– напряжение n -ой ступени:

$$U_n^{\circ} = U_n \cdot K_1 \cdot K_2 \cdots K_n; \quad (3.2)$$

– ток n -ой ступени:

$$I_n^{\circ} = \frac{I_n}{K_1 \cdot K_2 \cdots K_n}; \quad (3.3)$$

– сопротивление n -ой ступени:

$$Z_n^{\circ} = Z_n \cdot K_1^2 \cdot K_2^2 \cdots K_n^2. \quad (3.4)$$

В системе относительных единиц в качестве базисных параметров основной ступени напряжения принимают базисную мощность $S_{\text{б}}$ и базисное напряжение $U_{\text{б1}}$.

Тогда базисные ток и сопротивление подсчитываются по формулам:

$$I_{\bar{6}1} = \frac{S_{\bar{6}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\bar{6}1}}, \quad (3.5)$$

$$Z_{\bar{6}1} = \frac{U_{\bar{6}1}^2}{S_{\bar{6}}}. \quad (3.6)$$

Затем на каждой ступени напряжения подсчитываются соответствующие базисные значения параметров:

– базисное напряжение на n -ой ступени:

$$U_{\bar{6}n} = \frac{U_{\bar{6}1}}{K_1 \cdot K_2 \cdots K_n}; \quad (3.7)$$

– базисный ток на n -ой ступени:

$$I_{\bar{6}n} = I_{\bar{6}1} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdots K_n; \quad (3.8)$$

– базисное сопротивление на n -ой ступени:

$$Z_{\bar{6}n} = \frac{Z_{\bar{6}1}}{K_1^2 \cdot K_2^2 \cdots K_n^2}, \quad (3.9)$$

где K_i – коэффициенты трансформации.

После этого относительные значения параметров на n -ой ступени напряжения рассчитываются по формулам:

$$U_n^* = \frac{U_n}{U_{\bar{6}n}}, \quad (3.10)$$

$$I_n^* = \frac{I_n}{I_{\bar{6}n}}, \quad (3.11)$$

$$Z_n^* = \frac{Z_n}{Z_{\bar{6}n}}. \quad (3.12)$$

Часто в качестве базисных напряжений рекомендуют брать средние номинальные напряжения. Это равносильно замене реальных коэффициентов трансформации средними номинальными, равными отношению средних номинальных напряжений. Для инженерных расчетов такое приближение является допустимым.

3.2. Расчет токов трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения методом эквивалентирования схемы замещения

Расчет произведем для конкретного примера. Рассмотрим электростанцию, работающую на энергосистему (рис. 3.1).

Схема содержит две ступени напряжения, взаимосвязанные трансформаторами Т1 и Т2. Секционный реактор (СР) предназначен для ограничения тока короткого замыкания.

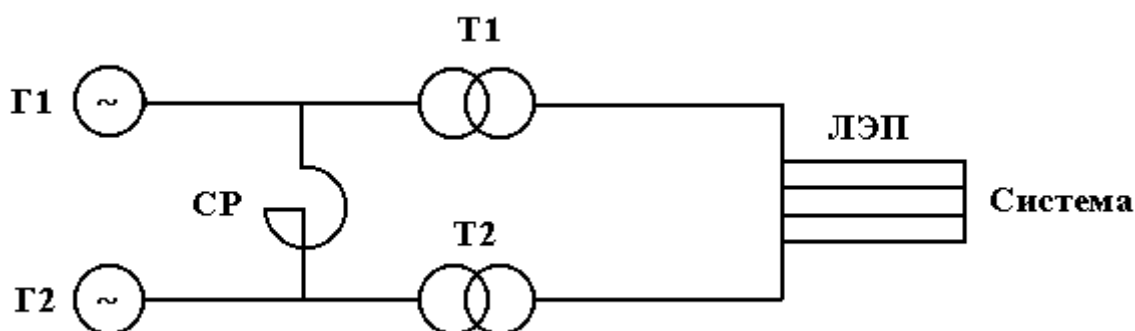


Рис. 3.1. Принципиальная электрическая схема станции

Параметры оборудования:

1) генераторы Г1 и Г2:

- ТВФ – 63;
- номинальная полная мощность $S_{\text{НГ}} = 78,75 \text{ МВ}\cdot\text{А}$;
- номинальная активная мощность $P_{\text{Н}} = 63 \text{ МВт}$;
- номинальный коэффициент мощности $\cos\varphi_{\text{Н}} = 0,8$;
- номинальное напряжение $U_{\text{Н}} = 10,5 \text{ кВ}$;
- сверхпереходное реактивное сопротивление $x'' = 0,153 \text{ о.е.}$

2) трансформаторы Т1 и Т2:

- ТДЦН – 80;
- номинальное высокое напряжение $U_{\text{ВН}} = 115 \text{ кВ}$;
- номинальное низкое напряжение $U_{\text{НН}} = 10,5 \text{ кВ}$;
- напряжение короткого замыкания $U_{\text{КЗ}} = 10,5\%$;
- номинальная полная мощность трансформатора $S_{\text{НТ}} = 80 \text{ МВ}\cdot\text{А}$

3) секционный реактор СР:

- РБГ – 10 – 1600 – 0,35;
- номинальное напряжение реактора $U_{\text{НР}} = 10 \text{ кВ}$;
- реактивное сопротивление реактора $x_{\text{Р}} = 0,35 \text{ Ом}$;
- номинальный ток реактора $I_{\text{НР}} = 1600 \text{ А}$.

- 4) четырехцепная линия электропередачи ЛЭП:
 – удельное реактивное сопротивление одной линии $x_0 = 0,4 \text{ Ом/км}$;
 – длина линии $l = 80 \text{ км}$.
- 5) система:
 – напряжение системы $U_c = 110 \text{ кВ}$;
 – мощность короткого замыкания системы $S_{кз} = 5000 \text{ МВ}\cdot\text{А}$.

Рассчитаем ток короткого замыкания в начале линии. Исходная схема замещения показана на рис. 3.2.

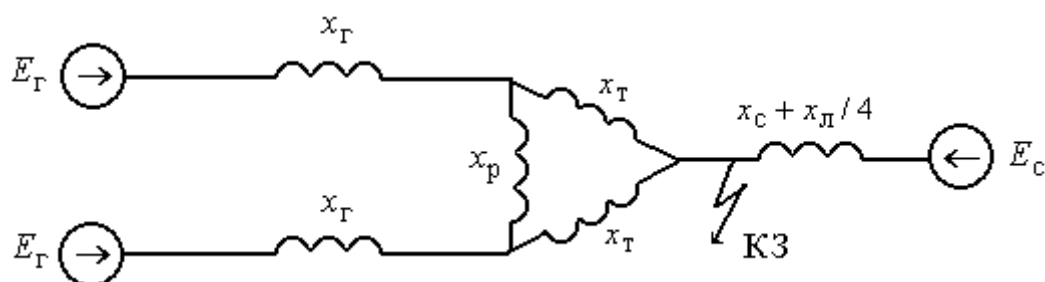


Рис. 3.2. Исходная электрическая схема замещения

Метод эквивалентирования схемы замещения заключается в «свертывании» ее к точке короткого замыкания. Сначала преобразуем соединение «треугольником» в соединение «звездой». Получим эквивалентную схему, показанную на рис. 3.3.

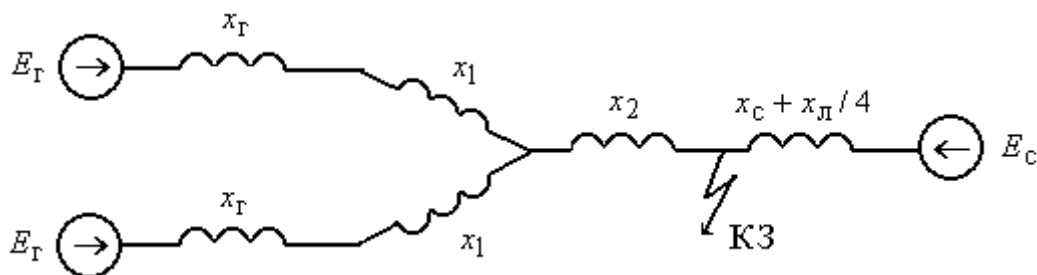


Рис. 3.3. Преобразованная схема замещения

Сопротивления x_1 и x_2 равны:

$$x_1 = \frac{x_T \cdot x_P}{x_P + 2 \cdot x_T}, \quad (3.13)$$

$$x_2 = \frac{x_T^2}{x_P + 2 \cdot x_T}. \quad (3.14)$$

Используя понятие об «эквивалентном генераторе», окончательно получаем расчетную схему замещения, представленную на рис. 3.4.

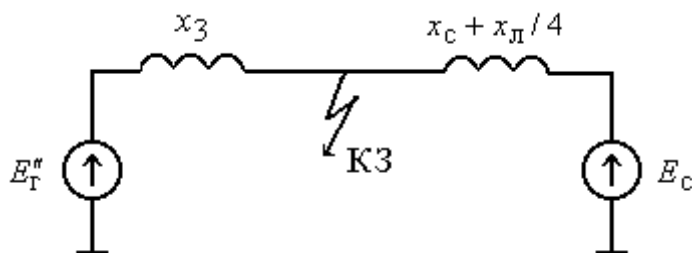


Рис. 3.4. Эквивалентная схема замещения для расчета тока короткого замыкания в начале линии

Сопротивление x_3 преобразованной схемы замещения равно:

$$x_3 = \frac{x_G + x_1}{2} + x_2 = \frac{x_G}{2} + \frac{x_1 + 2 \cdot x_2}{2} = \frac{x_G}{2} + \frac{x_T \cdot x_p + 2 \cdot x_T^2}{2 \cdot (x_p + 2 \cdot x_T)} = \frac{x_G + x_T}{2}. \quad (3.15)$$

Таким образом, сопротивление реактора x_p не входит в эквивалентную схему замещения. Этого следовало ожидать, поскольку секционный реактор предназначен для ограничения токов несимметричных коротких замыканий, а в нормальном режиме или при симметричном коротком замыкании, которое мы рассматриваем, ток через него не течет.

Рассчитаем теперь ток короткого замыкания в именованной системе единиц. За основную ступень напряжения примем генераторное распределительное устройство. Тогда с учетом коэффициента трансформации

$$K = \frac{U_{\text{НН}}}{U_{\text{ВН}}} \quad (3.16)$$

получим следующие значения приведенных реактивных сопротивлений отдельных элементов:

– для генераторов:

$$x_G^{\circ} = \frac{x'' \cdot U_{\text{Н}}^2}{S_{\text{НГ}}} = \frac{0,153 \cdot 10,5^2}{78,75} \approx 0,214 \text{ Ом}; \quad (3.17)$$

– для трансформаторов:

$$x_T^{\circ} = \frac{U_{\text{КЗ}} \cdot U_{\text{ВН}}^2 \cdot K^2}{100 \cdot S_{\text{НГ}}} = \frac{U_{\text{КЗ}} \cdot U_{\text{НН}}^2}{100 \cdot S_{\text{НГ}}} = \frac{10,5 \cdot 10,5^2}{100 \cdot 80} \approx 0,145 \text{ Ом}; \quad (3.18)$$

– для одной линии:

$$x_{\text{л}}^{\circ} = x_0 \cdot l \cdot K^2 = 0,4 \cdot 80 \cdot \left(\frac{10,5}{115} \right)^2 \approx 0,267 \text{ Ом}; \quad (3.19)$$

– для системы:

$$x_{\text{с}}^{\circ} = \frac{U_{\text{ВН}}^2 \cdot K^2}{S_{\text{КЗ}}} = \frac{U_{\text{НН}}^2}{S_{\text{КЗ}}} = \frac{10,5^2}{5000} \approx 0,022 \text{ Ом}. \quad (3.20)$$

Подсчитаем ЭДС системы

$$E_{\text{с}}^{\circ} = \frac{U_{\text{с}} \cdot K}{\sqrt{3}} = \frac{110 \cdot 10,5}{\sqrt{3} \cdot 115} \approx 5,805 \text{ кВ} \quad (3.21)$$

и номинальный ток генератора

$$I_{\text{Н}}^{\circ} = \frac{S_{\text{НГ}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{Н}}} = \frac{78,75}{\sqrt{3} \cdot 10,5} \approx 4,335 \text{ кА}. \quad (3.22)$$

Для начального момента возмущения фазную ЭДС генератора можно найти из векторной диаграммы для номинального режима (рис. 3.5):

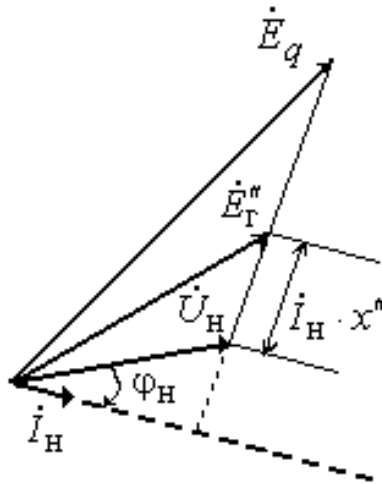


Рис. 3.5. Векторная диаграмма синхронной машины для номинального режима:

E_q – синхронная ЭДС, $U_{\text{Н}}$ – номинальное напряжение, $I_{\text{Н}}$ – номинальный ток,

x'' – сверхпереходное сопротивление, E_T'' – сверхпереходная ЭДС,

$\varphi_{\text{Н}}$ – номинальный угол мощности

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{E}_T'' &= \sqrt{\left(\frac{\overset{\circ}{U}_H}{\sqrt{3}} + \overset{\circ}{I}_H \cdot \overset{\circ}{x}_T \cdot \sin \varphi_H \right)^2 + \left(\overset{\circ}{I}_H \cdot \overset{\circ}{x}_T \cdot \cos \varphi_H \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{10,5}{\sqrt{3}} + 4,335 \cdot 0,214 \cdot 0,6 \right)^2 + \left(4,335 \cdot 0,214 \cdot 0,8 \right)^2} \approx 6,66 \text{ кВ.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

В соответствии с эквивалентной схемой замещения (рис. 3.4) приведенный ток короткого замыкания от системы –

$$\overset{\circ}{I}_C = \frac{\overset{\circ}{E}_C}{\overset{\circ}{x}_C + \frac{\overset{\circ}{x}_D}{4}} = \frac{5,805}{0,0888} \approx 65,37 \text{ кА}, \quad (3.24)$$

а сверхпереходный приведенный ток короткого замыкания от генератора –

$$\overset{\circ}{I}_T'' = \frac{2 \cdot \overset{\circ}{E}_T''}{\overset{\circ}{x}_T + \overset{\circ}{x}_T} = \frac{2 \cdot 6,66}{0,214 + 0,145} \approx 37,1 \text{ кА}. \quad (3.25)$$

Реальный сверхпереходный ток короткого замыкания в начале линии:

$$\overset{\circ}{I}_{КЗ}'' = (\overset{\circ}{I}_C + \overset{\circ}{I}_T'') \cdot K = (65,37 + 37,1) \cdot \frac{10,5}{115} \approx 9,356 \text{ кА}. \quad (3.26)$$

Проведем теперь расчет тока короткого замыкания в начале линии в относительных единицах. В качестве базисных параметров основной ступени напряжения примем:

$$S_{\bar{0}} = S_{КЗ} = 5000 \text{ МВ} \cdot \text{А}, \quad U_{\bar{0}1} = U_H = 10,5 \text{ кВ}. \quad (3.27)$$

Вычислим базисный ток и сопротивление:

$$\overset{\circ}{I}_{\bar{0}1} = \frac{S_{\bar{0}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\bar{0}1}} = \frac{S_{КЗ}}{\sqrt{3} \cdot U_H} = \frac{5000}{\sqrt{3} \cdot 10,5} \approx 275,25 \text{ кА}, \quad (3.28)$$

$$Z_{\bar{0}1} = \frac{U_{\bar{0}1}^2}{S_{\bar{0}}} = \frac{U_H^2}{S_{КЗ}} = \frac{10,5^2}{5000} \approx 0,022 \text{ Ом}. \quad (3.29)$$

Базисные параметры на второй ступени напряжения:

– базисное напряжение:

$$U_{\delta 2} = \frac{U_{\delta 1}}{K} = \frac{U_{\text{Н}} \cdot U_{\text{ВН}}}{U_{\text{НН}}} = U_{\text{ВН}} = 115 \text{ кВ}; \quad (3.30)$$

– базисный ток:

$$I_{\delta 2} = I_{\delta 1} \cdot K = 275,25 \cdot \frac{10,5}{115} \approx 25,13 \text{ кА}; \quad (3.31)$$

– базисное сопротивление:

$$Z_{\delta 2} = \frac{Z_{\delta 1}}{K^2} = 0,022 \cdot \left(\frac{115}{10,5} \right)^2 \approx 2,64 \text{ Ом}. \quad (3.32)$$

Параметры схемы замещения с учетом выбранных базисных величин:

– для генераторов:

$$x_{\Gamma*} = \frac{x_{\Gamma}}{Z_{\delta 1}} = \frac{x'' \cdot U_{\text{Н}}^2}{S_{\text{НГ}} \cdot Z_{\delta 1}} = \frac{0,153 \cdot 10,5^2}{78,75 \cdot 0,022} \approx 9,736 \text{ о.е.}; \quad (3.33)$$

– для трансформаторов:

$$x_{\text{T}*} = \frac{x_{\text{T}}}{Z_{\delta 2}} = \frac{U_{\text{КЗ}} \cdot U_{\text{ВН}}^2}{100 \cdot S_{\text{НГ}} \cdot Z_{\delta 2}} = \frac{10,5 \cdot 115^2}{100 \cdot 80 \cdot 2,64} \approx 6,575 \text{ о.е.}; \quad (3.34)$$

– для линии электропередачи:

$$x_{\text{Л}*} = \frac{x_{\text{Л}}}{Z_{\delta 2}} = \frac{x_0 \cdot l}{Z_{\delta 2}} = \frac{0,4 \cdot 80}{2,64} \approx 12,12 \text{ о.е.}; \quad (3.35)$$

– для системы:

$$x_{\text{С}*} = \frac{x_{\text{С}}}{Z_{\delta 2}} = \frac{U_{\text{ВН}}^2}{S_{\text{КЗ}} \cdot Z_{\delta 2}} = \frac{115^2}{5000 \cdot 2,64} \approx 1 \text{ о.е.}, \quad (3.36)$$

$$E_{\text{С}*} = \frac{U_{\text{С}}}{U_{\delta 2}} = \frac{110}{115} \approx 0,956 \text{ о.е.} \quad (3.37)$$

ЭДС генератора для начального момента возмущения в относительных единицах:

$$E_{\Gamma}'' = \sqrt{\left(E_{\Gamma} + x'' \cdot \sin \varphi_H \right)^2 + \left(E_{\Gamma}'' \cdot \cos \varphi_H \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 + 0,153 \cdot 0,6 \right)^2 + \left(0,153 \cdot 0,8 \right)^2} \approx 1,0986 \text{ о.е.} \quad (3.38)$$

Ток короткого замыкания от системы:

$$I_{\text{с}} = \frac{E_{\text{с}}}{x_{\text{л}} + \frac{x_{\text{с}}}{4}} = \frac{0,956}{4,032} \approx 0,237 \text{ о.е.} \quad (3.39)$$

Сверхпереходный ток от генератора:

$$I_{\Gamma}'' = \frac{2 \cdot E_{\Gamma}''}{x_{\Gamma} + x_{\text{T}}} = \frac{2 \cdot 1,0986}{16,311} \approx 0,135 \text{ о.е.} \quad (3.40)$$

Реальный сверхпереходный ток короткого замыкания в начале линии:

$$I_{\text{кз}}'' = (I_{\text{с}} + I_{\Gamma}'') \cdot I_{\text{б2}} = (0,237 + 0,135) \cdot 25,13 \approx 9,348 \text{ кА.} \quad (3.41)$$

Различие в значениях тока короткого замыкания, вычисленных двумя методами, составляет 8 А, что вполне допустимо.

3.3. Расчет токов трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения методом узловых напряжений и методом наложения

Расчет начинается с составления схемы замещения и выбора балансирующего узла. Для расчета параметров схемы замещения обычно используют систему относительных единиц. Топология графа схемы замещения задается с помощью первой матрицы инцидентий \mathbf{M} размерностью $n \times k$, где n – число независимых узлов (без балансирующего), а k – число ветвей в схеме замещения. Параметры

схемы замещения представляются квадратной матрицей сопротивлений ветвей \mathbf{Z} порядка k и столбцом ЭДС в ветвях $\dot{\mathbf{E}}$. Вследствие пренебрежения активными сопротивлениями все величины являются вещественными, а из-за приближенного учета нагрузок задающие токи в узлах \dot{J}_i полагаются равными нулю. Поэтому исходным уравнением для расчета предшествующего короткому замыканию установившегося режима согласно методу узловых напряжений является следующее матричное уравнение:

$$\dot{\mathbf{U}}_y = \mathbf{Y}_y^{-1} \cdot \dot{\mathbf{J}}_y, \quad (3.42)$$

где $\dot{\mathbf{U}}_y = \dot{\mathbf{U}} - \dot{U}_0 \cdot \mathbf{n}$ – столбец узловых напряжений относительно напряжения балансирующего узла \dot{U}_0 , \mathbf{Y}_y – матрица узловых проводимостей, определяемая по формуле:

$$\mathbf{Y}_y = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{M}_t, \quad (3.43)$$

а $\dot{\mathbf{J}}_y$ – столбец «приведенных» задающих токов в узлах, равный (при $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$):

$$\dot{\mathbf{J}}_y = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.44)$$

Допустим, что в некотором узле i произошло трехфазное короткое замыкание. Распределение напряжений в узлах и токов в ветвях изменится, причем относительное напряжение в узле i станет равным нулю, то есть

$$\dot{U}'_{yi} = 0. \quad (3.45)$$

Для расчета нового распределения узловых напряжений удобно использовать метод наложения. Его применение позволяет построить единый алгоритм расчета токов при коротком замыкании в любом узле схемы замещения без необходимости сворачивания (эквивалентирования) ее к этому узлу.

Метод наложения состоит в представлении результата действия короткого замыкания в i -ом узле как суммы нормального и аварийного режимов. Режим короткого замыкания в узле i можно рассматривать как наложение предшествующего нормального режима и режима

включения в узел i ЭДС, по знаку обратной, а по величине равной напряжению в узле i до короткого замыкания (рис. 3.6). При этом в других узлах аварийного режима относительные напряжения полагаются равными нулю.

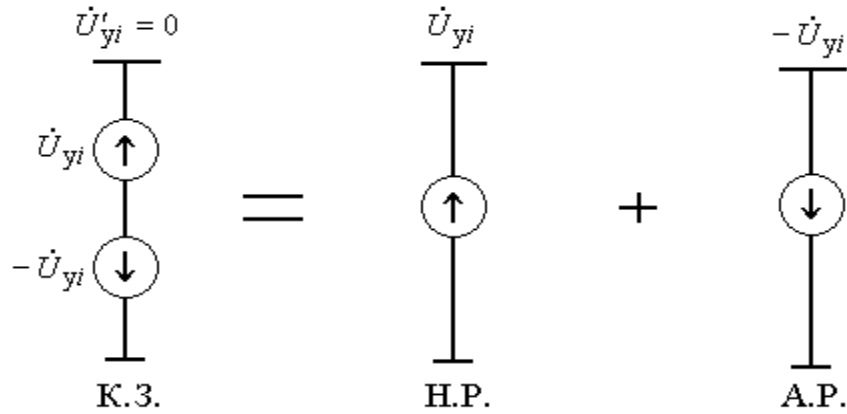


Рис. 3.6. Иллюстрация метода наложения

Уравнение узловых напряжений с учетом короткого замыкания в i -ом узле согласно методу наложения запишем в виде:

$$\dot{\mathbf{U}}'_y = \mathbf{Y}_y^{-1} \cdot (\mathbf{J}_y - \mathbf{J}^{\text{КЗ}}) = \dot{\mathbf{U}}_y - (\mathbf{Y}_y^{-1})_i \cdot j_i^{\text{КЗ}}, \quad (3.46)$$

где $j_i^{\text{КЗ}}$ – ток короткого замыкания в i -ом узле, символ $(\mathbf{Y}_y^{-1})_i$ обозначает i -ый столбец обратной матрицы узловых проводимостей \mathbf{Y}_y^{-1} , $\mathbf{J}^{\text{КЗ}}$ – столбец, i -ый элемент которого равен $j_i^{\text{КЗ}}$, а остальные элементы равны нулю.

Поскольку при коротком замыкании в узле i справедливо равенство (3.45), то из выражения (3.46) следует, что

$$j_i^{\text{КЗ}} = \frac{\dot{U}_{yi}}{(\mathbf{Y}_y^{-1})_{ii}}, \quad (3.47)$$

где $(\mathbf{Y}_y^{-1})_{ii}$ – ii -ый элемент матрицы \mathbf{Y}_y^{-1} . Подставляя (3.47) в (3.46), получаем новое распределение узловых напряжений:

$$\dot{\mathbf{U}}'_y = \dot{\mathbf{U}}_y - \frac{\dot{U}_{yi} \cdot (\mathbf{Y}_y^{-1})_i}{(\mathbf{Y}_y^{-1})_{ii}}. \quad (3.48)$$

Блок-схема алгоритма расчета токов короткого замыкания методом узловых напряжений и методом наложения представлена на рис. 3.7.



Рис. 3.7. Блок-схема алгоритма расчета токов трехфазного короткого замыкания методом узловых напряжений и методом наложения

Падения напряжений и токи в ветвях схемы замещения при новом распределении узловых напряжений можно найти из соотношений:

$$\dot{U}'_B = M_t \cdot \dot{U}'_y, \quad (3.49)$$

$$\dot{I}' = Z^{-1} \cdot (\dot{U}'_B + \dot{E}). \quad (3.50)$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа ток короткого замыкания в узле i можно найти по формуле:

$$j_i^{кз} = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{I}')_i. \quad (3.51)$$

Рассмотрим пример расчета уровней токов короткого замыкания на шинах электростанции (рис. 3.8), соединенной с системой четырьмя воздушными линиями электропередачи (ЛЭП). В распределительном устройстве генераторного напряжения установлен секционный реактор (СР). Распределительные устройства высокого и генераторного напряжения связаны трансформаторами Т1 и Т2. Параметры оборудования выберем те же, что и в разделе 3.2.

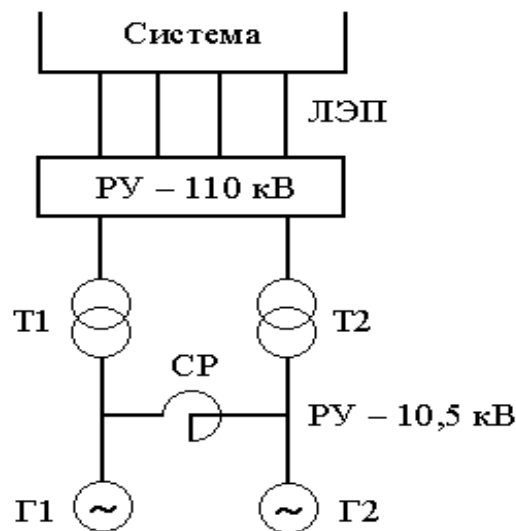


Рис. 3.8. Принципиальная схема электростанции

Расчет будем вести в системе относительных единиц. В качестве базисной мощности примем мощность короткого замыкания системы $S_{\bar{0}} = 5000$ МВ·А, а в качестве базисных напряжений – средние номинальные напряжения ступеней $U_{\bar{0}1} = 115$ кВ и $U_{\bar{0}2} = 10,5$ кВ. Тогда базисные токи:

$$I_{\bar{0}1} = \frac{S_{\bar{0}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\bar{0}1}} = \frac{5000}{\sqrt{3} \cdot 115} \approx 25,1 \text{ кА}, \quad (3.52)$$

$$I_{\bar{0}2} = \frac{S_{\bar{0}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\bar{0}2}} = \frac{5000}{\sqrt{3} \cdot 10,5} \approx 274,93 \text{ кА}. \quad (3.53)$$

Подготовим исходные данные, отнесенные к базисным значениям:

– сверхпереходная ЭДС генератора:

$$E_{Г*}'' = \sqrt{E_{Г*}'' \cdot \sin \varphi_{Н*}^2 + E_{Г*}'' \cdot \cos \varphi_{Н*}^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 0,153 \cdot 0,6^2 + 1,153 \cdot 0,8^2} \approx 1,0986 \text{ о.е.}; \quad (3.54)$$

– сверхпереходное сопротивление генератора:

$$x_{Г*}'' = \frac{x'' \cdot S_{\sigma}}{S_{НГ}} = \frac{0,153 \cdot 5000}{78,75} \approx 9,714 \text{ о.е.}; \quad (3.55)$$

– сопротивление реактора:

$$x_{р*} = \frac{x_{р} \cdot S_{\sigma}}{U_{\sigma 1}^2} = \frac{0,35 \cdot 5000}{10,5^2} \approx 15,873 \text{ о.е.}; \quad (3.56)$$

– сопротивление трансформатора:

$$x_{Т*} = \frac{U_{кз} \cdot S_{\sigma}}{100 \cdot S_{НТ}} = \frac{10,5 \cdot 5000}{100 \cdot 80} \approx 6,563 \text{ о.е.}; \quad (3.57)$$

– сопротивление одной линии электропередачи:

$$x_{Л*} = \frac{x_0 \cdot l \cdot S_{\sigma}}{U_{\sigma 2}^2} = \frac{0,4 \cdot 80 \cdot 5000}{115^2} \approx 12,098 \text{ о.е.}; \quad (3.58)$$

– сопротивление системы:

$$x_{с*} = \frac{S_{\sigma}}{S_{кз}} = 1 \text{ о.е.}; \quad (3.59)$$

– ЭДС системы:

$$E_{с*} = \frac{U_{ВН}}{U_{\sigma 2}} = \frac{115}{115} = 1 \text{ о.е.}; \quad (3.60)$$

В качестве балансирующего узла выберем распределительное устройство высокого напряжения, связывающее электростанцию с системой. Строго говоря, в схеме замещения рассматриваемой электрической системы должно быть 6 ветвей ($k = 6$), 5 независимых узлов ($n = 5$) и один контур ($l = 1$). Однако начальные узлы генераторных ветвей являются узлом нейтрали, имеющей нулевой потенциал, поэтому эти узлы можно исключить из схемы.

В результате граф схемы замещения приобретает вид, показанный на рис. 3.9.

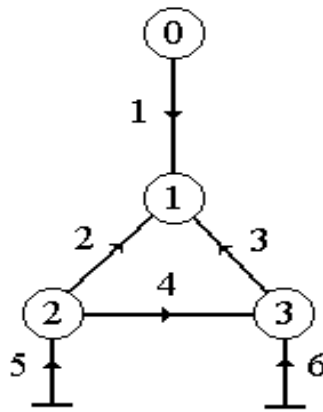


Рис. 3.9. Граф расчетной схемы замещения электрической системы

Составим первую матрицу инцидентий для данного графа:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Параметры схемы замещения представим в виде матрицы сопротивления ветвей и столбца ЭДС в ветвях:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_{\text{Л}} & & & & & \\ x_{\text{С}} + \frac{*}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & & & & & \\ 0 & x_{\text{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & & & & \\ 0 & 0 & x_{\text{T}} & 0 & 0 & 0 \\ & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_{\text{Р}} & 0 & 0 \\ & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\text{Г}} & 0 \\ & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{\text{Г}} \\ & * & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,024 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,563 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,563 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15,873 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,714 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_c \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E'_T \\ * \\ E'_T \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0986 \\ 1,0986 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Расчет токов короткого замыкания выполнялся в соответствии с блок-схемой алгоритма на рис. 3.7 с помощью программы MathCad.

Результаты расчета:

1) короткое замыкание в узле 1:

$$\mathbf{I}'_1 = \mathbf{Q},2485 \quad 0,0675 \quad 0,0675 \quad 0 \quad 0,0675 \quad 0,0675 \rceil,$$

$$J_1^{K3} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{I}'_1 = \mathbf{I} \left[0,2485 \cdot \mathbf{e}_{11} + 0,0675 \cdot \mathbf{e}_{12} + 0,0675 \cdot \mathbf{e}_{13} \right] \cdot 25,1 \approx 9,626 \text{ кА};$$

2) короткое замыкание в узле 2:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{Q},0919 \quad -0,096 \quad 0,0041 \quad -0,0414 \quad 0,1131 \quad 0,0455 \rceil,$$

$$J_2^{K3} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{I}'_2 = \mathbf{I} \left[0,096 \cdot 1 + 0,0414 \cdot 1 - 0,1131 \cdot \mathbf{e}_{11} \right] \cdot 274,93 \approx 68,867 \text{ кА};$$

3) короткое замыкание в узле 3:

$$\mathbf{I}'_3 = \mathbf{Q},0919 \quad 0,0041 \quad -0,096 \quad 0,0414 \quad 0,0455 \quad 0,1131 \rceil,$$

$$J_3^{K3} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{I}'_3 = \mathbf{I} \left[0,096 \cdot 1 - 0,0414 \cdot \mathbf{e}_{11} - 0,1131 \cdot \mathbf{e}_{12} \right] \cdot 274,93 \approx 68,867 \text{ кА}.$$

Здесь токи в ветвях приведены в относительных единицах, а узловые токи короткого замыкания преобразуются в именованные.

3.4. Определение тока короткого замыкания в заданный момент времени методом типовых кривых

Особенность переходного процесса при коротком замыкании в электрической цепи, содержащей синхронные машины, заключается в том, что параметры генераторов x_T и E_T не остаются постоянными, а меняются во времени и характер их изменения аналитически найти

непросто. Сказывается влияние форсировки возбуждения, изменение частоты вращения ротора генератора и так далее. Поэтому в Московском энергетическом институте на основании многочисленных расчетов на ЭВМ по уравнениям Парка-Горева (см. раздел 4.5) был разработан эффективный практический метод типовых кривых, позволяющий рассчитать ток в произвольный момент времени переходного процесса. Метод типовых кривых основан на использовании кривых изменения во времени отношения тока короткого замыкания от генератора в произвольный момент времени к начальному значению этого тока при различных удаленностях точки короткого замыкания. По найденному начальному току короткого замыкания методом типовых кривых можно определить периодическую и апериодическую составляющие тока короткого замыкания в момент расхождения дугогасительных контактов выключателя, необходимые для выбора высоковольтного выключателя.

Типовые кривые позволяют определить изменение токов короткого замыкания за время до 3 с от начала переходного процесса, так как для выбора современных высоковольтных выключателей и для ряда других случаев необходимо знать токи именно в этот промежуток времени. При построении типовых кривых значения вычисленных токов короткого замыкания генераторов для различных моментов времени $I_{Гt}$ отнесены к начальным сверхпереходным токам генератора, которые могут быть вычислены либо методом эквивалентирования схемы замещения, либо методом узловых напряжений и методом наложения, рассмотренных выше. Для учета удаленности короткого замыкания введено отношение начального тока короткого замыкания генератора $I''_{Г}$ к его номинальному току $I_{Н}$, то есть $I_{Н.Г}^* = I''_{Г} / I_{Н}$, характеризующего кратность тока короткого замыкания к номинальному току. Чем ближе короткое замыкание к генератору, тем это отношение больше.

Таким образом, типовые кривые (рис. 3.10) представляют собой семейство кривых $I_{Гt} / I''_{Г} = f(t)$ при различных значениях $I''_{Г} / I_{Н} = const$, которые характеризуют изменение тока без определения его величины.

Типовые кривые, изображенные на рис. 3.10, можно аппроксимировать полиномом восьмой степени вида:

$$\frac{I_{Гt}}{I''_{Г}} = \sum_{i=1}^8 a_i \cdot t^i . \quad (3.63)$$

Коэффициенты полинома a_i для всех восьми кривых приведены в табл. 3.1.

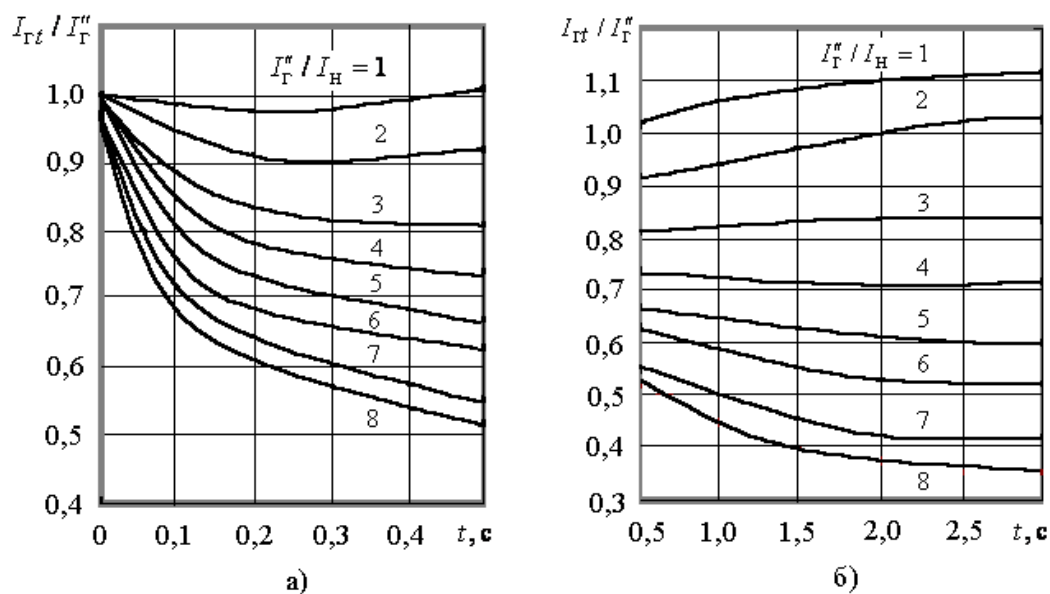


Рис. 3.10. Типовые кривые для определения периодической составляющей тока короткого замыкания от синхронных машин с тиристорной или высокочастотной системой возбуждения и синхронных компенсаторов (а – в диапазоне времени от 0 до 0,5 с, б – в диапазоне от 0,5 до 3 с)

Таблица 3.1. Коэффициенты аппроксимирующего полинома

I''_{Γ} / I_H	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1,000	-0,171	0,374	0,703	-2,247	2,273	-1,117	0,270	-0,026
2	0,999	-0,701	1,370	0,686	-4,590	5,389	-2,876	0,736	-0,073
3	0,989	-1,695	8,048	-20,870	29,738	-23,715	10,519	-2,417	0,224
4	0,991	-2,043	7,460	-15,138	17,960	-12,614	5,124	-1,106	0,098
5	0,990	-2,821	11,818	-27,535	36,395	-27,656	11,890	-2,676	0,244
6	0,979	-3,483	15,353	-35,699	46,073	-34,063	14,288	-3,151	0,283
7	0,969	-4,013	20,173	-54,170	77,996	-62,337	27,637	-6,343	0,586
8	0,958	-4,391	22,032	-58,351	83,015	-65,817	29,086	-6,644	0,613

Среднеквадратическая ошибка при аппроксимации типовых кривых полиномом (3.63) изменяется в пределах от $1,91 \cdot 10^{-5}$ до $4,25 \cdot 10^{-4}$.

Применение метода типовых кривых наиболее целесообразно в тех случаях, когда точка короткого замыкания находится у выводов генераторов (синхронных компенсаторов) или при небольшой электрической удаленности от них, например, за трансформаторами связи электростанции с энергосистемой. Использование типовых кривых возможно для турбогенераторов мощностью $12,5 \div 800$ МВт, гидрогенераторов до 500 МВт и всех крупных синхронных компенсаторов.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение короткому замыканию.
2. Каковы причины коротких замыканий?
3. Каковы последствия коротких замыканий?
4. Какие виды коротких замыканий Вы знаете и чем они отличаются?
5. Для чего необходимы расчеты токов короткого замыкания?
6. Какие допущения принимаются при расчетах токов короткого замыкания?
7. В чем заключается система именованных единиц?
8. В чем состоит система относительных единиц?
9. Как рассчитать ток трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения методом эквивалентирования схемы замещения?
10. Как рассчитать ток трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения методом узловых напряжений и методом наложения?
11. Приведите блок-схему алгоритма расчета токов короткого замыкания методом узловых напряжений и методом наложения?
12. Как определить ток короткого замыкания в заданный момент времени методом типовых кривых?

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

4.1. Переходный процесс в простейшей трехфазной цепи

На рис. 4.1 представлена схема замещения симметричной трехфазной электрической цепи при отсутствии в ней трансформаторных связей.

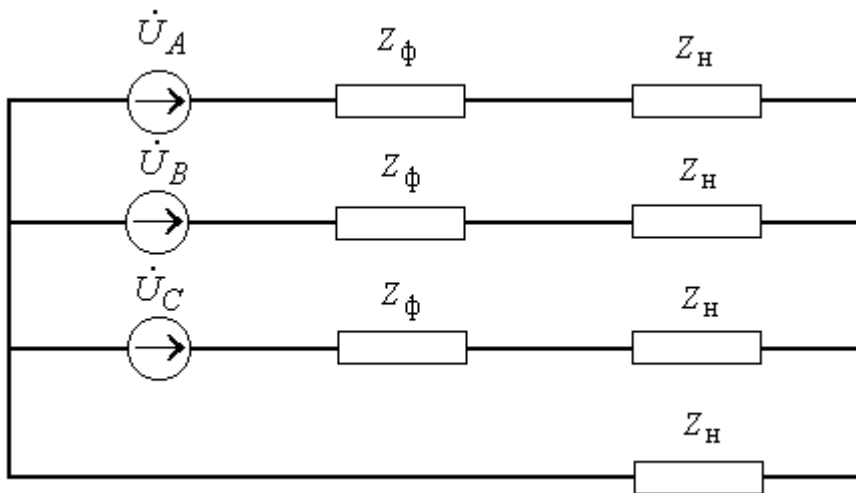


Рис. 4.1. Схема замещения простейшей трехфазной электрической цепи

Трехфазный генератор смоделирован в виде трех независимых однофазных генераторов с фазными напряжениями \dot{U}_A , \dot{U}_B и \dot{U}_C . Симметричность нагрузки достигается включением одинаковых сопротивлений Z_H между каждой фазой и нейтралью, а трехпроводная линия заменяется сопротивлениями Z_ϕ в каждом из фазных проводов. В схеме не учтены междуфазные емкости, емкости фаз линий относительно земли, а также проводимости фаз относительно земли.

Фазные напряжения на выводах генератора равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на 120° :

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0. \quad (4.1)$$

Фазные токи согласно закону Ома равны:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_\phi + Z_H}, \quad \dot{i}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_\phi + Z_H}, \quad \dot{i}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_\phi + Z_H}. \quad (4.2)$$

Вектора фазных токов образуют симметричную звезду, сдвинутую относительно звезды напряжений на угол мощности φ (рис. 4.2).

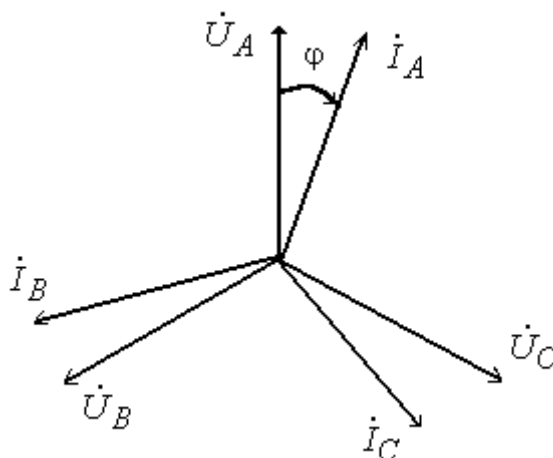


Рис. 4.2. Векторная диаграмма фазных напряжений и токов

Из симметрии параметров электрической цепи следует, что расчет можно вести для одной фазы независимо от всех остальных – например, для фазы А. Поскольку трехфазное короткое замыкание не нарушает симметрии цепи, то расчет переходного процесса в ней можно свести к расчету одной фазы (рис. 4.3). В схеме трехфазное короткое замыкание моделируется включением ключа K .

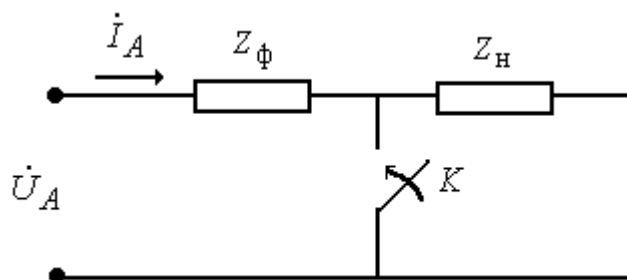


Рис. 4.3. Расчетная однофазная схема замещения

Предположим, что вблизи выводов нагрузки происходит металлическое трехфазное короткое замыкание. В момент короткого замыкания напряжение источника

$$U_A = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (4.3)$$

где φ – фаза включения. В результате коммутации в электрической цепи начинается переходный процесс, который вследствие рассеяния энергии на

активных сопротивлений с течением времени затухает. В замкнутом контуре идет процесс затухания тока до нуля, поскольку там отсутствует источник.

Рассмотрим переходный процесс в контуре с источником, где протекает ток трехфазного короткого замыкания. Запишем дифференциальное уравнение электрической цепи:

$$U_{\text{к}} = R_{\text{к}} \cdot i_{\text{к}} + L_{\text{к}} \cdot \frac{di_{\text{к}}}{dt}, \quad (4.4)$$

где $i_{\text{к}}$ – мгновенное значение тока короткого замыкания, а

$$Z_{\text{к}} = Z_{\text{ф}} = R_{\text{к}} + j \cdot \omega \cdot L_{\text{к}} \quad (4.5)$$

– полное сопротивление цепи.

Решение уравнения (4.4) находим как сумму частного решения (принужденного тока) и общего решения однородного уравнения (свободного тока) в виде:

$$i_{\text{к}} = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}. \quad (4.6)$$

Введем обозначение:

$$T_{\text{а}} = \frac{L_{\text{к}}}{R_{\text{к}}}, \quad (4.7)$$

где $T_{\text{а}}$ – это постоянная времени затухания свободного тока.

Решим сначала однородное уравнение:

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} = -\frac{R_{\text{к}} \cdot i_{\text{св}}}{L_{\text{к}}} = -\frac{i_{\text{св}}}{T_{\text{а}}}. \quad (4.8)$$

Отсюда

$$\frac{di_{\text{св}}}{i_{\text{св}}} = -\frac{dt}{T_{\text{а}}} \rightarrow \ln i_{\text{св}} = -\frac{t}{T_{\text{а}}} + \ln C$$

и

$$i_{\text{св}} = C \cdot e^{-\frac{t}{T_{\text{а}}}}. \quad (4.9)$$

Частное решение (принужденный или установившийся ток) имеет вид:

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi - \varphi_{\text{к}})}{|Z_{\text{к}}|}, \quad (4.10)$$

где

$$|Z_{\text{к}}| = \sqrt{R_{\text{к}}^2 + \omega^2 \cdot L_{\text{к}}^2}, \quad \varphi_{\text{к}} = \arctg\left(\frac{\omega \cdot L_{\text{к}}}{R_{\text{к}}}\right). \quad (4.11)$$

Значение постоянной C определяется из начальных условий при $t = 0$. До коммутации в цепи проходит ток нагрузки

$$i_{\text{н}} = \frac{U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi - \varphi_{\text{н}})}{|Z_{\text{к}} + Z_{\text{н}}|}. \quad (4.12)$$

В момент коммутации мгновенное значение тока не меняется:

$$i_{\text{к}}(0) = i_{\text{пр}}(0) + C = i_{\text{н}}(0). \quad (4.13)$$

Отсюда

$$C = i_{\text{н}}(0) - i_{\text{пр}}(0) = \frac{U_m \cdot \sin(\phi - \varphi_{\text{н}})}{|Z_{\text{к}} + Z_{\text{н}}|} - \frac{U_m \cdot \sin(\phi - \varphi_{\text{к}})}{|Z_{\text{к}}|}. \quad (4.14)$$

Окончательно мгновенное значение тока короткого замыкания определяется выражением:

$$i_{\text{к}} = i_{\text{п}} + i_{\text{а}}, \quad (4.15)$$

где

$$i_{\text{п}} = \frac{U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi - \varphi_{\text{к}})}{|Z_{\text{к}}|}, \quad (4.16)$$

$$i_{\text{а}} = \left[\frac{U_m \cdot \sin(\phi - \varphi_{\text{н}})}{|Z_{\text{к}} + Z_{\text{н}}|} - \frac{U_m \cdot \sin(\phi - \varphi_{\text{к}})}{|Z_{\text{к}}|} \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_{\text{а}}}}. \quad (4.17)$$

Здесь i_{Π} называется периодической составляющей тока короткого замыкания, а i_a – аperiodической составляющей. Значение аperiodической составляющей зависит от предшествующего режима и от фазы включения ϕ .

В реальных электрических сетях $\omega \cdot L_K \gg R_K$, поэтому $\varphi_K \approx \frac{\pi}{2}$ и условие возникновения наибольшей величины периодической составляющей тока и максимума полного тока практически совпадают (рис. 4.4).

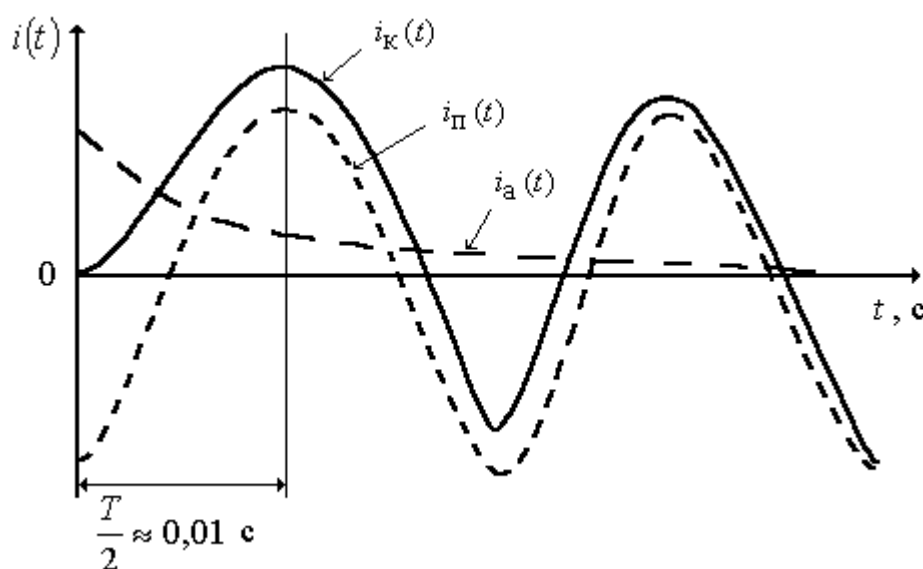


Рис. 4.4. Значение тока в фазе А как функция времени

Наибольшее значение полного тока трехфазного короткого замыкания называется ударным током. Он наступает приблизительно через полпериода, что составляет 0,01 секунду с момента возникновения короткого замыкания, то есть

$$I_{\max} = I_m + I_m \cdot e^{-\frac{0,01}{T_a}} = K_y \cdot I_m, \quad (4.18)$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{|Z_K|}, \quad (4.19)$$

$$K_y = 1 + e^{-\frac{0,01}{T_a}}. \quad (4.20)$$

Здесь I_m – амплитуда периодической составляющей тока короткого замыкания, а K_y – ударный коэффициент. $1 \leq K_y \leq 2$, что соответствует предельным значениям постоянной времени затухания аperiodической составляющей тока короткого замыкания T_a . Ударный ток I_y обычно выражают через действующее значение периодической составляющей тока короткого замыкания I_{Π} :

$$I_y = \sqrt{2} \cdot K_y \cdot I_{\Pi}. \quad (4.21)$$

Для простой неразветвленной цепи, состоящей из элементов R и L , постоянная времени затухания аperiodической составляющей

$$T_a = \frac{L}{R} = \frac{x}{\omega \cdot R}. \quad (4.22)$$

Для сложной цепи вводится эквивалентная постоянная времени

$$T_{\text{э}} = \frac{x_{\Sigma}}{\omega \cdot R_{\Sigma}}, \quad (4.23)$$

где x_{Σ} – индуктивная составляющая полного собственного сопротивления, а R_{Σ} – активная составляющая полного собственного сопротивления цепи.

При разработке устройств и систем необходимо учитывать, что параметры системы и внешние условия не бывают постоянными. Изменение их во времени приводит к возникновению в эксплуатируемых устройствах и системах переходных процессов. Поэтому для оценки работоспособности системы и установления качества ее работы в реальных условиях необходимо изучать свойства переходных процессов.

4.2. Преобразование уравнений трехфазной электрической цепи к системе координат $\alpha, \beta, 0$

При моделировании электрических цепей трехфазного переменного тока существенное влияние оказывает выбор системы координат, в которой записываются уравнения. Для трехфазной статической цепи наиболее естественно записывать уравнения в обычных фазных координатах a, b, c .

Рассмотрим участок простейшей трехфазной электрической цепи, содержащей взаимно индуктивные связи (см. рис. 1.1).

В случае симметричных фаз

$$R_a = R_b = R_c, \quad L_a = L_b = L_c = L, \quad M_{ab} = M_{ba} = M_{bc} = M_{cb} = M_{ac} = M_{ca} = M$$

и уравнения равновесия фазных напряжений (1.2) сводятся к виду:

$$\begin{cases} U_a = R \cdot i_a + L \cdot \frac{di_a}{dt} + M \cdot \left(\frac{di_b}{dt} + \frac{di_c}{dt} \right) \\ U_b = R \cdot i_b + L \cdot \frac{di_b}{dt} + M \cdot \left(\frac{di_a}{dt} + \frac{di_c}{dt} \right) \\ U_c = R \cdot i_c + L \cdot \frac{di_c}{dt} + M \cdot \left(\frac{di_a}{dt} + \frac{di_b}{dt} \right) \end{cases} \quad (4.24)$$

Фазные оси a, b, c расположены на одной плоскости под углом 120° относительно друг друга и образуют неортогональную систему координат (рис. 4.5).

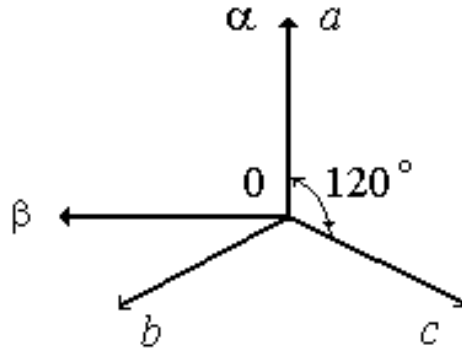


Рис. 4.5. Системы координат a, b, c и $\alpha, \beta, 0$

Моделирование электрических цепей в фазных координатах a, b, c применяется редко. Это связано, во-первых, с большим количеством уравнений, в которые входит взаимно индуктивная связь (см. уравнения (4.24)), и, во-вторых, с тем, что при объединении таких трехфазных статических моделей с моделями генераторов и двигателей с вращающимися роторами и магнитными полями получаются дифференциальные уравнения с переменными во времени коэффициентами, интегрировать которые трудно.

При моделировании статических цепей чаще применяется двухфазная ортогональная система координат $\alpha, \beta, 0$ (рис. 4.5), в которой ось 0 означает просто начало координат. Эта система, как и трехфазная

система a, b, c , неподвижна в пространстве, а потому все величины в этой системе изменяются с той же частотой, что и в исходной трехфазной системе.

Переход от системы a, b, c к системе $\alpha, \beta, 0$ является линейным преобразованием вида:

$$F_i = \sum_{j=\alpha, \beta, 0} C_{ij} \cdot F_j, \quad i = a, b, c, \quad (4.25)$$

где \mathbf{C} – матрица преобразования, а \mathbf{F} представляет любую электрическую переменную, например, фазный ток i или напряжение U .

Элементы матрицы преобразования C_{ij} представляют собой направляющие косинусы, то есть косинусы углов, составляемых осями a, b, c с осями $\alpha, \beta, 0$.

Вычислим эти направляющие косинусы:

$$\begin{cases} C_{a\alpha} = \cos 0^\circ = 1, & C_{a\beta} = \cos 90^\circ = 0, & C_{a0} = \cos 0^\circ = 1 \\ C_{b\alpha} = \cos 120^\circ = -1/2, & C_{b\beta} = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, & C_{b0} = \cos 0^\circ = 1 \\ C_{c\alpha} = \cos 120^\circ = -1/2, & C_{c\beta} = \cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2, & C_{c0} = \cos 0^\circ = 1 \end{cases}$$

Следовательно, матрица \mathbf{C} имеет вид:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Определитель матрицы \mathbf{C} не равен единице, то есть матрица \mathbf{C} не ортогональная. Это и понятно, так как эта матрица описывает переход от не ортогональной системы координат a, b, c к ортогональной системе $\alpha, \beta, 0$.

В соответствии с (4.25) связь между компонентами величины \mathbf{F} в осях a, b, c и $\alpha, \beta, 0$ есть:

$$\begin{cases} F_a = F_\alpha + F_0 \\ F_b = -\frac{1}{2} \cdot F_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot F_\beta + F_0 \\ F_c = -\frac{1}{2} \cdot F_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot F_\beta + F_0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Обратное преобразование можно представить в следующей общей форме:

$$F_j = \sum_{i=a,b,c} (\mathbf{C}^{-1})_{ji} \cdot F_i, \quad j = \alpha, \beta, 0. \quad (4.28)$$

Обратная матрица \mathbf{C}^{-1} легко вычисляется и имеет вид:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Отсюда

$$\begin{cases} F_\alpha = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{L} \cdot (F_a - F_b - F_c) \\ F_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mathbf{L} \cdot (F_b - F_c) \\ F_0 = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{L} \cdot (F_a + F_b + F_c) \end{cases}. \quad (4.30)$$

Если применить преобразование (4.25) к системе уравнений (4.24) как для напряжений U_i , так и для токов i_i , то получим

$$\begin{cases} U_\alpha = R \cdot i_\alpha + \mathbf{L} - M \cdot \frac{di_\alpha}{dt} \\ U_\beta = R \cdot i_\beta + \mathbf{L} - M \cdot \frac{di_\beta}{dt} \\ U_0 = R \cdot i_0 + \mathbf{L} + 2 \cdot M \cdot \frac{di_0}{dt} \end{cases}. \quad (4.31)$$

В системе уравнений (4.31), в отличие от системы (4.24), отсутствует взаимная индуктивная связь между осями, что является значительным преимуществом. Кроме того, для симметричного режима (то есть при отсутствии токов нулевой последовательности)

$$i_0 = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{L} \cdot (i_a + i_b + i_c) \stackrel{!}{=} 0$$

и последнее уравнение из системы (4.31) отпадает.

Таким образом, при переходе к системе координат $\alpha, \beta, 0$ уменьшается число уравнений, которые надо моделировать, и исчезают взаимные связи, что также существенно упрощает задачу.

4.3. Преобразование уравнений трехфазной электрической цепи к вращающейся системе координат $d, q, 0$

При моделировании электрических цепей, содержащих вращающиеся синхронные машины, система координат $\alpha, \beta, 0$ (как и система a, b, c) становится неудобной. В этом случае целесообразно использовать вращающуюся систему координат $d, q, 0$, жестко связанную с ротором синхронной машины. Ее основное преимущество состоит в том, что связанные с ней дифференциальные уравнения не содержат переменных во времени коэффициентов. Вращающиеся оси d, q связаны с ротором так, что ось d совпадает с продольной осью ротора, по которой направлен поток возбуждения, ось q перпендикулярна ей, а 0 есть начало координат.

Установим связь между параметрами в осях $\alpha, \beta, 0$ и $d, q, 0$, причем угол между осями d и α равен $\gamma = \omega \cdot t + \gamma_0$ (рис. 4.6), где ω – угловая скорость вращения осей, а γ_0 – начальный угол при $t = 0$.

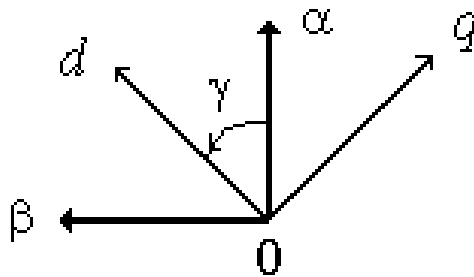


Рис. 4.6. Системы координат $\alpha, \beta, 0$ и $d, q, 0$

Эта связь выражается формулой преобразования:

$$F_j = \sum_{k=d,q,0} C'_{jk} \cdot F_k, \quad j = \alpha, \beta, 0. \quad (4.32)$$

Здесь F_j – электрические параметры, а \mathbf{C}' – матрица преобразования от системы $\alpha, \beta, 0$ к системе $d, q, 0$:

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & -\cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Связь между величиной \mathbf{F} в фазных осях a, b, c и в осях $d, q, 0$ выражается соотношением:

$$F_i = \sum_{j=\alpha, \beta, 0} \sum_{k=d, q, 0} C_{ij} \cdot C'_{jk} \cdot F_k = \sum_{k=d, q, 0} C''_{ik} \cdot F_k, \quad i = a, b, c, \quad (4.34)$$

где

$$C''_{ik} = \sum_{j=\alpha, \beta, 0} C_{ij} \cdot C'_{jk}. \quad (4.35)$$

В матричной форме имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1.2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1.2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & -\cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 1 \\ \cos(\gamma - 120^\circ) & \sin(\gamma - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\gamma + 120^\circ) & \sin(\gamma + 120^\circ) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} F_a = F_d \cdot \cos \gamma + F_q \cdot \sin \gamma + F_0 \\ F_b = F_d \cdot \cos(\gamma - 120^\circ) + F_q \cdot \sin(\gamma - 120^\circ) + F_0 \\ F_c = F_d \cdot \cos(\gamma + 120^\circ) + F_q \cdot \sin(\gamma + 120^\circ) + F_0 \end{cases} \quad (4.37)$$

В теории электрических машин матрица \mathbf{C}'' используется для преобразования уравнений синхронной машины в координаты $d, q, 0$.

4.4. Преобразование уравнений синхронной машины к системе координат $d, q, 0$

Рассмотрим синхронную машину (рис. 4.7). За положительное направление для токов статора примем направление от генератора во внешнюю сеть, а для токов роторных контуров – от внешнего источника в генератор. Условимся считать, что насыщение магнитопровода отсутствует, магнитное поле имеет синусоидальное распределение по расточке статора, фазные обмотки имеют полную симметрию и отсутствуют потери в сердечнике.

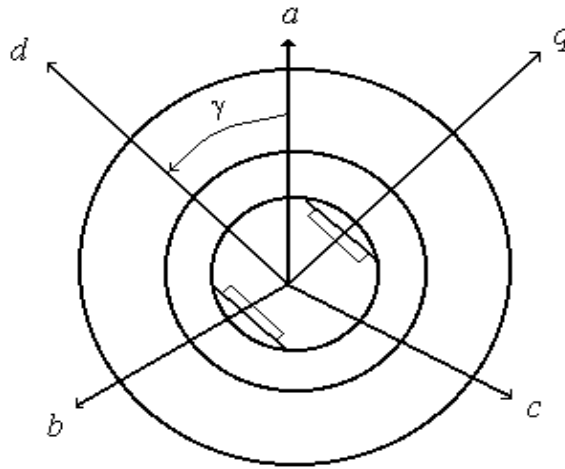


Рис. 4.7. Магнитные оси обмоток синхронной машины

Дифференциальные уравнения электрического равновесия для обмоток статора синхронной машины имеют вид:

$$\begin{cases} U_a = -R \cdot i_a - \frac{d\Psi_a}{dt} \\ U_b = -R \cdot i_b - \frac{d\Psi_b}{dt} \\ U_c = -R \cdot i_c - \frac{d\Psi_c}{dt} \end{cases}, \quad (4.38)$$

где Ψ_a, Ψ_b, Ψ_c – полные потокосцепления фазных обмоток, $U_a, U_b, U_c, i_a, i_b, i_c$ – мгновенные значения напряжений и токов, а R – активное сопротивление фазной обмотки.

Дифференциальное уравнение обмотки возбуждения, расположенной на роторе, имеет вид:

$$U_f = R_f \cdot i_f + \frac{d\Psi_f}{dt}, \quad (4.39)$$

где U_f, i_f – напряжение и ток обмотки возбуждения, а Ψ_f и R_f – полное потокосцепление и активное сопротивление обмотки возбуждения.

Демпферные контуры ротора замещаются эквивалентными короткозамкнутыми обмотками, расположенными по продольной и поперечной осям ротора:

$$\begin{cases} 0 = R_D \cdot i_D + \frac{d\Psi_D}{dt} \\ 0 = R_Q \cdot i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt} \end{cases}, \quad (4.40)$$

где индексы D и Q означают эквивалентные демпферные контуры по продольной и поперечной осям соответственно.

Систему уравнений синхронной машины можно записать в следующем матричном виде:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.41)$$

где \mathbf{U} – столбец фазных напряжений:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ -U_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.42)$$

\mathbf{I} – столбец фазных токов:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix}; \quad (4.43)$$

\mathbf{R} – квадратная матрица активных сопротивлений, имеющая диагональный вид:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{pmatrix}; \quad (4.44)$$

Ψ – столбец полных потокосцеплений:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Потокосцепления связаны с фазными токами соотношением:

$$\Psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I}, \quad (4.46)$$

где \mathbf{L} – квадратная матрица индуктивных сопротивлений, имеющая вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} & M_{af} & M_{aD} & M_{aQ} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} & M_{bf} & M_{bD} & M_{bQ} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c & M_{cf} & M_{cD} & M_{cQ} \\ M_{fa} & M_{fb} & M_{fc} & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{Da} & M_{Db} & M_{Dc} & M_{Df} & L_D & 0 \\ M_{Qa} & M_{Qb} & M_{Qc} & 0 & 0 & L_Q \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Перейдем теперь от системы a, b, c, f, D, Q к системе $d, q, 0, f, D, Q$:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}', \quad (4.48)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}', \quad (4.49)$$

где полная матрица преобразования \mathbf{C} имеет вид:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\gamma - 120^\circ) & \sin(\gamma - 120^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\gamma + 120^\circ) & \sin(\gamma + 120^\circ) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Подставим (4.48) и (4.49) в (4.41):

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}' = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}' - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.51)$$

где

$$\Psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}'. \quad (4.52)$$

Умножим выражение (4.51) слева на матрицу \mathbf{C}^{-1} :

$$\mathbf{U}' = -\mathbf{R}' \cdot \mathbf{I}' - \mathbf{C}^{-1} \cdot \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.53)$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{R}, \quad (4.54)$$

$$\Psi = \mathbf{C} \cdot \Psi', \quad (4.55)$$

$$\Psi' = \mathbf{L}' \cdot \mathbf{I}', \quad (4.56)$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}. \quad (4.57)$$

Окончательно получаем следующее матричное уравнение:

$$\mathbf{U}' = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}' - \mathbf{C}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} \cdot \Psi' - \frac{d\Psi'}{dt}. \quad (4.58)$$

Уравнения синхронной машины в осях $d, q, 0$ (4.58) носят название уравнений Парка-Горева по имени авторов, впервые их получивших.

В развернутой форме эти уравнения имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_d = -R \cdot i_d - \omega \cdot \Psi_q - \frac{d\Psi_d}{dt} \\ U_q = -R \cdot i_q + \omega \cdot \Psi_d - \frac{d\Psi_q}{dt} \\ U_0 = -R \cdot i_0 - L_0 \cdot \frac{di_0}{dt} \\ U_f = R_f \cdot i_f + \frac{d\Psi_f}{dt} \\ 0 = R_D \cdot i_D + \frac{d\Psi_D}{dt} \\ 0 = R_Q \cdot i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt} \end{array} \right. , \quad (4.59)$$

где

$$\omega = \frac{d\gamma}{dt} . \quad (4.60)$$

Связь между потокосцеплениями и токами в системе осей $d, q, 0$ в развернутой форме имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_d = L_d \cdot i_d + M_{df} \cdot i_f + M_{dD} \cdot i_D \\ \Psi_q = L_q \cdot i_q + M_{qQ} \cdot i_Q \\ \Psi_f = M_{fd} \cdot i_d + L_f \cdot i_f + M_{fD} \cdot i_D \\ \Psi_D = M_{Dd} \cdot i_d + M_{Df} \cdot i_f + L_D \cdot i_D \\ \Psi_Q = M_{Qq} \cdot i_q + L_Q \cdot i_Q \end{array} \right. . \quad (4.61)$$

Магнитные связи между обмотками синхронной машины изображены на рис. 4.8.

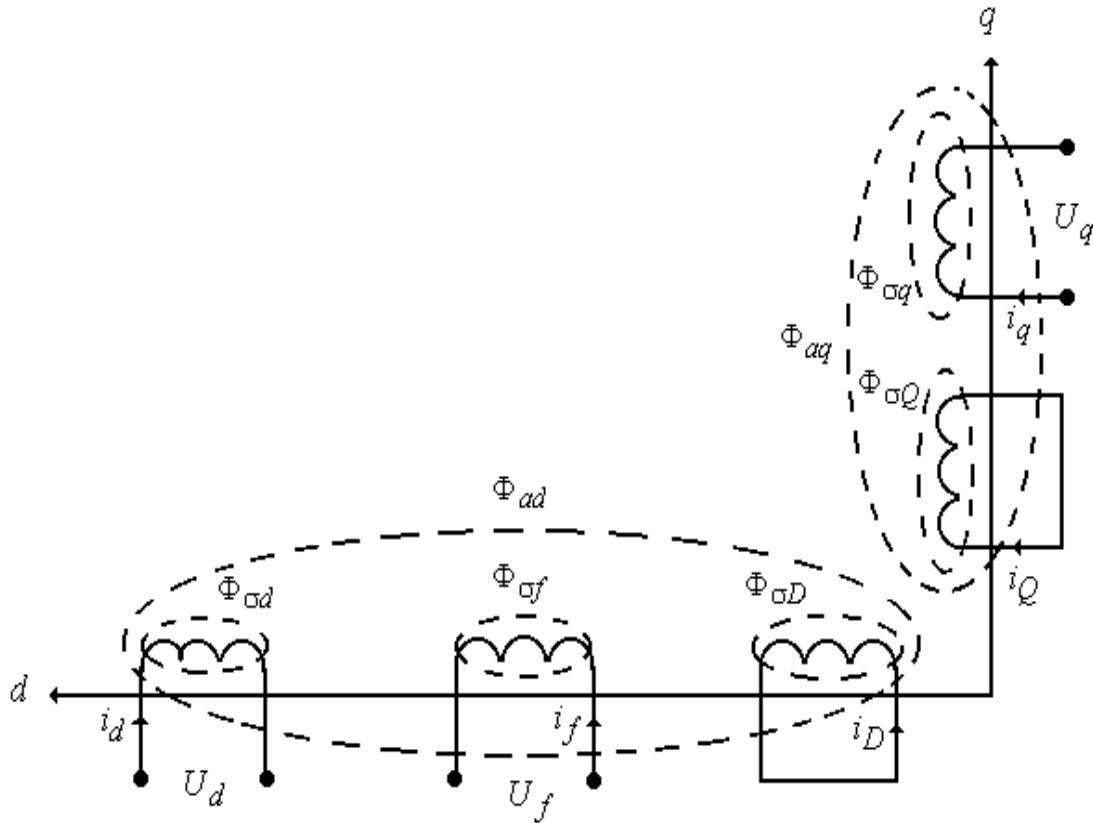


Рис. 4.8. Магнитные потоки, связывающие обмотки синхронной машины в осях $d, q, 0$:

Φ_{ad} – взаимный поток по продольной оси; Φ_{aq} – взаимный поток по поперечной оси; σ – индекс потока рассеяния

Введем индуктивные сопротивления, обусловленные соответствующими магнитными потоками:

1) x_{ad} – индуктивное сопротивление, обусловленное взаимным магнитным потоком по продольной оси Φ_{ad} ;

2) x_{aq} – индуктивное сопротивление, обусловленное взаимным магнитным потоком по поперечной оси Φ_{aq} ;

3) $x_{\sigma d}$ – индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком рассеяния обмотки статора по продольной оси $\Phi_{\sigma d}$;

4) $x_{\sigma q}$ – индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком рассеяния обмотки статора по поперечной оси $\Phi_{\sigma q}$;

5) $x_{\sigma f}$ – индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком рассеяния обмотки возбуждения $\Phi_{\sigma f}$;

6) $x_{\sigma D}$ – индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком рассеяния эквивалентной демпферной обмотки по продольной оси $\Phi_{\sigma D}$;

7) $x_{\sigma Q}$ – индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком рассеяния эквивалентной демпферной обмотки по поперечной оси $\Phi_{\sigma Q}$.

Индуктивное сопротивление обмотки статора по оси d :

$$x_d = x_{ad} + x_{\sigma d}. \quad (4.62)$$

Индуктивное сопротивление обмотки статора по оси q :

$$x_q = x_{aq} + x_{\sigma q}. \quad (4.63)$$

Индуктивное сопротивление обмотки возбуждения:

$$x_f = x_{ad} + x_{\sigma f}. \quad (4.64)$$

Индуктивное сопротивление эквивалентной демпферной обмотки по оси d :

$$x_D = x_{ad} + x_{\sigma D}. \quad (4.65)$$

Индуктивное сопротивление эквивалентной демпферной обмотки по оси q :

$$x_Q = x_{aq} + x_{\sigma Q}. \quad (4.66)$$

Тогда выражение (4.61), связывающее потокосцепления с токами, можно представить в следующей матричной форме:

$$\Psi' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{I}' \quad (4.67)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_d & 0 & x_{ad} & x_{ad} & 0 \\ 0 & x_q & 0 & 0 & x_{aq} \\ x_{ad} & 0 & x_f & x_{ad} & 0 \\ x_{ad} & 0 & x_{ad} & x_D & 0 \\ 0 & x_{aq} & 0 & 0 & x_Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

4.5. Математическое моделирование синхронных машин

Полная модель синхронной машины в осях $d, q, 0$ учитывает электромагнитные процессы в связанных контурах статора и ротора и схематично представлена на рис. 4.9. Электрические цепи связаны магнитными потоками и представлены на статоре двумя обмотками, а на роторе – обмоткой возбуждения и эквивалентными демпферными обмотками по d и q осям.

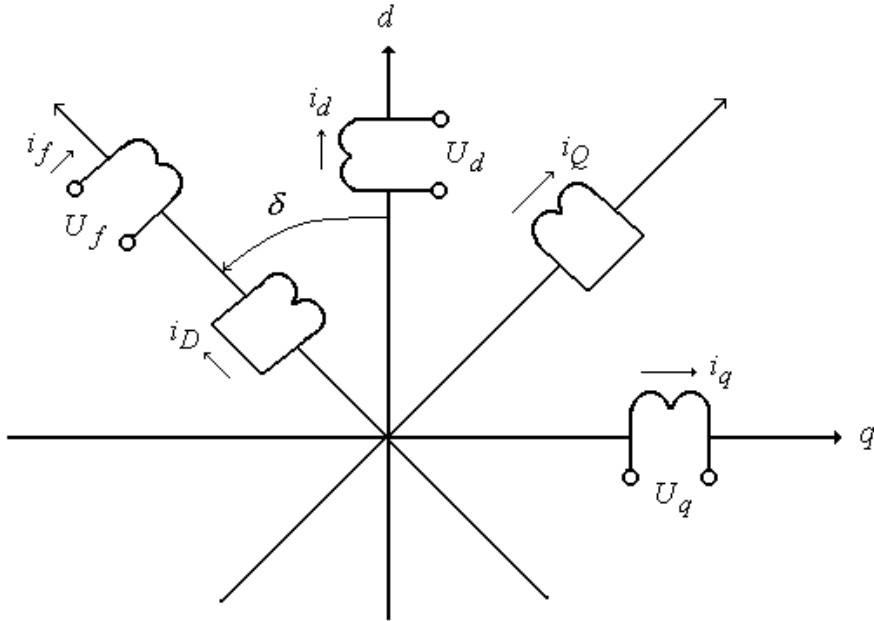


Рис. 4.9. Модель синхронной машины в осях $d, q, 0$

Математическую модель, описывающую переходные процессы в синхронной машине, можно записать в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_d}{dt} = U_d - \Psi_q - r \cdot i_d - \omega_s \\ \frac{d\Psi_q}{dt} = U_q + \Psi_d - r \cdot i_q - \omega_s \\ \frac{d\Psi_f}{dt} = U_f - r_f \cdot i_f - \omega_s \\ \frac{d\Psi_D}{dt} = -r_D \cdot i_D - \omega_s \\ \frac{d\Psi_Q}{dt} = -r_Q \cdot i_Q - \omega_s \\ \frac{ds}{dt} = \frac{n_T - m_\Delta}{T_J} \\ \frac{d\delta}{dt} = s \cdot \omega_s \end{array} \right. , \quad (4.69)$$

где

$$\begin{cases} U_d = -U \cdot \sin \delta \\ U_q = U \cdot \cos \delta \\ m_{\text{э}} = \Psi_d \cdot i_q - \Psi_q \cdot i_d \\ \omega_s = 2 \cdot \pi \cdot f \\ s = \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} \end{cases} \quad (4.70)$$

Здесь U_d, U_q – продольная и поперечная составляющие напряжения на зажимах статора машины, причем предполагается, что явнополусная синхронная машина работает на систему бесконечной мощности, характеризуемой вектором напряжения U ; U_f – напряжение на зажимах обмотки возбуждения; i_d, i_q – продольная и поперечная составляющие тока статора; i_f, i_D, i_Q – токи в обмотке возбуждения и в продольной и поперечной эквивалентных демпферных контурах; r, r_f, r_D, r_Q – активные сопротивления обмоток статора, обмотки возбуждения, продольного и поперечного эквивалентных демпферных контуров; Ψ_d, Ψ_q – потокосцепления статорных обмоток в продольной и поперечной осях; Ψ_f, Ψ_D, Ψ_Q – потокосцепления обмотки возбуждения и эквивалентных демпферных обмоток по продольной и поперечной осям; ω_s – синхронная угловая частота; ω – угловая частота вращения ротора; s – скольжение ротора машины относительно синхронной оси, вращающейся с постоянной угловой частотой; m_T – механический момент первичного двигателя (турбины); $m_{\text{э}}$ – электромагнитный момент; T_J – электромеханическая инерционная постоянная, связанная с моментом инерции ротора J ; δ – угол, образуемый продольной осью ротора с синхронной осью (или вектором напряжения U), иначе – угол нагрузки.

Все параметры роторных контуров считаются приведенными к статору. Уравнения (4.69) записаны во взаимной системе относительных единиц. В качестве базисной угловой частоты $\omega_{\text{б}}$ принята синхронная угловая частота ω_s . Базисный ток статора $I_{\text{б}}$ выбран равным амплитуде номинального фазного тока статора, а базисное напряжение статора $U_{\text{б}}$ – амплитуде номинального фазного напряжения.

Для остальных статорных переменных базисные величины определяются соотношениями:

$$\Psi_{\delta} = \frac{U_{\delta}}{\omega_{\delta}}, \quad Z_{\delta} = \frac{U_{\delta}}{I_{\delta}}, \quad L_{\delta} = \frac{Z_{\delta}}{\omega_{\delta}}, \quad (4.71)$$

$$S_{\delta} = \frac{3 \cdot U_{\delta} \cdot I_{\delta}}{2}, \quad m_{\delta} = \frac{S_{\delta}}{\omega_{\delta}}, \quad \omega_{\delta} = \omega_s, \quad (4.72)$$

где $\Psi_{\delta}, L_{\delta}, Z_{\delta}$ – базисные потокосцепление, индуктивность и сопротивление, а m_{δ}, S_{δ} – базисные момент и мощность, принятая равной номинальной мощности машины.

Электромеханическая инерционная постоянная в этих единицах есть:

$$T_J = J \cdot \frac{\omega_s^2}{S_{\delta}}, \quad (4.73)$$

где J – момент инерции ротора.

За базисный ток возбуждения принимается ток:

$$I_{f\delta} = \frac{I_{fxx} \cdot x_{ad}}{C}, \quad (4.74)$$

где I_{fxx} – ток возбуждения при холостом ходе, а C – коэффициент, учитывающий расхождение между действительной характеристикой холостого хода и характеристикой, спрямленной по ненасыщенной начальной части.

Сопротивление обмотки возбуждения во взаимной системе единиц:

$$r_f = \frac{R_f}{Z_{f\delta}} = \frac{R_f \cdot I_{fxx}^2 \cdot x_{ad}^2}{S_{\delta} \cdot C^2}. \quad (4.75)$$

Базисная мощность принимается одинаковой как для статора, так и для каждого из роторных контуров, поэтому

$$U_{f\delta} \cdot I_{f\delta} = U_{D\delta} \cdot I_{D\delta} = U_{Q\delta} \cdot I_{Q\delta} = \frac{3}{2} \cdot U_{\delta} \cdot I_{\delta}, \quad (4.76)$$

$$U_{f\delta} = \Psi_{f\delta} \cdot \omega_s = Z_{f\delta} \cdot I_{f\delta}. \quad (4.77)$$

Базисные сопротивления для роторных контуров равны:

$$Z_{f\delta} = \frac{S_{\delta}}{I_{f\delta}^2}, \quad Z_{D\delta} = \frac{S_{\delta}}{I_{D\delta}^2}, \quad Z_{Q\delta} = \frac{S_{\delta}}{I_{Q\delta}^2}. \quad (4.78)$$

Таким образом, задача исследования переходных процессов в синхронной машине сводится к нахождению решения системы дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (4.79)$$

где $x_1 \leq x \leq x_2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение системы уравнений (4.79) начинается с задания начальных значений $y_i = y_{i0}$, для чего предварительно рассчитываются значения параметров режима, предшествующего возмущению. Интегрирование ведется по переменной t , причем отсчет времени начинается с момента появления возмущения.

Алгоритм расчета переходного режима в синхронной машине следующий:

- 1) вводятся исходные данные: напряжения, сопротивления, механический и электромагнитный моменты, угол нагрузки;
- 2) вычисляются потокосцепления:

$$\Psi' = \mathbf{X} \cdot \mathbf{I}';$$

- 3) обращается матрица сопротивлений:

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^{-1};$$

- 4) вычисляются параметры, необходимые для выполнения очередного шага интегрирования: напряжения, моменты;
- 5) вычисляются токи в обмотках:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{X}^{-1} \cdot \Psi';$$

- 6) выполняется подпрограмма численного решения дифференциальных уравнений на очередном шаге;
- 7) вычисляется функция выхода: если расчет закончен – переход к печати результатов, иначе – возврат к пункту 4);
- 8) печатаются результаты расчета, то есть величины $U', I', m_{\delta}, \delta, t$.

4.6. Устойчивость электрических систем

Основные требования, предъявляемые к электрической системе – это обеспечение высокой надежности электроснабжения потребителей и поддержание качества электроэнергии на уровне государственного стандарта. Основными показателями качества электроэнергии являются напряжение и частота. Отклонение этих параметров в узлах нагрузки от определенных значений может привести к отключению оборудования. Нарушение устойчивой работы генератора, работающего параллельно с энергосистемой, приводит к значительным колебаниям напряжения и тока и к отключению релейной защитой генераторов и линий электропередачи.

Электрическая система должна быть устойчивой к внешним возмущениям. Синхронные генераторы и линии электропередачи должны обладать достаточным запасом устойчивости, чтобы сохранить синхронную работу. В устойчивой системе переходный процесс, вызванный возмущением, имеет затухающий колебательный характер. Этому способствуют автоматические регуляторы возбуждения (АРВ) на генераторах и системная автоматика на межсистемных линиях электропередачи.

С малыми возмущениями связано исследование системы на статическую устойчивость. Для оценки реакции электрической сети на малые возмущения разработан метод малых колебаний. В ограниченном диапазоне изменения режима электрическая сеть математически описывается системой линейных дифференциальных уравнений. В этом случае устойчивость системы проверяется путем анализа ее характеристического уравнения.

Воздействие на электрическую систему больших возмущений, вызванных коротким замыканием, отключением линий электропередачи, генераторов, потерей возбуждения, приводит к значительным изменениям параметров. В этих случаях говорят о динамической устойчивости.

4.7. Математическая модель синхронного генератора для расчета динамической устойчивости

Полная математическая модель, описывающая процессы в синхронной электрической машине, учитывает электромагнитные процессы в связанных контурах статора и ротора и записывается в виде системы дифференциальных уравнений (4.69), что соответствует модели

первого класса точности. При анализе динамической устойчивости синхронной машины основное значение имеет характер изменения угла нагрузки δ во времени, а переходными процессами в электрических цепях можно пренебречь. Это означает пренебрежение производными $\frac{d\Psi_d}{dt}$ и $\frac{d\Psi_q}{dt}$ в уравнениях (4.69) и соответствует модели второго класса точности, то есть рассматриваются переходные процессы при больших нарушениях режима (больших возмущениях). Такие ситуации возникают при коротких замыканиях, отключении или включении нагрузок, генераторов, трансформаторов, линий электропередачи и т.д.

Еще большее упрощение достигается при исключении из рассматриваемой системы уравнений демпферных обмоток D, Q и введении в уравнение для скольжения s демпфирующего момента $P_D \cdot s$, пропорционального скольжению ротора генератора относительно шин бесконечной мощности:

$$T_J \cdot \frac{ds}{dt} + P_D \cdot s = m_T - m_\Sigma. \quad (4.80)$$

Это приводит к модели третьего класса точности. При этом пренебрегают также активным сопротивлением обмотки возбуждения по сравнению с ее реактивным сопротивлением рассеяния, а сопротивление линии включается в соответствующее сопротивление обмотки статора.

В модели четвертого класса точности медленно изменяющаяся ЭДС за переходным реактивным сопротивлением принимается постоянной по модулю во время переходного процесса. При этом вводится допущение, что положение ротора генератора жестко связано с положением этой ЭДС и вместо действующего угла ротора рассчитывается угол, соответствующий данной ЭДС.

Таким образом, для описания динамических свойств синхронной машины можно воспользоваться только одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$T_J \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} + P_D \cdot \frac{d\delta}{dt} = \omega_s \cdot (m_T - m_\Sigma), \quad (4.81)$$

которое получается объединением уравнения (4.80) с последним уравнением из системы (4.69).

Наиболее общим методом расчета относительных движений роторов генераторов в электрической системе при больших возмущениях является численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения (4.81).

Наиболее грубая модель (модель пятого класса точности) получается при полном пренебрежении демпфирования, что приводит к уравнению:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\omega_s \cdot (m_T - m_E)}{T_J} \quad (4.82)$$

В некоторых случаях динамическую устойчивость электрической системы можно проверить качественно с помощью способа площадей. Для этого строят зависимости электромагнитного момента m_E от угла нагрузки δ до и после резкого изменения режима (рис. 4.10). Динамическая устойчивость синхронной машины сохраняется, если площадка ускорения A_y не больше площадки торможения A_T .

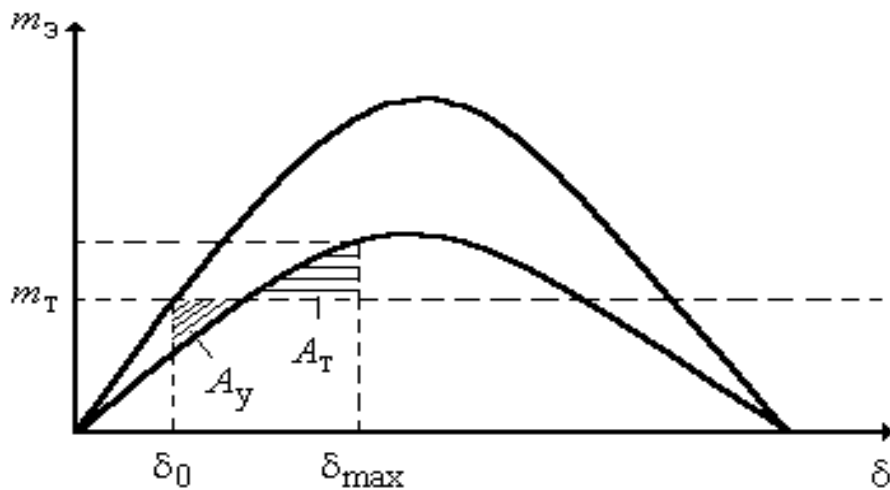


Рис. 4.10. Зависимость электромагнитного момента от угла нагрузки

4.8. Динамическая устойчивость электропередачи

Рассмотрим пример моделирования переходного процесса в синхронной машине, работающей на систему неограниченной мощности через трансформатор и двухцепную линию электропередачи (рис. 4.11).

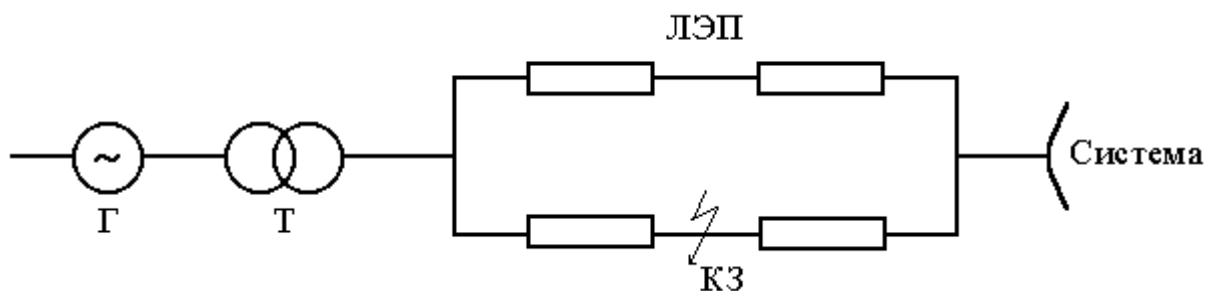


Рис. 4.11. Схема электропередачи: Г – генератор; Т – трансформатор; ЛЭП – линия электропередачи

В исходном режиме машина выдает активную мощность $0,8 \cdot P_H$, а на шинах генератора поддерживается напряжение $1,05 \cdot U_H$. В начале ЛЭП происходит короткое замыкание и через время t_K одна цепь отключается. Необходимо исследовать динамическую устойчивость синхронного генератора и определить предельное время отключения короткого замыкания t_K , при котором еще сохраняется устойчивая работа системы.

Состав и параметры электрооборудования:

– система неограниченной мощности – это система с неизменной частотой и постоянным по модулю и фазе напряжением. Напряжение системы $U_c = 115$ кВ;

– длина ЛЭП $l = 50$ км, сопротивление одного километра линии $x_0 = 0,4$ Ом/км;

– синхронный генератор ТВФ-100. Полная мощность $S_H = 117,5$ МВ·А, переходное сопротивление $x_T = 0,224$ о.е., номинальное напряжение $U_H = 10,5$ кВ, инерционная постоянная времени $T_J = 10$ с;

– трансформатор ТДЦ-125. Номинальная мощность $S_T = 125$ МВ·А, номинальное низкое напряжение $U_{HH} = 10,5$ кВ, номинальное высокое напряжение $U_{BH} = 124$ кВ, напряжение короткого замыкания $U_{K3} = 10,5\%$.

Примем за базисные параметры номинальные данные генератора:

$$S_{\sigma} = S_H = 117,5 \text{ МВ} \cdot \text{А}, \quad U_{\sigma 1} = U_H = 10,5 \text{ кВ}, \quad U_{\sigma 2} = U_{BH} = 124 \text{ кВ}.$$

Тогда,

– реактивное сопротивление трансформатора:

$$x_T = \frac{U_{K3} \cdot S_{\sigma}}{100 \cdot S_T} = \frac{10,5 \cdot 117,5}{100 \cdot 125} \approx 0,0987 \text{ о.е.};$$

– сопротивление одной цепи ЛЭП:

$$x_{\text{Л}} = \frac{x_0 \cdot l \cdot S_{\text{б}}}{U_{\text{б2}}^2} = \frac{0,4 \cdot 50 \cdot 117,5}{124^2} \approx 0,1528 \text{ о.е.};$$

– сопротивление двух цепей ЛЭП:

$$\frac{x_{\text{Л}}}{2} = \frac{0,1528}{2} \approx 0,0764 \text{ о.е.};$$

– ЭДС системы:

$$E_{\text{с}} = \frac{U_{\text{с}}}{U_{\text{б2}}} = \frac{115}{124} \approx 0,9274 \text{ о.е.}$$

Схема замещения электропередачи для исходного режима приведена на рис. 4.12.

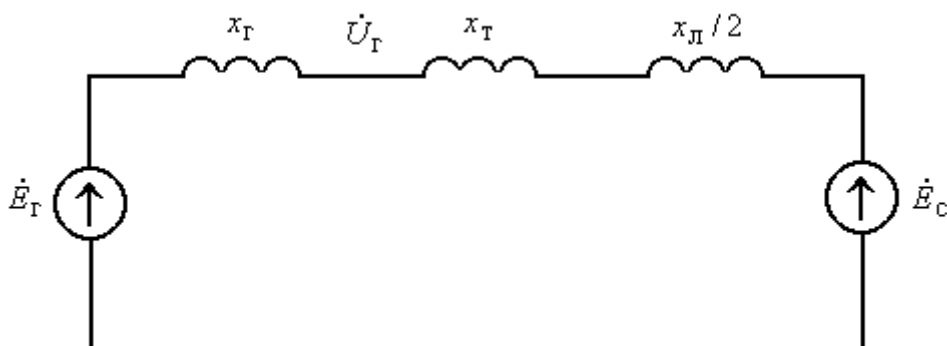


Рис. 4.12. Схема замещения электропередачи для исходного режима

Для генераторов, снабженных автоматическим регулятором возбуждения (АРВ) пропорционального действия, переходную ЭДС \dot{E}_T за переходным сопротивлением x_T можно считать неизменной во время переходного процесса, поэтому начальное значение \dot{E}_T и угла нагрузки δ определяем для исходного режима, предшествующего короткому замыканию. Векторная диаграмма напряжений для исходного режима показана на рис. 4.13.

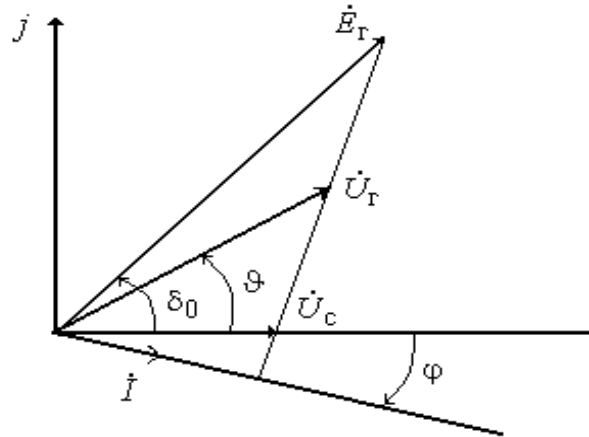


Рис. 4.13. Векторная диаграмма напряжений для исходного режима

Используя выражение для активной мощности

$$P = \frac{U_G \cdot E_C \cdot \sin \vartheta}{x_T + \frac{x_L}{2}}, \quad (4.83)$$

определяем угол передачи «генератор-система»:

$$\vartheta = \arcsin \left\{ \frac{P \cdot \left(x_T + \frac{x_L}{2} \right)}{U_G \cdot E_C} \right\}. \quad (4.84)$$

Из уравнения закона Ома для участка цепи

$$\dot{U}_G = \dot{E}_C + Z \cdot \dot{I} \quad (4.85)$$

находим ток:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_G - \dot{E}_C}{Z} = \frac{U_G \cdot e^{j\vartheta} - E_C}{j \cdot \left(x_T + \frac{x_L}{2} \right)} = I \cdot e^{j\varphi}. \quad (4.86)$$

Введем обозначения:

$$x_1 = x_T + \frac{x_L}{2},$$

$$x_2 = x_T + \frac{x_L}{2},$$

$$x_3 = x_T + x_T + \frac{x_L}{2}.$$

ЭДС генератора найдем из выражения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\Gamma &= \dot{U}_\Gamma + \dot{i} \cdot Z_\Gamma = U_\Gamma \cdot e^{j \cdot \vartheta} + \frac{(U_2 \cdot e^{j \cdot \vartheta} - E_c) \cdot j \cdot x_\Gamma}{j \cdot x_2} = \\ &= \frac{U_\Gamma \cdot x_3 \cdot \sqrt{U_\Gamma^2 \cdot E_c^2 - P^2 \cdot x_1^2}}{x_2 \cdot U_\Gamma \cdot E_c} - \frac{E_c \cdot x_\Gamma}{x_2} + \frac{j \cdot U_\Gamma \cdot x_3 \cdot P \cdot x_1}{x_2 \cdot U_\Gamma \cdot E_c} = E_\Gamma \cdot e^{j \cdot \delta_0}, \quad (4.87) \end{aligned}$$

где

$$E_\Gamma = \frac{\left\{ \left[x_3 \cdot \sqrt{U_\Gamma^2 \cdot E_c^2 - P^2 \cdot x_1^2} - E_c^2 \cdot x_\Gamma \right]^2 + P^2 \cdot x_1^2 \cdot x_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{E_c \cdot x_2}, \quad (4.88)$$

$$\delta_0 = \arctg \left\{ \frac{P \cdot x_1 \cdot x_3}{x_3 \cdot \sqrt{U_\Gamma^2 \cdot E_c^2 - P^2 \cdot x_1^2} - E_c^2 \cdot x_\Gamma} \right\}. \quad (4.89)$$

Для исследования переходного процесса используем простейшую модель (модель пятого класса точности), исходя из следующих допущений:

- 1) механическая мощность турбины в течении переходного процесса остается постоянной;
 - 2) демпфирование не учитывается;
 - 3) синхронная машина может быть представлена постоянной ЭДС за переходным реактивным сопротивлением;
 - 4) механический угол ротора синхронной машины совпадает по величине с электрическим углом ЭДС за переходным реактивным сопротивлением;
 - 5) в относительных единицах момент сил равен мощности.
- С учетом этих допущений уравнение движения ротора имеет вид:

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{\omega_0 \cdot (P_T - P_3)}{T_J}, \quad (4.90)$$

где δ – угол нагрузки (рад); $\omega_0 = 314$ рад/с – номинальная угловая частота; t – время (с); T_J – инерционная постоянная (с); $P_T = 0,8$ о.е. –

механический момент турбины; $P_э$ – электромагнитный момент (о.е.), который на время короткого замыкания ($t \leq t_k$) будем считать равным нулю, поэтому

$$P_э = \begin{cases} 0, & t \leq t_k \\ \frac{E_T \cdot E_C \cdot \sin \delta}{x_T + x_T + x_L}, & t > t_k \end{cases} \quad (4.91)$$

Уравнение (4.90) заменим на систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0 \cdot (P_T - P_э)}{T_J} \\ \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \end{cases} \quad (4.92)$$

Начальными условиями для решения системы дифференциальных уравнений (4.92) являются: начало возмущения $t_0 = 0$; количество точек n на отрезке времени, на котором производится расчет; шаг интегрирования h ; начальный угол нагрузки δ_0 ; начальная угловая скорость ω_0 . Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (4.92) можно выполнить, например, методом Рунге-Кутты четвертого порядка (Раздел 5.8.3).

Для исследования динамической устойчивости необходимо решить систему уравнений (4.92) при разных значениях времени отключения короткого замыкания t_k . При этом динамическая устойчивость контролируется по углу нагрузки δ как функции времени. Неограниченное возрастание δ со временем свидетельствует о развитии неустойчивости в системе.

Была проведена серия расчетов при указанных выше исходных данных. Результаты расчета для двух значений t_k приведены на рис. 4.14. Видно, что предельным временем отключения короткого замыкания, при котором еще сохраняется устойчивая работа электропередачи, является значение $t_k = 0,32$ с.

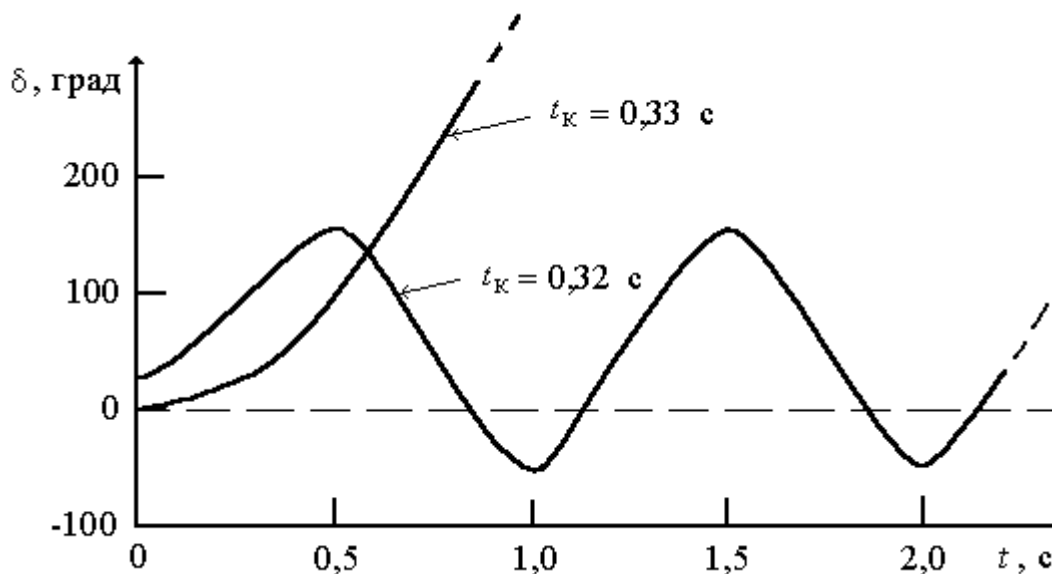


Рис. 4.14. Зависимость угла нагрузки от времени при двух значениях времени отключения короткого замыкания

4.9. Статическая устойчивость электрических систем

На первом этапе создания всякой технической системы определяется ее работоспособность, то есть устойчивость состояния равновесия при малых от него отклонениях. Способность системы возвращаться в исходное положение после малого возмущения называется статической устойчивостью.

Широкий класс технических устройств при изучении переходных процессов после малых возмущений может быть описан системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_{ij} \cdot \frac{d^2 x_i}{dt^2} + b_{ij} \cdot \frac{dx_i}{dt} + c_{ij} \cdot x_i \right) = f_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.93)$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы, x_i – переменные, характеризующие состояние системы в момент времени t и понимаемые как отклонение от состояния равновесия, f_j – возмущающие силы, отражающие изменение внешних условий работы системы.

Состоянию равновесия системы соответствует

$$x_i \overset{\sim}{=} 0 \quad \text{при} \quad f_j \overset{\sim}{=} 0. \quad (4.94)$$

Пусть на промежутке времени $(0, t_0)$ возмущающие силы $f_j \overset{\sim}{\neq} 0$ вызывают отклонения системы от состояния равновесия, то есть

$$x_i \overset{\sim}{\neq} 0, \quad x'_i \overset{\sim}{\neq} 0. \quad (4.95)$$

В момент времени $t = t_0$ действие возмущающих сил прекращается и далее имеет место переходный процесс, обусловленный начальными возмущениями.

Положение равновесия системы называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что все решения системы (4.93) с начальными условиями

$$|x_{i0}| < \delta, \quad |x'_{i0}| < \delta \quad (4.96)$$

для всех $t > t_0$ будут удовлетворять неравенству:

$$|x_{i0} \overset{\sim}{\neq}| < \varepsilon. \quad (4.97)$$

Положение равновесия называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво, и решения, кроме того, удовлетворяют условию:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i \overset{\sim}{=} 0, \quad (4.98)$$

то есть возмущенное движение асимптотически приближается к состоянию равновесия. В противном случае равновесие называется неустойчивым.

Устойчивость состояния равновесия является необходимым условием работоспособности системы. Иначе малые начальные отклонения, которые всегда имеют место в реальных условиях, будут вызывать нарастающие со временем отклонения и, как следствие, недопустимое изменение условий работы системы.

Рассмотрим решение системы уравнений (4.93) в операторной форме, используя преобразование Лапласа:

$$F \overset{\sim}{=} L \overset{\sim}{=} \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f \overset{\sim}{=} dt, \quad (4.99)$$

где L – интегральный оператор Лапласа, $f \overset{\sim}{=}$ – оригинал функции, а $F \overset{\sim}{=}$

– ее изображение по Лапласу.

Пусть $x_i \overline{\mathcal{C}}$ имеет изображение по Лапласу $X_i \overline{\mathcal{P}}$, то есть

$$L \{ x_i \overline{\mathcal{C}} \} = X_i \overline{\mathcal{P}}. \quad (4.100)$$

Тогда $\frac{dx_i}{dt}$ и $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ имеют изображения:

$$L \left[\frac{dx_i}{dt} \right] = p \cdot X_i \overline{\mathcal{P}} - x_{i0}, \quad (4.101)$$

$$L \left[\frac{d^2x_i}{dt^2} \right] = p^2 \cdot X_i \overline{\mathcal{P}} - p \cdot x_{i0} - x'_{i0}, \quad (4.102)$$

где x_{i0} и x'_{i0} – начальные значения переменной $x_i \overline{\mathcal{C}}$ и ее производной.

В результате система линейных дифференциальных уравнений (4.93) в операторной форме сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \left(a_{ij} \cdot p^2 + b_{ij} \cdot p + c_{ij} \right) X_i \overline{\mathcal{P}} = \Psi_j \overline{\mathcal{P}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.103)$$

где

$$\Psi_j \overline{\mathcal{P}} = F_j \overline{\mathcal{P}} + \sum_{i=1}^n \left(a_{ij} \cdot p + b_{ij} \right) x_{i0} + a_{ij} \cdot x'_{i0}, \quad (4.104)$$

а $F_j \overline{\mathcal{P}}$ – изображение возмущающего воздействия:

$$F_j \overline{\mathcal{P}} = L \{ f_j \overline{\mathcal{C}} \}. \quad (4.105)$$

Решение системы уравнений (4.103) можно записать согласно правилу Крамера в виде:

$$X_i \overline{\mathcal{P}} = \sum_{j=1}^n \frac{D_{ji} \overline{\mathcal{P}} \cdot \Psi_j \overline{\mathcal{P}}}{D \overline{\mathcal{P}}}, \quad (4.106)$$

где $D_{ji} \overline{\mathcal{P}}$ – алгебраическое дополнение элемента, стоящего на j – ой строке и i – ом столбце главного определителя системы $D \overline{\mathcal{P}}$, который называется характеристическим.

Из выражения (4.106) видно, что $X_i(p)$ имеет полюсы (то есть нули в знаменателе), совпадающие с корнями p_1, p_2, \dots, p_n уравнения

$$D(p) = 0. \quad (4.107)$$

Уравнение (4.107) называется характеристическим уравнением. Степень характеристического уравнения равна n .

Полагая корни уравнения (4.107) простыми и используя теорему разложения Хевисайда, получим оригинал:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{D_{ji}(p_k) \Psi_j(p_k) e^{p_k \cdot t}}{D'(p_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.108)$$

Из (4.108) видно, что поведение системы во времени определяется корнями характеристического уравнения. Если корни характеристического уравнения (4.107) простые и имеют отрицательные вещественные части, то есть

$$\operatorname{Re} p_k = -\alpha_k, \quad \alpha_k > 0, \quad (4.109)$$

то за счет множителей $e^{-\alpha_k \cdot t}$ решение (4.108) можно сделать сколь угодно малым для всех $t > 0$. Это свойство справедливо и в случае кратных корней.

Положение равновесия системы уравнений (4.93) будет асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения (4.107) имеют отрицательные вещественные части.

Положение равновесия будет неустойчивым, если хотя бы один корень уравнения (4.107) имеет положительную вещественную часть.

Если среди корней уравнения (4.107) имеются корни с нулевыми вещественными частями, то в случае, когда корни простые, положение равновесия системы устойчиво, но не асимптотически. Если же эти корни кратные, то может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость.

Итак, необходимое и достаточное условие статической устойчивости обеспечивается тогда, и только тогда, когда все корни характеристического уравнения

$$D(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \quad (4.110)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Коэффициенты уравнения (4.110), определяемые реальными параметрами технической системы, всегда действительны. Поэтому его корни могут быть действительными и, если комплексными, то всегда комплексно-сопряженными. Характеристическое уравнение электрической системы обычно содержит несколько действительных корней и несколько комплексно-сопряженных. При простых корнях характеристического уравнения (когда нет одинаковых корней) общее решение системы дифференциальных уравнений (4.93) можно записать в виде:

$$x_k \stackrel{\text{сумма}}{=} C_{1k} \cdot e^{p_1 \cdot t} + C_{2k} \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + C_{nk} \cdot e^{p_n \cdot t}, \quad (4.111)$$

где C_{ik} – постоянные, зависящие от начальных условий. Действительному корню

$$p_i = \alpha_i$$

соответствует в решении член

$$C_{ik} \cdot e^{\alpha_i \cdot t},$$

где C_{ik} – действительное число. Паре комплексно-сопряженных корней

$$p_s = \alpha_s + j \cdot \omega_s, \quad p_{s+1} = \alpha_s - j \cdot \omega_s$$

соответствует в решении сумма двух членов

$$C_{sk} \cdot e^{(\alpha_s + j \cdot \omega_s) \cdot t} + C_{s+1,k} \cdot e^{(\alpha_s - j \cdot \omega_s) \cdot t},$$

где C_{sk} и $C_{s+1,k}$ – всегда (то есть при любых начальных условиях) комплексно-сопряженные числа, которые можно представить в виде:

$$C_{sk} = A_{sk} - j \cdot B_{sk}, \quad C_{s+1,k} = A_{sk} + j \cdot B_{sk}.$$

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} (C_{sk} \cdot e^{j \cdot \omega_s \cdot t} + C_{s+1,k} \cdot e^{-j \cdot \omega_s \cdot t}) \cdot e^{\alpha_s \cdot t} &= e^{\alpha_s \cdot t} \cdot A_{sk} \cdot (e^{j \cdot \omega_s \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_s \cdot t}) + \\ &+ \frac{B_{sk}}{j} \cdot (e^{j \cdot \omega_s \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_s \cdot t}) = 2 \cdot A_{sk} \cdot e^{\alpha_s \cdot t} \cdot \cos(\omega_s \cdot t) + \\ &2 \cdot B_{sk} \cdot e^{\alpha_s \cdot t} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) = 2 \cdot |C_{sk}| \cdot e^{\alpha_s \cdot t} \cdot \sin(\omega_s \cdot t + \varphi_{sk}), \end{aligned} \quad (4.112)$$

где

$$|C_{sk}| = \sqrt{A_{sk}^2 + B_{sk}^2}, \quad \varphi_{sk} = \arctg\left(\frac{A_{sk}}{B_{sk}}\right). \quad (4.113)$$

Таким образом, общее решение системы (4.93) при простых корнях характеристического уравнения состоит из членов вида:

$$x_k \Leftarrow \sum_i x_{ik} \Leftarrow + \sum_s x_{sk} \Leftarrow, \quad (4.114)$$

где

$$x_{ik} \Leftarrow C_{ik} \cdot e^{\alpha_i \cdot t}, \quad (4.115)$$

$$x_{sk} \Leftarrow 2 \cdot |C_{sk}| \cdot e^{\alpha_s \cdot t} \cdot \sin(\omega_s \cdot t + \varphi_{sk}). \quad (4.116)$$

Следовательно, значения корней характеристического уравнения указывает не только на устойчивость, либо неустойчивость, но и позволяет установить вид функций, составляющих переходный процесс.

Если все α_i и α_s отрицательны, то есть корни лежат в левой полуплоскости, то все составляющие решения $x_{ik} \Leftarrow$ и $x_{sk} \Leftarrow$ по модулю экспоненциально затухают (рис. 4.15, а, в).

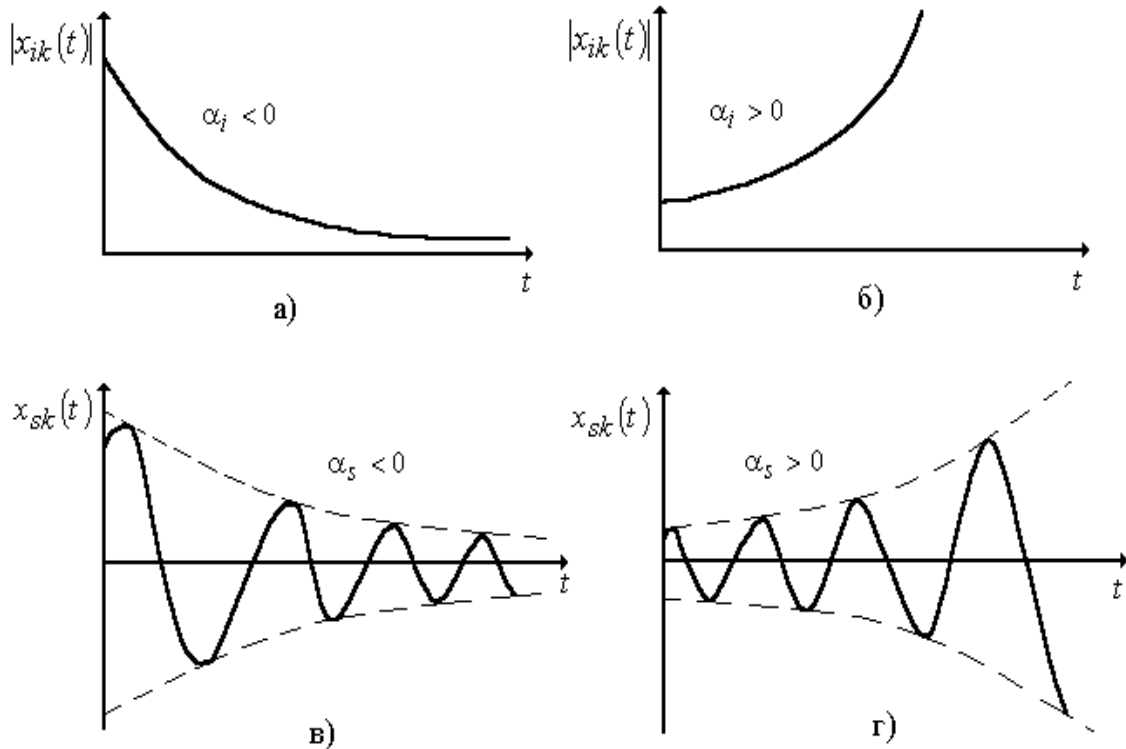


Рис. 4.15. Возможные варианты зависимостей составляющих решения x_{ik} и x_{sk} от времени

Если среди действительных корней имеется хотя бы один корень с $\alpha_j > 0$, то составляющая решения, соответствующая этому корню, неограниченно возрастает во времени (рис. 4.15, б). Система оказывается неустойчивой. При этом говорят, что происходит аperiodическое нарушение устойчивости.

Если же среди комплексных корней имеется хотя бы одна пара корней с $\alpha_s > 0$ (остальные корни левые), то соответствующая этой паре корней составляющая решения имеет вид экспоненциально нарастающих во времени колебаний (рис. 4.15, г). Система неустойчива, при этом говорят, что происходит колебательное нарушение устойчивости или самораскачивание.

4.10. Алгебраические критерии статической устойчивости

Выявление возможной неустойчивости и ее характера может быть проведено путем отыскания корней характеристического уравнения (4.110). Однако при высокой степени уравнения задача отыскания его корней оказывается весьма трудоемкой. Поэтому при исследовании устойчивости часто используют закономерности, связывающие положение корней уравнения (4.110) в левой полуплоскости со знаками коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n и некоторых функций от этих коэффициентов. На этом основаны алгебраические критерии устойчивости. Эти критерии содержат группу условий (или неравенств), при соблюдении которых имеет место устойчивость. Если хотя бы одно из них нарушено, то имеет место неустойчивость.

Для анализа устойчивости с помощью алгебраических критериев необходимо предварительно вычислить коэффициенты характеристического уравнения $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$. Если состояние равновесия системы (4.93) асимптотически устойчиво, то все коэффициенты характеристического уравнения положительны:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0. \quad (4.117)$$

Это есть необходимое условие устойчивости и оно легко доказывается, если характеристический многочлен разложить на множители:

$$D\Phi \doteq a_0 \cdot \Phi - p_1 \doteq \Phi - p_2 \doteq \dots \cdot \Phi - p_n \doteq, \quad (4.118)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – корни характеристического уравнения, и объединить попарно множители, соответствующие комплексно-сопряженным корням:

$$(p - \alpha - j \cdot \omega) \cdot (p - \alpha + j \cdot \omega) = p^2 - 2 \cdot \alpha \cdot p + \alpha^2 + \omega^2. \quad (4.119)$$

Получаются квадратичные множители, имеющие при $\alpha < 0$ все положительные коэффициенты. Линейные множители $(p - \alpha_i)$, соответствующие действительным корням α_i , при $\alpha_i < 0$ также положительны. Следовательно, характеристический многочлен, полученный как произведение многочленов с положительными коэффициентами, имеет также положительные коэффициенты.

Если это необходимое условие устойчивости не выполнено, то система заведомо неустойчива. Но обратное утверждение неверно. Система может быть неустойчива и при положительности всех коэффициентов характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение с положительными коэффициентами обладает важным свойством – оно не имеет действительных положительных корней. Каждый корень должен превращать многочлен (4.118) в нуль. Если же корень действительный и положительный, то он не может превратить в нуль уравнение с положительными коэффициентами.

Таким образом, положительность всех коэффициентов характеристического уравнения есть необходимое и достаточное условие отсутствия апериодической неустойчивости. Из него следует, что если при изменении параметров система становится неустойчивой, а коэффициенты характеристического уравнения при этом положительны, то нарушение устойчивости имеет характер самораскачивания.

Если же при изменении параметров системы становится отрицательным свободный член характеристического уравнения ($a_n < 0$), то нарушение устойчивости носит апериодический характер.

Для устойчивости системы требуется, чтобы коэффициенты характеристического уравнения не только были положительными, но и удовлетворяли некоторым соотношениям. Эти соотношения в виде неравенств устанавливает критерий Гурвица. Соблюдение этих неравенств является необходимым и достаточным условием устойчивости системы любого порядка.

Система неравенств Гурвица строится следующим образом. Из коэффициентов характеристического многочлена n -ой степени

$$D\Phi \doteq a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n \quad (4.120)$$

составляется квадратная матрица n -го порядка, называемая матрицей Гурвица. Правило составления матрицы Гурвица: по главной диагонали располагаются коэффициенты многочлена (4.120) в порядке их нумерации, начиная с a_1 до a_n . В строках помещают поочередно коэффициенты только с нечетными или только с четными индексами (включая и коэффициент a_0), причем влево от диагонали – с уменьшающимися, а вправо – с увеличивающимися индексами. Все недостающие коэффициенты, то есть коэффициенты a_i с $i < 0$ и $i > n$, заменяются нулями. В общем случае матрица Гурвица имеет вид:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

Для соблюдения устойчивости требуется, чтобы все n диагональных минора матрицы (4.121) были положительными. Диагональные миноры (определители Гурвица) получается отчеркиванием их снизу и справа, как показано в матрице (4.121). Таким образом, критерий устойчивости Гурвица записывается как

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (4.122)$$

Последний определитель Δ_n включает уже всю матрицу Гурвица целиком. Если его раскрыть по элементам последнего столбца, содержащего только элемент a_n , то получим:

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}. \quad (4.123)$$

Гурвиц показал, что если непрерывно изменять коэффициенты характеристического уравнения, ухудшая устойчивость системы, то при потере устойчивости прежде всего обратится в нуль определитель Δ_n .

Если при этом $\Delta_{n-1} > 0$, то граница устойчивости определяется условием $a_n = 0$. Это граница аperiодической неустойчивости (один действительный корень находится на мнимой оси плоскости корней). Если же $a_n > 0$, то в нуль обращается Δ_{n-1} , что соответствует наличию на границе пары чисто мнимых корней $p_{1,2} = \pm j \cdot \omega_1$. Это есть граница колебательной неустойчивости. При переходе через эту границу начинается самораскачивание системы с частотой ω_1 .

В качестве примера приведем условия устойчивости Гурвица для характеристического уравнения третьего порядка. В этом случае определитель Гурвица имеет вид:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (4.124)$$

Условиями устойчивости являются неравенства:

$$\begin{cases} a_0 > 0, & \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0 \\ \Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 > 0, & a_3 > 0 \end{cases}. \quad (4.125)$$

Следовательно, кроме положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, коэффициенты должны удовлетворять соотношению:

$$a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0. \quad (4.126)$$

Нарушение этого неравенства приведет к самораскачиванию системы.

Для уравнения четвертого порядка

$$D \Phi \rightleftharpoons a_0 \cdot p^4 + a_1 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p + a_4 = 0 \quad (4.127)$$

при положительных значениях коэффициентов имеется лишь одно условие устойчивости – положительный знак предпоследнего определителя Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_3^2 > 0. \quad (4.128)$$

Алгебраический критерий Гурвица для уравнений небольшого порядка ($n=3$ и $n=4$) дает возможность получить непосредственное аналитическое выражение для критического значения интересующего параметра при заданных остальных параметров системы.

Существуют и другие алгебраические критерии устойчивости: критерий Рауса, критерий устойчивости Михайлова, критерий устойчивости Найквиста, метод D -разбиений и так далее. Все они имеют свою область применения. Вообще, методы исследования статической устойчивости на сегодняшний день достаточно хорошо развиты.

Контрольные вопросы

1. Как рассчитать переходный процесс в простейшей трехфазной электрической цепи?
2. Что называется ударным током и как он определяется?
3. Что представляет собой система координат $\alpha, \beta, 0$ и в чем ее преимущество?
4. Покажите, как осуществить переход от системы фазных координат a, b, c к системе координат $\alpha, \beta, 0$?
- 5). Что представляет собой система координат $d, q, 0$ и в чем ее преимущество?
6. Покажите, как осуществить переход от системы фазных координат a, b, c к системе координат $d, q, 0$?
- 7). Запишите уравнения синхронной машины в системе фазных координат a, b, c .
8. Как преобразовать уравнения синхронной машины к вращающейся системе координат $d, q, 0$?
9. Что представляет собой система уравнений Парка-Горева?
10. Приведите формулы, связывающие потокосцепления в обмотках синхронной машины с фазными токами.

11. Перечислите индуктивные сопротивления обмоток синхронной машины, связанные с соответствующими магнитными потоками.
12. Приведите матрицу индуктивных сопротивлений синхронной машины.
13. В чем состоит математическая модель синхронной машины?
14. Приведите систему дифференциальных уравнений во взаимной системе относительных единиц, описывающую переходный процесс в синхронной машине.
15. Каков алгоритм расчета переходного режима в синхронной машине?
16. Что понимается под устойчивостью электрической системы?
17. Какие виды устойчивости электрических систем Вы знаете?
18. В чем состоит математическая модель синхронного генератора для расчета динамической устойчивости?
19. Как рассчитать динамическую устойчивость электропередачи?
20. В чем заключается статическая устойчивость электрических систем?
21. Какое положение равновесия системы называется устойчивым по Ляпунову?
22. Какое положение равновесия системы называется асимптотически устойчивым?
23. Что называется характеристическим уравнением системы?
24. Как связаны знаки корней характеристического уравнения с положением равновесия системы?
25. В чем заключается аperiodическое нарушение устойчивости системы?
26. Когда наступает колебательное нарушение устойчивости системы или самораскачивание?
27. В чем состоят алгебраические критерии устойчивости?
28. Что называется критерием Гурвица статической устойчивости?
29. Что такое матрица Гурвица и как ее составить?

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

5.1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса с обратным ходом

Решение системы n линейных алгебраических уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (5.1)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

по этому алгоритму состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) исходная система за n однотипных шагов преобразуется таким образом, что матрица коэффициентов \mathbf{A} преобразованной системы становится верхней треугольной, то есть все элементы, расположенные ниже ее главной диагонали, равны нулю, а диагональные элементы равны единице. На втором этапе (обратный ход) последовательно определяются значения неизвестных от x_n до x_1 .

Исходную систему уравнений (5.1) можно записать также в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Пусть a_{11} (ведущий элемент) не равен нулю. В противном случае можно переставить уравнения, чтобы это было так. Поделим первое уравнение на a_{11} . Потом x_1 исключается из всех последующих уравнений путем умножения первого уравнения на a_{i1} и вычитания его из i -го уравнения. В результате получается система уравнений с преобразованной матрицей коэффициентов $\mathbf{A}^{(1)}$ и столбцом свободных членов $\mathbf{b}^{(1)}$:

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} \quad (5.4)$$

или

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j}^{(1)} \cdot x_j = b_1^{(1)} \\ \sum_{j=2}^n a_{ij}^{(1)} \cdot x_j = b_i^{(1)} \end{cases}, \quad (5.5)$$

где $i = 2, 3, \dots, n$,

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad (5.6)$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} \cdot b_1^{(1)}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

На втором шаге ведущим элементом является элемент $a_{22}^{(1)}$. Второе уравнение делим на этот элемент и исключаем переменную x_2 из уравнений с номерами $i = 3, 4, \dots, n$. В результате система уравнений приводится к виду:

$$\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}, \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Третий и последующие шаги выполняются аналогично. Рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов системы уравнений на k -ом шаге имеют вид:

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (5.11)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}, \quad (5.12)$$

где $i, j = k + 1, \dots, n$.

На последнем шаге ($k = n$) из всех выражений (5.11) и (5.12) остается только одно:

$$b_n^{(n)} = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}. \quad (5.13)$$

В итоге выполнения этих n шагов образуется система уравнений:

$$\mathbf{A}^{(n)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)} \quad (5.14)$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{2n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & a_{3n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & a_{n-1n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

При прямом ходе ведущими элементами последовательно выступают элементы $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \dots, a_{kk}^{(k-1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ и их отличие от нуля является необходимым условием осуществимости процесса вычислений.

На этапе обратного хода определяются искомые неизвестные в следующем порядке:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = b_n^{(n)} \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{(n-1)} \cdot x_n \\ \dots \\ \dots \\ x_2 = b_2^{(2)} - \sum_{j=3}^n a_{2j}^{(2)} \cdot x_j \\ x_1 = b_1^{(1)} - \sum_{j=2}^n a_{1j}^{(1)} \cdot x_j \end{array} \right. \quad (5.16)$$

В общем виде формулы для обратного хода могут быть записаны как

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = b_n^{(n)} \\ x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} \cdot x_j \end{array} \right. \quad (5.17)$$

где $i = n-1, \dots, 1$.

В качестве примера решим методом Гаусса с обратным ходом систему трех линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 5 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 1 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 = 11 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Объединим матрицу \mathbf{A} и столбец \mathbf{b} в одну прямоугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

и будем выполнять преобразования над строками этой матрицы согласно алгоритму метода Гаусса с обратным ходом.

Поделим первую строку на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на 2 и вычтем ее из второй и третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & -7/3 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & 23/3 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге разделим вторую строку на $5/3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & 23/3 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $-1/3$ и вычтем ее из третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 12/5 & 36/5 \end{pmatrix}.$$

На последнем (третьем) шаге поделим третью строку на $12/5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений преобразовалась к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -7/5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

На этапе обратного хода определяем неизвестные:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5} \cdot 3 = -\frac{10}{5} = -2 \\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot 3 = 3 - 1 = 2 \end{cases} .$$

5.2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса без обратного хода

Решение системы n линейных уравнений (5.1) по этому алгоритму осуществляется за один этап, в результате которого матрица коэффициентов \mathbf{A} за n однотипных шагов приводится к единичной матрице, то есть система уравнений разрешается за эти n шагов относительно искомым неизвестных.

На первом шаге вычисления выполняются так же, как и в алгоритме метода Гаусса с обратным ходом. Получается система уравнений (5.4). На втором шаге, как и в предыдущем алгоритме, в качестве ведущего элемента выбирается диагональный элемент второго столбца матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$, то есть $a_{22}^{(1)}$. Отличие состоит в том, что кроме строк с индексами $i = 3, 4, \dots, n$ преобразуется также и первая строка матрицы $\mathbf{A}^{(1)}$, причем так, чтобы элемент $a_{12}^{(1)}$ обратился в нуль.

Выполнение операций произвольного k -го шага соответствует преобразованию k -го столбца таким образом, чтобы его диагональный элемент матрицы $a_{kk}^{(k)}$ стал равным единице, а недиагональные элементы $a_{jk}^{(k)}$ ($k \neq j$) – нулю. Формулы преобразования матрицы $\mathbf{A}^{(k)}$ и столбца $\mathbf{b}^{(k)}$ на k -ом шаге совпадают с выражениями (5.11) и (5.12), отличаясь лишь диапазоном изменения индекса i , а именно:

$$i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n; \quad i \neq k; \quad j = k+1, \dots, n. \quad (5.19)$$

В результате выполнения последнего шага ($k = n$) получается матрица

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{1} \quad (5.20)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}. \quad (5.21)$$

Решим методом Гаусса без обратного хода систему уравнений (5.18). После выполнения первого шага аналогично предыдущему алгоритму и деления второй строки на $5/3$ на втором шаге, получается матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & 23/3 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $2/3$ и вычтем ее из первой строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & 23/3 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $-1/3$ и вычтем ее из третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 12/5 & 36/5 \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге ведущим элементом является $12/5$. Разделим на это число третью строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 13/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим третью строку на $1/5$ и вычтем ее из первой и второй строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразование завершено. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оценим теперь сравнительную вычислительную эффективность обоих алгоритмов метода Гаусса. Для этого используем общепринятый показатель – число арифметических операций, необходимых для решения системы уравнений порядка n . В качестве таких операций используем умножение и деление, продолжительность выполнения которых на ЭВМ значительно больше, чем для сложения и вычитания. Для метода Гаусса с обратным ходом это число равно:

$$\frac{n \cdot (n^2 + 3 \cdot n - 1)}{3}. \quad (5.22)$$

Для метода Гаусса без обратного хода –

$$\frac{n^2 \cdot (n + 1)}{2}. \quad (5.23)$$

Разность этих чисел дает:

$$\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n \cdot (n^2 + 3 \cdot n - 1)}{3} = \frac{n \cdot (n^2 - 3 \cdot n + 2)}{6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}. \quad (5.24)$$

Значит, при $n > 2$ алгоритм метода Гаусса с обратным ходом эффективнее в вычислительном отношении. Но на основе алгоритма метода Гаусса без обратного хода может быть построен эффективный алгоритм обращения матриц, который будет рассмотрен в следующем разделе.

На точность решения системы уравнений методом Гаусса влияют округление результатов вычислений и неточность исходных данных. Выполнение вычислений по методу Гаусса требует, чтобы ведущий элемент на каждом шаге был отличен от нуля. Может оказаться, что на некотором шаге ведущий элемент становится равным нулю при точных вычислениях или близким к нулю при округлении результатов вычислений. Для устранения этих случаев можно использовать вычислительную схему, называемую схемой главного элемента. В ней на каждом k -ом шаге в качестве ведущего элемента выбирается наибольший по абсолютной величине элемент $a_{ij}^{(k-1)}$ ($i, j = k, \dots, n$). Для этого

переставляются строки и столбцы матрицы $\mathbf{A}^{(k-1)}$, а также элементы столбца $\mathbf{b}^{(k-1)}$, таким образом, чтобы место ведущего элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ занял наибольший по модулю элемент. Более простой вариант этой схемы заключается в перестановке только уравнений системы, что избавляет от необходимости переобозначать неизвестные.

5.3. Решение систем линейных уравнений методом обращения матрицы коэффициентов

В ряде электроэнергетических задач (обычно при расчетах переходных процессов в системе и при расчетах токов короткого замыкания) требуется многократное решение линейных уравнений состояния при неизменной схеме замещения системы и вариации задающих токов в узлах или ЭДС в ветвях. Это означает, что в решаемой системе линейных уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.25)$$

матрица коэффициентов \mathbf{A} остается неизменной, а меняются только столбцы правых частей \mathbf{b} . В таких случаях может оказаться целесообразным обращение матрицы \mathbf{A} , то есть представление решения уравнения (5.25) в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \quad (5.26)$$

Получение обратной матрицы требует большего объема вычислений, чем решение системы линейных уравнений методом Гаусса с обратным ходом. Но при проведении серии расчетов, отличающихся только значениями элементов столбца \mathbf{b} , это обращение выполняется один раз, а затем каждое новое решение получается просто умножением обратной матрицы на новый столбец.

Классический способ вычисления обратной матрицы порядка n основан на формуле:

$$A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot D_{ji}}{|\mathbf{A}|}, \quad (5.27)$$

где D_{ji} – минор, то есть определитель порядка $n-1$, получаемый

вычеркиванием j -ой строки и i -го столбца в матрице \mathbf{A} , а $|\mathbf{A}|$ – определитель матрицы \mathbf{A} . Этот способ требует вычисления n^2 определителей порядка $n-1$ и одного определителя порядка n и по числу арифметических операций значительно уступает целому ряду других практически применяемых методов.

Как было показано в предыдущем разделе, система из n линейных уравнений решается методом Гаусса без обратного хода за n шагов, в результате которых исходная система (5.25) преобразуется к виду:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(n)}. \quad (5.28)$$

Если необходимо решить m систем уравнений с одинаковой матрицей \mathbf{A} порядка n , но с различными столбцами правых частей \mathbf{b}_l , где $l = 1, 2, \dots, m$, то их можно свести в общую систему уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (5.29)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

– прямоугольные матрицы размерностью $n \times m$. Решение этой системы уравнений можно выполнить по алгоритму метода Гаусса без обратного хода по формулам:

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad b_{kl}^{(k)} = \frac{b_{kl}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (5.31)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad b_{il}^{(k)} = b_{il}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_{kl}^{(k)}, \quad (5.32)$$

где

$$i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n; \quad i \neq k; \quad j = k+1, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (5.33)$$

Если в качестве матрицы \mathbf{B} взять единичную матрицу порядка n (то есть $m = n$), то решением системы уравнений (5.29) будет квадратная матрица

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}. \quad (5.34)$$

Таким образом, обращение матрицы \mathbf{A} сводится к одновременному решению n систем линейных уравнений n -го порядка методом Гаусса без обратного хода.

Решим методом обращения матрицы коэффициентов систему линейных уравнений (5.18). В этом случае имеем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединим обе матрицы в одну прямоугольную матрицу и произведем ее преобразование согласно методу Гаусса без обратного хода, в результате которого единичная матрица переместится из правой части объединенной матрицы в левую. Тогда правая квадратная часть общей матрицы и будет обратной матрицей \mathbf{A}^{-1} :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/3 & 7/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 12/5 & -4/5 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений теперь можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{5}{12} \cdot 1 - \frac{1}{12} \cdot 11 = \frac{40 - 5 - 11}{12} = \frac{24}{12} = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{7}{12} \cdot 1 - \frac{1}{12} \cdot 11 = \frac{-20 + 7 - 11}{12} = -\frac{24}{12} = -2. \\ x_3 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 11 = \frac{-20 + 1 + 55}{12} = \frac{36}{12} = 3 \end{cases}$$

5.4. Решение систем нелинейных уравнений методом простой итерации

Пусть требуется решить систему m нелинейных уравнений:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.35)$$

где F_i – нелинейные функции своих аргументов. Представим эту систему уравнений в виде:

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.36)$$

Выберем начальные приближения неизвестных $x_i = x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть в результате предыдущей $(n-1)$ -ой итерации получены значения неизвестных:

$$x_i = x_i^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.37)$$

Тогда выражения для неизвестных на следующей (n) -ой итерации имеют вид:

$$x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.38)$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных в двух последовательных итерациях не станут малыми, то есть меньше заданного $\varepsilon > 0$:

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.39)$$

При использовании метода простой итерации успех во многом определяется удачным выбором начальных приближений неизвестных. Они должны быть достаточно близкими к истинному решению,

в противном случае итерационный процесс может не сойтись.

Метод простой итерации можно применять не только для систем нелинейных, но и для линейных уравнений. В качестве примера выполним несколько итераций для решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

Запишем эту систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \cdot (4 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6} \cdot (7 - 2 \cdot x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2) \end{cases}$$

Выберем начальное приближение для неизвестных:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0.$$

Тогда значения неизвестных на первой итерации:

$$x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = \frac{7}{6}, \quad x_3^{(1)} = 0.$$

На второй итерации имеем:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot \left(4 + \frac{7}{6}\right) = \frac{31}{24} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6} \cdot \left(7 - 2 \cdot \frac{31}{24}\right) = \frac{5}{6} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{7}{3}\right) = \frac{10}{9} \end{cases}$$

Третья итерация дает:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4} \cdot \left(4 + \frac{5}{6} - \frac{10}{9}\right) = \frac{67}{72} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{6} \cdot \left(7 - \frac{31}{12} + \frac{10}{9}\right) = \frac{199}{216} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{31}{24} + \frac{5}{3}\right) = \frac{71}{72} \end{cases}$$

Точное решение есть:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

5.6. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Метод Ньютона обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации и метод Зейделя. В основе метода Ньютона для системы уравнений лежит использование разложения функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые и более высоких порядков производные, отбрасываются.

Пусть приближенные значения неизвестных системы уравнений (5.35), полученные на предыдущей $(n-1)$ -ой итерации равны $x_i^{(n-1)}$, $i=1,2,\dots,m$. Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям $\Delta x_i^{(n)}$, благодаря которым решение системы уравнений (5.35) запишется в виде:

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} + \Delta x_i^{(n)}, \quad i=1,2,\dots,m. \quad (5.42)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (5.35) с учетом выражения (5.42) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными относительно $\Delta x_i^{(n)}$ членами:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \approx F_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j^{(n)} = 0, \quad (5.43)$$

где $i=1,2,\dots,m$. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j = -F_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (5.44)$$

где значения функций F_i и их производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ вычисляются при $x_i = x_i^{(n-1)}$.

Систему уравнений (5.44) можно записать в матричной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \Delta \mathbf{X}^{(n)} = -\mathbf{F}, \quad (5.45)$$

где $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}$ – матрица Якоби, имеющая вид:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

а $\Delta \mathbf{X}^{(n)}$ и \mathbf{F} – вектор столбцы вида:

$$\Delta \mathbf{X}^{(n)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(n)} \\ \Delta x_2^{(n)} \\ \dots \\ \Delta x_m^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Столбец приращений $\Delta \mathbf{X}^{(n)}$ можно записать как

$$\Delta \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}^{(n-1)}, \quad (5.48)$$

где $\mathbf{X}^{(n)}$ и $\mathbf{X}^{(n-1)}$ – столбцы неизвестных, полученные соответственно на n -ой и $(n-1)$ -ой итерациях и имеющие вид:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_m^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \\ \dots \\ x_m^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Тогда уравнение (5.45) можно символически записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n-1)} - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n-1)}), \quad (5.50)$$

где $\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right)^{-1}$ – обратная матрица Якоби.

Для существования единственного решения системы уравнений (5.44) определитель матрицы Якоби, называемый Якобианом, должен быть отличен от нуля на каждой итерации, то есть

$$\left|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right| \neq 0. \quad (5.51)$$

Контроль сходимости осуществляется по вектору невязок:

$$\left|F_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)})\right| < \varepsilon, \quad (5.52)$$

причем условие (5.52) должно выполняться для всех невязок $i = 1, 2, \dots, m$.

В методе Ньютона также важен удачный выбор начального приближения неизвестных для обеспечения хорошей сходимости. Сходимость итерационного процесса метода Ньютона обычно ухудшается с увеличением числа уравнений системы. Основное достоинство метода Ньютона состоит в том, что, в отличие от других методов, скорость его сходимости увеличивается по мере приближения к точному решению.

5.7. Решение систем нелинейных уравнений методами спуска

Составим из уравнений системы (5.35) сумму квадратов невязок (небалансов):

$$\Psi(\mathbf{X}) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m F_i^2(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (5.53)$$

Функция $\Psi(\mathbf{X})$ всегда неотрицательна. Ее минимум равен нулю, при этом все небалансы F_i равны нулю. Значения переменных x_1, x_2, \dots, x_m , при которых достигается минимум функции $\Psi(\mathbf{X})$, являются решениями системы уравнений (5.35). Таким образом, задача решения системы m нелинейных уравнений (5.35) эквивалентна минимизации функции (5.53).

Для решения задачи минимизации функции $\Psi(\mathbf{X})$ наиболее часто применяют методы спуска. Эти методы характеризуются тем, что при заданном приближении определяется какое-либо направление,

в котором функция $\Psi(\mathbf{x})$ убывает, и производится перемещение приближения в этом направлении. Если величина перемещения взята не очень большой, то значение функции $\Psi(\mathbf{x})$ обязательно уменьшится.

Последовательные приближения методов спуска можно записать в виде:

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} + \lambda^{(n-1)} \cdot v_i^{(n-1)}, \quad (5.54)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $n = 1, 2, \dots$. Эти приближения сходятся к некоторому решению x_i при $n \rightarrow \infty$. Различные методы спуска отличаются выбором направления n -го шага, то есть величины $v_i^{(n-1)}$. Величина шага определяется параметром $\lambda^{(n-1)}$.

Метод покоординатного спуска характеризуется тем, что на каждом шаге изменяется только одна из неизвестных x_i с целью нахождения минимума функции Ψ по одной этой координате. Затем изменяется следующая координата x_{i+1} и процесс повторяется циклически до достижения заданной точности.

Релаксационный метод характеризуется тем, что на каждом шаге также изменяется только одна из неизвестных x_i , но так, чтобы уменьшить наибольшую по модулю невязку F_i .

Метод наискорейшего спуска или градиентный метод заключается в следующем. Необходимое условие минимума функции Ψ состоит в равенстве нулю всех частных производных от функции Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.55)$$

Градиентом функции Ψ называется вектор $\text{grad} \Psi$, k -ая компонента которого равна частной производной $\partial \Psi / \partial x_k$. Поэтому выражение (5.55) можно записать как

$$\text{grad} \Psi = 0. \quad (5.56)$$

Функция Ψ убывает быстрее всего в направлении, обратном направлению ее градиента. Если положить в (5.54)

$$v_i^{(n-1)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad (5.57)$$

то получим:

$$x_i^{(n)} = x_i^{(n-1)} - \lambda^{(n-1)} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.58)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n-1)} - \lambda^{(n-1)} \cdot \mathbf{g} \text{grad} \Psi, \quad (5.59)$$

где $\mathbf{g} \text{grad} \Psi$ означает столбец из компонент вектора $\text{grad} \Psi$:

$$\mathbf{g} \text{grad} \Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

В выражениях (5.58)-(5.60) производные вычисляются при $x_i = x_i^{(n-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а величину шага $\lambda^{(n-1)}$ уменьшают по мере приближения к минимуму функции Ψ .

Градиентный метод требует малой памяти ЭВМ. Основное его достоинство заключается в том, что его сходимость мало зависит от выбора начального приближения неизвестных. Поэтому иногда поступают так: в начале итерационного процесса используют градиентный метод, а затем после достаточного приближения к решению переходят на метод Ньютона, так как вблизи решения скорость итерационных методов спуска уменьшается, в то время как для метода Ньютона – увеличивается.

5.8. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

Наиболее общим методом исследования переходных электромеханических процессов в электрических системах является численное интегрирование дифференциальных уравнений.

Рассмотрим общий подход на примере дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y). \quad (5.61)$$

Рассмотрение одного уравнения первого порядка не уменьшает общности результатов, так как все методы численного интегрирования, применимые для уравнения (5.61), легко обобщить и для систем уравнений первого порядка, а дифференциальное уравнение n -го порядка можно свести к системе из n уравнений первого порядка. Пусть, например, имеется дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' = g(y', y, x). \quad (5.62)$$

Его можно переписать в виде:

$$\begin{cases} z' = g(z, y, x) \\ y' = z \end{cases}, \quad (5.63)$$

где z – новая независимая переменная, определяемая вторым уравнением, то есть получается система двух уравнений относительно y и z .

Как известно, общим решением дифференциального уравнения (5.61) называется решение, зависящее от произвольной постоянной интегрирования и содержащее все частные решения исходного уравнения. Очевидно, что подобное решение получить численными методами нельзя, поэтому численные методы используются для нахождения частного решения уравнения (5.61), удовлетворяющего заданному начальному условию:

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.64)$$

5.8.1. Метод Эйлера

Заменив в уравнении (5.61) производную y' отношением конечных малых приращений Δy и Δx , получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad (5.65)$$

откуда

$$\Delta y = f(x, y) \cdot \Delta x. \quad (5.66)$$

Зная начальные условия интегрирования (5.64), запишем приращение искомой функции на первом шаге в виде:

$$\Delta y_1 = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x \quad (5.67)$$

или

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1. \quad (5.68)$$

Аналогично получим приращения искомой функции на втором шаге и так далее. Отмечая индексом k значения переменных на k -ом шаге интегрирования, представим выражение (5.66) как

$$\Delta y_{k+1} = f(x_k, y_k) \cdot \Delta x \quad (5.69)$$

или

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x, \quad (5.70)$$

где $\Delta x = h$ – шаг интегрирования.

Рассмотрим геометрический смысл выражения (5.70). Производная – это тангенс угла наклона касательной L к интегральной кривой $y(x)$ в заданной точке (x_k, y_k) по отношению к оси абсцисс (рис. 5.1).

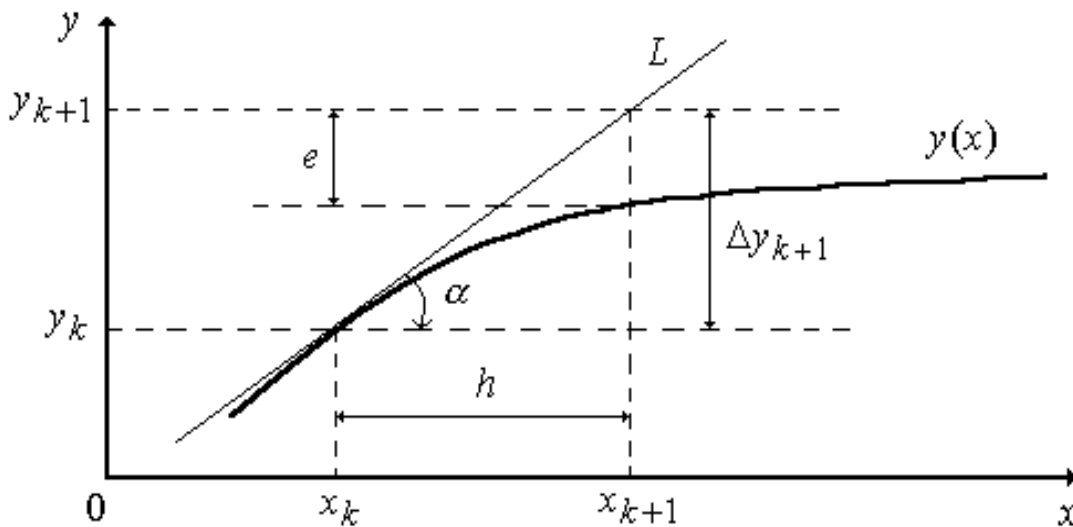


Рис. 5.1. Геометрический смысл уравнения (5.70)

Поэтому метод численного решения дифференциального уравнения сводится к замене реальной интегральной кривой конечным числом прямолинейных отрезков. При этом возникают ошибки двух видов: ошибка ограничения (или локальная ошибка интегрирования, показанная на рис. 5.1 отрезком e), и ошибка округления, накапливающаяся при каждом шаге интегрирования.

Для уменьшения ошибки ограничения e есть только один путь – уменьшение шага интегрирования h , что приводит в то же время к увеличению времени счета и увеличению ошибки округления.

Рассмотренный метод называется методом Эйлера. Это один из самых старых и широко известных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений. Он имеет довольно большую ошибку ограничения и часто оказывается неустойчивым, то есть первоначально малая ошибка увеличивается с ростом x .

5.8.2. Метод рядов Тейлора

Метод рядов Тейлора теоретически пригоден для решения любых дифференциальных уравнений, но с вычислительной точки зрения неудобен. Однако этот метод может служить эталоном для других методов, поскольку все они согласуются с разложением в ряд Тейлора.

Если функция $y(x)$ в окрестности точки x достаточное число раз дифференцируемая, то для нахождения ее значения при $x+h$ можно разложить ее в ряд Тейлора:

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = \sum_{m=1}^n \frac{y^{(m)} \cdot h^m}{m!} + O(h^{n+1}), \quad (5.71)$$

где все производные $y^{(m)}$ вычислены в исходной точке x , а выражение $O(h^{n+1})$ означает, что в следующие члены ряда величина h входит в степени, не ниже $n+1$, то есть ошибка ограничения в первом приближении равна:

$$e = K \cdot h^{n+1}, \quad (5.72)$$

где K – некоторая константа. С практической точки зрения трудность этого метода заключается в необходимости вычисления производных, вид которых усложняется с ростом порядка n .

Все методы интегрирования согласуются с разложением Тейлора. Так, метод Эйлера, рассмотренный выше, является методом первого порядка, в котором выражение (5.70) согласуется с разложением Тейлора до членов с первой степенью h , то есть в первом приближении ошибка ограничения этого метода равна $K \cdot h^2$.

Таким образом, каждый метод интегрирования характеризуется порядком. Чем выше порядок метода, тем выше его точность. Возможны два подхода к увеличению точности численного интегрирования дифференциальных уравнений. Первый – это нахождение промежуточных значений функции $f(x, y)$ на интервале $(x_k, x_k + h)$, а второй – использование значений функции $f(x, y)$ на предыдущих шагах интегрирования. Первый подход соответствует одношаговым методам, а второй – многошаговым.

Одношаговые методы используют только информацию о самой кривой в одной точке и не производят итераций. Эти методы являются самоначинающимися и прямыми (без итераций). Они имеют тот недостаток, что при их использовании трудно оценивать допускаемую ошибку.

Многошаговые методы для нахождения следующей точки кривой не производят так много повторных вычислений функции, как одношаговые методы, но для достижения достаточной точности используют итерации. Большинство методов этого класса называются методами прогноза и коррекции. С помощью этих методов невозможно начать интегрирование, поскольку они не содержат предшествующей информации о ходе решения уравнения. Но это уравнивается тем фактом, что оценку ошибки при использовании этих методов легко получить в качестве побочного результата вычислений. Эти два класса методов можно сочетать разумным образом, учитывая их достоинства и недостатки.

5.8.3. Методы Рунге-Кутты

К первому классу методов относится широкая категория методов, известных под общим названием методов Рунге-Кутты. Эти методы обладают следующими свойствами:

1) являются одношаговыми, то есть, чтобы найти y_{k+1} , необходима информация только о предыдущей точке (x_k, y_k) ;

2) согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p , где p – порядок метода;

3) не требуют вычисления производных от $f(x, y)$, а требуют только вычислений самой функции.

Именно благодаря третьему свойству методы Рунге-Кутты более удобны для практических вычислений, нежели ряд Тейлора.

Однако для вычисления одной последующей точки решения придется вычислять функцию $f(x, y)$ несколько раз при разных значениях x и y . Это та цена, которую приходится платить за право не вычислять никаких производных, но цена умеренная.

Рассмотренный ранее метод Эйлера является методом Рунге-Кутты первого порядка. Причина значительной погрешности метода Эйлера заключается в том, что для экстраполяции используется наклон касательной только в начальной точке (x_k, y_k) .

В методах Рунге-Кутты второго порядка для экстраполяции используется усредненный наклон касательных на шаге интегрирования. Методы Рунге-Кутты описываются общей формулой вида:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \Phi(x_k, y_k, h). \quad (5.73)$$

Усреднить тангенс угла наклона касательной на шаге интегрирования можно разными способами. Из них можно выделить два – это исправленный метод Эйлера и модифицированный метод Эйлера. Оба они не что иное, как два метода из семейства методов Рунге-Кутты второго порядка.

В исправленном методе Эйлера находится средний тангенс угла наклона касательной для двух точек: (x_k, y_k) и $(x_k + h, y_k + h \cdot y'_k)$, где

$$y'_k = f(x_k, y_k). \quad (5.74)$$

Имеем две касательные – L_1 и L_2 (рис. 5.2). Средняя касательная – \bar{L} . Через точку (x_k, y_k) проводим прямую L , параллельную \bar{L} . Точка, в которой прямая L пересекает ординату при x_{k+1} , и будет искомой точкой (x_{k+1}, y_{k+1}) . Функция Φ в этом случае запишется как

$$\Phi = 0,5 \cdot [f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k))]. \quad (5.75)$$

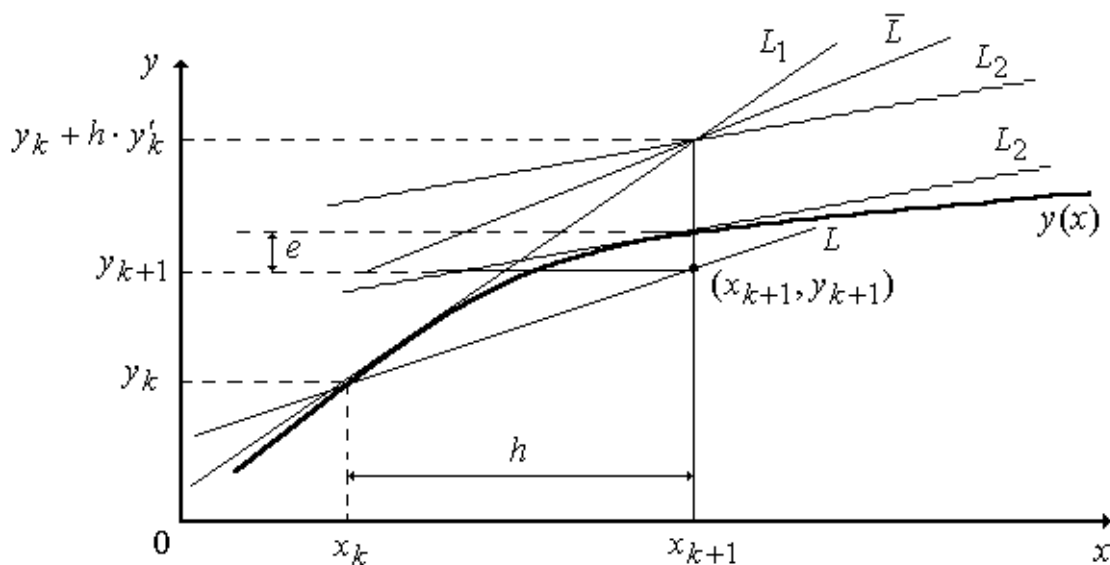


Рис. 5.2. Геометрическая интерпретация исправленного метода Эйлера

В исправленном методе Эйлера усредняются наклоны касательных. Можно поступить иначе, определив тангенс угла наклона касательной в средней точке интервала экстраполяции (или шага интегрирования, см. рис. 5.3). Это будет соответствовать модифицированному методу Эйлера и для него:

$$\Phi = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right). \quad (5.76)$$

В общем случае для всех методов Рунге-Кутты второго порядка общая форма записи есть:

$$\Phi = (1-\omega) \cdot f(x_k, y_k) + \omega \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2 \cdot \omega}, y_k + \frac{h}{2 \cdot \omega} \cdot f(x_k, y_k)\right). \quad (5.77)$$

При $\omega = 1/2$ из (5.77) получается (5.75), то есть исправленный метод Эйлера, а при $\omega = 1$ из (5.77) следует (5.76), то есть модифицированный метод Эйлера. Для всех $\omega \neq 0$ ошибка ограничения для этих методов равна:

$$e = K \cdot h^3, \quad (5.78)$$

то есть оба метода согласуются с разложением в ряд Тейлора вплоть до членов степени h^2 . Можно показать, что наименьший верхний предел $|K|$ (то есть наименьшая ошибка ограничения) получается при $\omega = 2/3$.

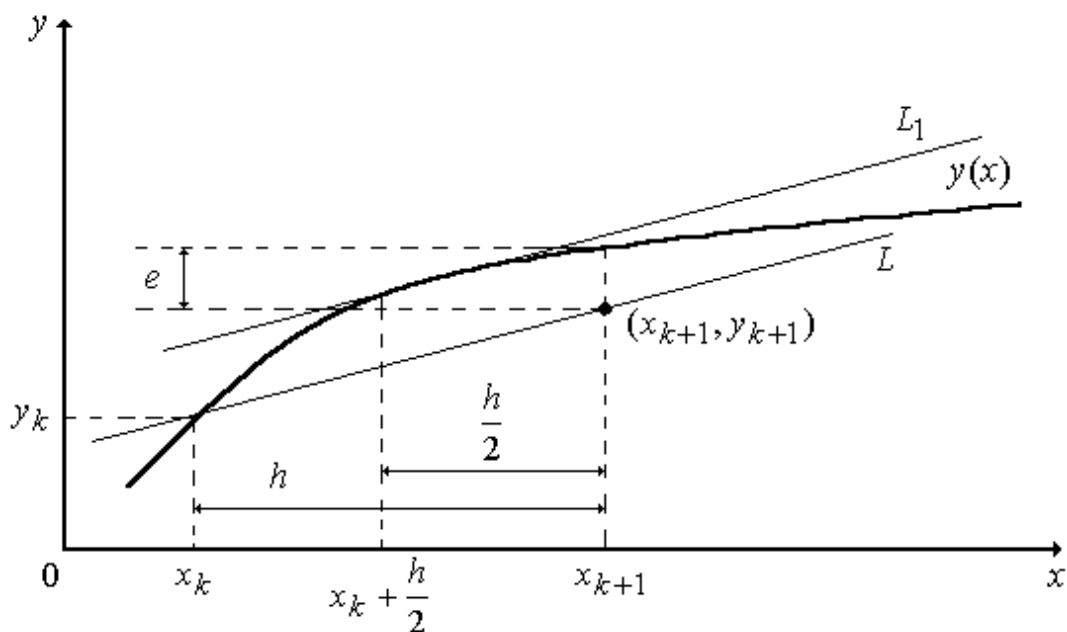


Рис. 5.3. Геометрическая интерпретация модифицированного метода Эйлера

Методы Рунге-Кутты третьего и четвертого порядка можно вывести аналогично. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка – один из самых употребительных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Он применяется настолько широко, что часто называется просто «метод Рунге-Кутты» без всяких указаний на тип или порядок. Этот классический метод Рунге-Кутты описывается следующими соотношениями:

$$\Phi = \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}, \quad (5.79)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\ k_4 = f(x_k + h, y_k + h \cdot k_3) \end{array} \right. \quad (5.80)$$

Ошибка ограничения для этого метода равна

$$e = K \cdot h^5, \quad (5.81)$$

так что формулы (5.79)-(5.80) описывают метод четвертого порядка. При использовании этого метода функцию f необходимо вычислять четыре раза на каждом шаге.

Методы Рунге-Кутты – самонастраиваемые. Один из их недостатков – сложность оценки локальной ошибки интегрирования. Поэтому при реализации этих методов иногда применяют автоматический выбор шага интегрирования. Для этого вычисляют значение искомой функции в каждой точке с полным и половинным шагом и сравнивают два полученных значения. Если модуль разности между ними окажется меньше некоторого заданного положительного числа, то считается, что интегрировать с этим шагом можно; если же это не так, то шаг делится пополам. Этот метод выбора шага приводит к увеличению времени счета как минимум в три раза по сравнению с методом постоянного шага.

Другим недостатком методов Рунге-Кутты является то, что приходится вычислять значения функции в нескольких промежуточных точках. Это не рационально, поскольку если процесс интегрирования уже продвинулся на несколько шагов, то, значит, имеется дополнительная информация, для использования которой вообще не нужно вычислять никаких функций – это информация о предыдущих точках решения. В методах Рунге-Кутты информация о предыдущих точках решения не используется.

Существуют другие методы численного решения дифференциальных уравнений, которые не обладают этим недостатком и известны под общим названием методов прогноза и коррекции.

5.8.4. Методы прогноза и коррекции

Эти методы являются многошаговыми и отличаются тем, что с их помощью нельзя начать решение дифференциального уравнения, так как в них не только возможно, но и необходимо использовать информацию о предыдущих точках решения. Чтобы начать решение дифференциального уравнения, имея только одну точку, определяемую начальным условием, или для того, чтобы изменить шаг интегрирования h , необходим одношаговый метод типа метода Рунге-Кутты. Поэтому приходится использовать разумное сочетание одношаговых и многошаговых методов решения.

В методах прогноза и коррекции вначале «предсказывается» значение y_{k+1} , а затем используется тот или иной метод «корректировки» этого значения. После этого можно использовать ту же самую формулу для вторичной корректировки.

Этот итерационный процесс можно повторять сколько угодно раз, но из соображений эффективности целесообразно уменьшать число итераций, выбирая должным образом шаг интегрирования.

Для прогноза можно, например, использовать формулу второго порядка:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_{k-1} + 2 \cdot h \cdot f(x_k, y_k), \quad (5.82)$$

где верхний индекс (0) означает исходное приближение к y_{k+1} , то есть предсказанное значение. Из формулы (5.82) следует, что с ее помощью нельзя вычислить y_1 . Это и понятно, так как для вычисления y_1 потребовалась бы точка, расположенная перед начальной точкой y_0 . Чтобы начать решение с помощью метода прогноза и коррекции, часто используется метод Рунге-Кутты, в нашем случае второго порядка.

Далее производятся последовательные корректировки значения y_{k+1} по итерационной формуле:

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot [f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^{(i-1)})], \quad (5.83)$$

где $i = 1, 2, \dots$

Итерационный процесс прекращается, когда

$$\left| y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}^{(i)} \right| < \varepsilon \quad (5.84)$$

для заданного ε .

Оценка ошибки вычисляется по простой формуле:

$$e = \frac{y_k^{(0)} - y_k^{(i)}}{5}. \quad (5.85)$$

Таким образом, метод прогноза и коррекции дает в качестве побочного продукта вычислений оценку ошибки ограничения.

После окончания всех итераций по методу прогноза и коррекции второго порядка более точное приближение можно найти, вводя окончательную поправку, вытекающую из оценки ошибки (5.85):

$$y_k = y_k^{(i)} + \frac{y_k^{(0)} - y_k^{(i)}}{5}. \quad (5.86)$$

Существуют методы прогноза и коррекции более высоких порядков, обеспечивающие большую точность решения. Для «запуска» этих методов требуются более точные одношаговые методы, такие как метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе шага интегрирования h . К сожалению, не существует формул для выбора шага интегрирования до начала решения задачи. Однако, как только вычисления начались, можно оценить ошибку ограничения по формуле (5.85). Если эта ошибка слишком велика, то величину шага можно уменьшить вдвое; если же ошибка гораздо меньше допустимой, то величину шага целесообразно увеличить вдвое. Очевидно, что чем меньше величина h , тем скорее сойдется итерационный процесс. Но если взять слишком малое h , то на каждую точку потребуется немного итераций, но количество точек будет велико, что приведет к увеличению ошибки округления. Если же взять большое h , то на каждую точку будет затрачено больше итераций, но само количество точек будет меньше. При всех прочих равных условиях желательно программу составить так, чтобы затраты машинного времени были минимальными. Существуют эмпирические соображения, согласно которым оптимальное число итераций равно двум. Под оптимальностью понимается минимальный объем вычислений при заданной точности, то есть шаг интегрирования нужно выбрать так, чтобы критерий сходимости итерационного процесса выполнялся после двух итераций. Этот критерий легко запрограммировать. Подсчитывается количество итераций. Если требуется более двух итераций, то величина шага уменьшается, а если достаточно одной итерации, то шаг можно увеличить.

Однако при изменении шага интегрирования формулу прогноза уже нельзя применять непосредственно. На практике вычисления в случае изменения шага прекращаются и точка (x_k, y_k) принимается за новую начальную точку. Далее, начиная от этой точки, методом Рунге-Кутты ищется точка решения с новым шагом интегрирования, а затем уже решение продолжается по методу прогноза и коррекции.

Контрольные вопросы

1. Как решить систему линейных уравнений методом Гаусса с обратным ходом?
2. Приведите формулы для преобразования элементов матрицы коэффициентов и столбца свободных членов на k -ом шаге прямого хода метода Гаусса с обратным ходом.
3. Как определяются неизвестные на этапе обратного хода метода Гаусса?
- 4) Как решить систему линейных уравнений методом Гаусса без обратного хода?
- 5) Приведите формулы для преобразования элементов матрицы коэффициентов и столбца свободных членов на k -ом шаге метода Гаусса без обратного хода.
- 6) Оцените сравнительную вычислительную эффективность обоих алгоритмов метода Гаусса.
- 7) Что влияет на точность решения системы уравнений методом Гаусса?
- 8) В чем состоит схема главного элемента в алгоритме метода Гаусса?
- 9) Как решить систему линейных уравнений методом обращения матрицы коэффициентов?
- 10) В чем состоит алгоритм обращения матрицы методом Гаусса без обратного хода?
- 11) Как решить систему нелинейных уравнений методом простой итерации?
- 12) Какие факторы влияют на сходимость итерационного процесса?
- 13) В чем состоит метод итераций Зейделя и чем он отличается от метода простой итерации?
- 14) Как решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона?
- 15) Что такое матрица Якоби?
- 16) Что называют Якобианом?
- 17) В чем состоит метод покоординатного спуска?
- 18) В чем заключается релаксационный метод?
- 19) Как решить систему нелинейных уравнений методом наискорейшего спуска или градиентным методом?
- 20) В чем состоит метод Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений?

21) Приведите геометрическую интерпретацию метода Эйлера.

22) В чем состоит метод рядов Тейлора численного интегрирования дифференциальных уравнений?

23) Чем отличаются одношаговые методы от многошаговых методов численного интегрирования дифференциальных уравнений?

24) Чем отличается ошибка ограничения от ошибки округления?

25) В чем заключаются методы Рунге-Кутты численного интегрирования дифференциальных уравнений?

26) Что такое исправленный метод Эйлера и какова его геометрическая интерпретация?

27) Что такое модифицированный метод Эйлера и какова его геометрическая интерпретация?

28) Приведите формулы, описывающие метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

29) В чем заключаются методы прогноза и коррекции численного интегрирования дифференциальных уравнений?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – М.: Гардарики, 2007.
2. Веников В.А. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс, И.М. Маркович и др. – М.: Высшая школа, 1981.
3. Идельчик В.И. Электрические системы и сети / В.И. Идельчик. – М.: Энергоатамиздат, 1989.
4. Веников В.А. Электрические системы. Электрические расчеты, программирование и оптимизация режимов / В.А. Веников, В.И. Горушкин, И.М. Маркович, Н.А. Мельников Н.А. и др. – М.: Высшая школа, 1973.
5. Веников В.А. Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей / В.А. Веников, Л.А. Жуков, Г.Е. Поспелов. – М.: Высшая школа, 1975.
6. Астахов Ю.Н. Электрические системы. Кибернетика электрических систем / Ю.Н. Астахов, В.А. Веников, Ю.М. Горский, Д.Д. Карасев и др. – М.: Высшая школа, 1974.
7. Веников В.А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики) / В.А. Веников – М.: Высшая школа, 1976.
8. Морозов В.Г. Математическое моделирование задач электроэнергетики на ЭВМ / В.Г. Морозов. – М.: МЭИ, 1991.
9. Константинов В.Н. Моделирование режимов работы электроэнергетических систем / В.Н. Константинов. – Казань.: Казан. гос. энерг. ун-т, 2010.
10. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике / В.С. Зарубин. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
11. Копылов И.П. Электрические машины / И.П. Копылов. – М.: Высшая школа, 2006.
12. Рыжиков Ю.И. Вычислительные методы / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА	
1.1. Режимы и параметры электрической системы	4
1.2. Схема замещения электрической системы	5
1.3. Электрическая система трехфазного переменного тока	6
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	
2.1. Электроэнергетическая система и ее схема замещения	11
2.2. Уравнения состояния электрической цепи	14
2.3. Элементы теории графов	20
2.4. Первая матрица инцидентий	22
2.5. Вторая матрица инцидентий	24
2.6. Связь между первой и второй матрицами инцидентий	25
2.7. Нахождение второй матрицы инцидентий по известной первой матрице инцидентий	27
2.8. Обобщенное уравнение состояния	31
2.9. Метод контурных токов	36
2.10. Метод узловых напряжений	40
2.11. Нелинейные узловые уравнения состояния электрической системы	45
ГЛАВА 3. КОРОТКИЕ ЗАМЫКАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	
3.1. Виды коротких замыканий, их причины и последствия	51
3.2. Расчет токов трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения методом эквивалентирования схемы замещения	55
3.3. Расчет токов трехфазного короткого замыкания в начальный момент возмущения метод узловых напряжений и методом наложения	61
3.4. Определение тока короткого замыкания в заданный момент времени методом типовых кривых	68
ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ	
4.1. Переходный процесс в простейшей трехфазной цепи	72
4.2. Преобразование уравнений трехфазной электрической цепи к системе координат $\alpha, \beta, 0$	77

4.3. Преобразование уравнений трехфазной электрической цепи к вращающейся системе координат $d, q, 0$	81
4.4. Преобразование уравнений синхронной машины к системе координат $d, q, 0$	83
4.5. Математическое моделирование синхронных машин	90
4.6. Устойчивость электрических систем	94
4.7. Математическая модель синхронного генератора для расчета динамической устойчивости	94
4.8. Динамическая устойчивость электропередачи	96
4.9. Статическая устойчивость электрических систем	102
4.10. Алгебраические критерии статической устойчивости	108
ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	
5.1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса с обратным ходом	114
5.2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса без обратного хода	119
5.3. Решение систем линейных уравнений методом обращения матрицы коэффициентов	122
5.4. Решение систем нелинейных уравнений методом простой итерации	125
5.5. Решение систем нелинейных уравнений методом Зейделя	127
5.6. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона	128
5.7. Решение систем нелинейных уравнений методами спуска	130
5.8. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений	132
5.8.1. Метод Эйлера	133
5.8.2. Метод рядов Тейлора	135
5.8.3. Методы Рунге-Кутты	136
5.8.4. Методы прогноза и коррекции	140
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	145

Учебное издание

Константинов Валерий Николаевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РЕЖИМОВ РАБОТЫ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие
по дисциплине
«Математическое моделирование в электроэнергетике»

Кафедра электрических станций КГЭУ

Редактор редакционно-издательского отдела Н.И. Оморова
Компьютерная верстка Н.И. Оморова
Дизайн обложки Ю.Ф. Мухаметшина

Подписано в печать 16.12.2014.

Формат 60×84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 8,72. Уч.-изд. л. 9,67. Тираж 500 экз. Заказ №4862.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,
420066, Казань, Красносельская, 51