МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Часть 3

Казань 2017

УДК 517.1
ББК 22.1
В93

В93 **Высшая математика:** практикум. Часть 3 / А.В. Антонова, А.С. Никитин, А.С. Ситдиков. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2017. – 102 с.

Практикум состоит из отдельных практических занятий, проводимых преподавателями по высшей математике со студентами первого курса. Каждое практическое занятие содержит необходимый теоретический материал, разобранные примеры решения задач, а также набор задач для самостоятельного решения студентами в аудитории или дома. Среди задач имеются как простые типовые задачи, так и задачи повышенного уровня сложности.

Предназначен для студентов очной формы обучения по направлениям подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 12.03.01 «Приборостроение», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 27.03.04 «Управление в технических системах», 16.03.01 «Техническая физика», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 20.03.01 «Техносферная безопасность».

УДК 517.1
ББК 22.1

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум по дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов первого курса очной формы обучения по направлениям: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 12.03.01 «Приборостроение», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 27.03.04 «Управление в технических системах», 16.03.01 «Техническая физика», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 20.03.01 «Техносферная безопасность».

Дисциплина «Высшая математика» относится к базовой части основной образовательной программы подготовки бакалавров по данным направлениям.

Практикум содержит темы, которые соответствуют программе 2 семестра и изложены в виде практических занятий. Каждое практическое занятие содержит теоретический материал, разобранные примеры и задачи для самостоятельного решения.

В процессе освоения дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие компетенции:

1) Для направлений подготовки 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 12.03.01«Приборостроение», 16.03.01 «Техническая физика», 27.03.04 «Управление в технических системах»:

– способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики (ОПК-1);

– способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико- математический аппарат (ОПК-2).

2) Для направлений подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.03.03 «Энергетическое машиностроение»:

– способность применять соответствующий физико- математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретические и экспериментальные исследования при решении профессиональных задач (ОПК-2).

3) Для направления подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»:

– способность использовать фундаментальные законы природы и основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности (ОПК-1);

– способность участвовать в разработке обобщенных вариантов решения проблем, выборе на основе анализа вариантов оптимального решения (ОПК-4);

– способность к самообразованию (ОК-5).

4) Для направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность»:

– способность к познавательной деятельности (ОК-10);

– способность к абстрактному и критическому мышлению, исследованию окружающей среды для выявления ее возможностей и ресурсов, способность к принятию нестандартных решений и разрешению проблемных ситуаций (ОК-11);

– способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач (ПК-22).

В результате освоения дисциплины «Высшая математика» за 2 семестр студенты должны демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основные понятия и утверждения теории рядов;

– основные понятия и утверждения теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов;

– основные понятия и утверждения математической теории поля;

– основные понятия и утверждения теории уравнений математической физики;

уметь:

– решать задачи с применением теории рядов;

– решать задачи с применением теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов;

– решать задачи по основам теории поля;

владеть:

– основными методами разложения функций в степенные ряды и ряды Фурье;

– основными методами вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов;

– основными методами решения задач по основам теории поля.

Практическое занятие № 1

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Числовым рядом называется выражение вида:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} u_n,$$

где u_1, u_2, …, $u_n \ldots$ – вещественные числа, которые образуют бесконечную числовую последовательность, u_n – общий член ряда, где $n \in N$ (N – множество натуральных чисел).

Частичной суммой S_n ряда называется сумма n первых членов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся и S – его сумма, а $R_n = S - S_n$ – остаток ряда. Если же $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует или бесконечен, ряд называется **расходящимся**.

В редких случаях можно определить сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением. Поэтому необходимо знать правила (признаки), по которым можно судить о сходимости или расходимости ряда. Разобъем числовые ряды на два класса: 1) ряды с положительными членами (знакоположительные) и 2) ряды с членами разных знаков (знакочередующиеся и знакопеременные).

Для каждого класса сформулируем правила исследования на сходимость.

I. *Необходимый признак сходимости знакоположительных рядов*

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть из того факта, что выполняется условие $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ еще не следует, что ряд обязательно сходится, он может и расходиться. Поэтому необходимый признак дает однозначный ответ на вопрос о сходимости ряда только тогда, когда выполняется условие $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$. В этом случае рассматриваемый знакоположительный ряд обязательно расходится.

Пример 1. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n+5}$.

Решение. Применяем необходимый признак: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+5} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

II. *Признак сравнения.*

Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные.

а) Если члены данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, начиная с некоторого номера, меньше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

б) Если члены данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, начиная с некоторого номера, больше членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

При использовании признаков сравнения надо знать ряды, с которыми можно сравнить данный ряд. К ним относятся:

1) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$, которые составлены из членов бесконечной геометрической прогрессии; при $|q| < 1$ эти ряды сходятся, при $|q| \geq 1$ расходятся;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ – ряд Дирихле, при $p > 1$ сходится, при $p \leq 1$ расходится. При $p = 1$ ряд Дирихле часто называют гармоническим рядом, а при $p \neq 1$ – обобщенным гармоническим рядом.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ составлен из членов геометрической прогрессии (a = 1, q = 1/5) и сходится, т. к. $q < 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$ – ряд Дирихле при $p = 10 > 1$, и он сходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится, т. к. $p = \frac{1}{3} < 1$.

III. *Предельный признак сравнения.*

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\neq 0$, то два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ одновременно сходятся или расходятся.

Пример 2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2-3}{n^3+7n}$.

Решение. Ряд знакоположительный, общий член ряда $u_n=\frac{6n^2+3}{n^3+7n}$. Воспользуемся предельным признаком сравнения. В общем члене ряда оставим только старшие степени в числителе и знаменателе: $v_n=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как ряд Дирихле при $p=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3}{n^3+7n}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(6n^2+3\right)\cdot n}{n^3+7n}=6\neq 0.$$

Данный ряд расходится, т. к. расходится ряд, с которым сравнивали.

IV. *Признак Даламбера.*

Дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится, при $k>1$ – расходится, при $k=1$ признак не применим.

Пример 3. Исследуйте на сходимость ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{n^3}{(2n)!}=\frac{n^3}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n};$$

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}=\frac{(n+1)^3}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}:\frac{n^3}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(2n)!}{\text{n}^3\cdot(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}{n^3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=0<1$$

Данный ряд сходится.

V. *Радикальный признак Коши.*

Дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, при $q=1$ признак не применим.

Замечание. При решении примеров радикальный признак Коши целесообразнее применять в том случае, когда корень n-ой степени из общего члена ряда легко извлекается.

Пример 4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Ряд знакоположительный, $u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Согласно радикальному признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\cdot\frac{1}{2}=\frac{e}{2},$$

и так как $\frac{e}{2}\approx1{,}35>1\Rightarrow$ ряд расходится.

VI. *Интегральный признак Коши.*

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – знакоположительный и его члены не возрастают, т. е. $u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots$,и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(n)=u_n$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Пример 5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Так как

$$f(n)=u_n=\frac{n}{e^{n^2}},\ f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}.$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{e^{x^2}}=\int\limits_1^{\infty}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty}e^{-x^2}(-2xdx)=-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty}e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}e^{-x^2}d(-x^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}e^{-x^2}\Big|_1^A=-\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{e^{A^2}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}$$ – конечное число $\Rightarrow$ интеграл сходится $\Rightarrow$ ряд сходится.

Перейдем к вопросу о сходимости знакопеременных рядов.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из его модулей. Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся, поэтому если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, причем абсолютно. Если ряд из модулей расходится, то знакопеременный ряд может сходиться (тогда он называется условно сходящимся), а может и расходиться. Для знакочередующихся рядов справедлив признак сходимости, установленный Лейбницем.

VII. *Признак Лейбница.*

Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$ и выполняются условия: 1) $u_1>u_2>\ldots>u_n>\ldots$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. Здесь $u_1,u_2,u_3,..u_n...$ - положительные числа. Тогда знакочередующийся ряд сходится и его сумма удовлетворяет условию $0<S<u_1$.

Следствие. Остаток ряда всегда удовлетворяет условию $|R_n|<u_{n+1}$.

Пример 6. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

Решение. Ряд знакопеременный, так как $\cos n\alpha$ может принимать и положительные, и отрицательные значения. Составим ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ и применим признак сравнения. Так как $|\cos n\alpha|\le 1$, то для сравнения подберем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится как ряд из членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}<1$. Сравним общие члены двух рядов: $\dfrac{|\cos n\alpha|}{2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ сходится $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{2^n}$ сходится, причем абсолютно.

Пример 7. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{4n+1}$.

Решение. Ряд знакопеременный. Составляем ряд из его модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{4n+1}$. Применим необходимый признак: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{4n+1}=\dfrac{1}{4}\ne 0\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{4n+1}$ расходится. Является ли данный ряд знакочередующимся? Да, является. Проверяем условия Лейбница. Условие $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ не выполняется, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{4n+1}$ расходится.

Признак Лейбница позволяет найти сумму знакочередующегося ряда с определенной, заданной точностью.

Пример 8. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2\cdot 2^n}$ с точностью δ = 0,001.

Решение. Так как данный ряд – знакочередующийся и сходящийся (выполняются оба условия признака Лейбница), то величина отброшенного при вычислении остатка ряда, который также является знакочередующимся рядом, не превосходит первого отброшенного члена (на основании следствия из признака Лейбница. Нужное число членов n найдем путем подбора из неравенства $\dfrac{1}{n^2\cdot 2^n}\le 0{,}001$. При n = 6 последнее неравенство выполняется, значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Следовательно,

$$S\approx S_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}-\frac{1}{256}+\frac{1}{800}=0{,}449.$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследуйте на сходимость следующие ряды:

1. $u_n = \dfrac{3n+1}{5^n}$

Ответ: сходится.

2. $u_n = \dfrac{2n+1}{n^4+2}$

Ответ: сходится.

3. $u_n = \dfrac{n^n}{(n+3)!}$

Ответ: расходится.

4. $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$

Ответ: сходится.

5. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Ответ: сходится.

6. $u_n = \dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{5^n}$

Ответ: расходится.

Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{(n+1)!}$

Ответ: сходится абсолютно.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$

Ответ: сходится абсолютно.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{(n+1)!}$

Ответ: сходится абсолютно.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

Ответ: сходится условно.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

Ответ: сходится абсолютно.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3+1}$

Ответ: сходится абсолютно.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4+1}$

Ответ: сходится абсолютно.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Ответ: сходится условно.

С помощью интегрального признака Коши исследуйте на сходимость следующие ряды :

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2n+5}$

Ответ: сходится.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$

Ответ: сходится.

17. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(0,6)^n}{n^2+1}$, ограничившись тремя его членами. Оцените абсолютную погрешность вычислений. (Ответ: S = 0,250, δ = 0,008.)

Практическое занятие № 2

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \qquad (2.1)$$

где функции $u_i(x)(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ определены в некоторой области *D*.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (2.2)$$

где $a_0, a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – постоянные числа, называемые **коэффициентами ряда**, x_0 – фиксированное число. При $x_0=0$ получаем степенной ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n \qquad (2.3)$$

(ряд по степеням x).

Ряд (2.3) может быть получен из ряда (2.2) заменой $x-x_0=t$.

Множество значений x, при которых степенной ряд сходится, называется **областью сходимости ряда**. Число R – половина длины интервала сходимости – называется **радиусом сходимости степенного ряда**. В частности, если $R=0$, то степенной ряд (2.3) сходится только в одной точке $x=0$, а степенной ряд (2.2) сходится в точке $x=x_0$. При $R=\infty$ степенной ряд сходится на всей числовой оси. Для отыскания радиуса сходимости можно использовать признаки Даламбера и Коши:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}; \qquad (2.4)$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}, \tag{2.5}$$

если этот предел (конечный или бесконечный) существует. Если радиус сходимости найден, то интервал сходимости для ряда (2.3) будет $(-R;\ R)$ с центром в точке $x=0$, а для ряда (2.2) $(x_0-R; x_0+R)$ с центром в точке $x=x_0$.На концах интервала сходимости степенной ряд может сходиться или расходиться, поэтому нужны дополнительные исследования.

Пример 1. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$u_n(x)=\frac{5^n\cdot x^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}},\ \text{где}\ a_n=\frac{5^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}},$$

$$|a_n|=\frac{5^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}};\qquad |a_{n+1}|=\frac{5^{n+1}}{\sqrt{(2(n+1)+1)\cdot 3^{n+1}}}=\frac{5^{n+1}}{\sqrt{(2n+3)\cdot 3^{n+1}}}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt{(2n+3)\cdot 3^{n+1}}}{5^{n+1}\sqrt{(2n+1)\cdot 3^n}}=\frac{\sqrt{3}}{5}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Центр интервала в точке $x=0$, так как ряд по степеням x.

Исследуем ряд на концах интервала.

При $x=-\frac{\sqrt{3}}{5}$ получим числовой знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Ряд знакочередующийся.

Условия Лейбница: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{7}}>\frac{1}{\sqrt{9}}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ выполняются $\Rightarrow$ ряд сходится.

При $x=\frac{\sqrt{3}}{5}$ получим знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Подберем ряд для сравнения: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\quad v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

По предельному признаку сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0\Rightarrow$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ расходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как ряд Дирихле при $n=\frac{1}{2}<1$.

Следовательно, область сходимости степенного ряда $-\frac{\sqrt{3}}{5}\le x<\frac{\sqrt{3}}{5}$ или $\mathbf{[}-\frac{\sqrt{3}}{5}\mathbf{;}\frac{\sqrt{3}}{5}\mathbf{)}$.

Пример 2. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Решение. Здесь формулы для радиуса сходимости напрямую не работают, т.к. все нечётные коэффициенты a_n равны 0. Замена: $x^2=t$ позволяет записать ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{(2k)!}$$

откуда
$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2(k+1))!}}{\frac{1}{(2k)!}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=0$$

следовательно $R=+\infty$, т.е. ряд сходится при любых значениях x (можно показать, что его суммой является функция $\mathbf{cos}\,x$).

Пример 3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\cdot\sqrt{n+1}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле (2.4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}{2^n\cdot\sqrt{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=2,$$

т.е. ряд сходится в интервале (0; 4). При $x=0$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится, что видно из сравнения его с расходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, а при $x=4$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, сходящийся по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости исследуемого степенного ряда есть (0; 4].

Пример 4. Найдите область сходимости степенного ряда:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

Решение.

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right|=1$$

т.е. ряд сходится в интервале (–1; 1).

Можно показать, что $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, т.е. ряд сходится и при $x=1$. При $x=-1$ ряд расходится, так как сводится к гармоническому ряду. Область сходимости (–1; 1].

Пример 5. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-k+1)}{k!}x^k.$$

Решение. $$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=1,\ \text{т.е.}$$

$R=1$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите область сходимости следующих степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$

Ответ: –6;6.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$

Ответ: 2; 2.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$

Ответ: 3; 5.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$

Ответ: 0; 2.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Ответ: –1; 1.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$

Ответ: 0; 4.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$

Ответ: –e–10; e–10.

Практическое занятие № 3

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Определение 3.1. ***Рядом Тейлора*** *по степеням* $(x-x_0)$ *некоторой функции* $f(x)$ *называется степенной ряд* $f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$. *При* $x_0=0$ *ряд Тейлора имеет вид*

$f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ *и называется* ***рядом Маклорена*** *(по степеням* x*).*

Выпишем разложение в степенной ряд Маклорена некоторых функций (в скобках указан интервал сходимости ряда):

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots\qquad(-\infty<t<\infty);\tag{3.1}$$

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\ldots\qquad(-\infty<t<\infty);\tag{3.2}$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\frac{t^8}{8!}-\ldots\qquad(-\infty<t<\infty);\tag{3.3}$$

$$(1+t)^m=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots[m-(n-1)]}{n!}t^n+\ldots(-1<t<1);\tag{3.4}$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}+\ldots\qquad(-1<t\le 1);\tag{3.5}$$

$$\operatorname{arctg}t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots\qquad(-1\le t\le 1).\tag{3.6}$$

Разложение функций в степенные ряды применяется в различных приближенных вычислениях, таких как вычисление значений функции, вычисление определенных интегралов, а также для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Пример 1. Вычислить $\sin\frac{1}{2}$ с точностью $\delta = 10^{-3}$.

Решение. Подставим в формулу(3.2) приведенного выше списка разложений $t = \frac{1}{2}$. Тогда $\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \frac{1}{5!\cdot 2^5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!\cdot 2^{2n-1}} + \ldots$.

Так как остаток знакочередующегося ряда $|R_n| < u_{n+1}$, то достаточно найдите первый член u_{n+1}, для которого $u_{n+1} < \delta$. Тогда S_n даст значение функции требуемой точности. Очевидно, что уже третий член ряда $\frac{1}{5!\cdot 2^5} < 10^{-3}$, поэтому с точностью $\delta = 10^{-3}$

$$\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \approx 0{,}479.$$

Пример 2. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$ с точностью $\delta = 10^{-4}$, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав почленно.

Решение. Воспользуемся разложением функции $y = \operatorname{arctg} t$, положив $t = \frac{x}{4}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^7}{7} + \ldots \qquad (-4 \le x \le 4)$$

$$\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} - \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \ldots \qquad (-4 \le x \le 4)\ x \ne 0$$

$$\int\limits_1^{1,5} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx = \int\limits_1^{1,5}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^3\cdot 3} + \frac{x^4}{4^5\cdot 5} - \frac{x^6}{4^7\cdot 7} + \ldots\right)dx = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4^3\cdot 3^2} + \frac{x^5}{4^5\cdot 5^2} -$$

$$- \frac{x^7}{4^7\cdot 7^2} + \ldots\Bigg|_1^{1,5} = \frac{1{,}5-1}{4} - \frac{1{,}5^3 - 1^3}{4^3\cdot 3^2} + \frac{1{,}5^5 - 1^5}{4^5\cdot 5^2} - \frac{1{,}5^7 - 1^7}{4^7\cdot 7^2} + \ldots =$$

$$= 0{,}12500 - 0{,}00412 + 0{,}00026 - 0{,}00002 + \ldots$$

Получили знакочередующийся ряд Лейбница. Для оценки остатка ряда используем признак: $|R_n| < u_{n+1}$. При вычислении интеграла необходимо обеспечить точность 0,0001, т. е. $\left|R_n\right| < u_{n+1} < 0{,}0001$, следовательно, начиная с четвертого члена (0,00002), можно все члены ряда отбросить, вычисления ведем с одним запасным знаком, округляем до 0,0001:

$$\int_{1}^{1,5} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx \approx 1{,}1211.$$

Пример 3. Найдите пять первых, отличных от нуля членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = 2\cos x - xy^2,$$

удовлетворяющего условию $y(0) = 1$.

Решение. Пусть решение данного дифференциального уравнения $y = y(x)$ можно представить в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

По условию $x_0 = 0$

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \tag{3.7}$$

Найдем коэффициенты ряда.
Из условия $y(0) = 1$ с учетом

$$y'(x) = 2\cos x - xy^2, \text{ имеем: } \quad y'(0) = 2 \cdot \cos 0 - 0 \cdot 1^2 = 2, \text{ т.е. } y'(0) = 2.$$

Дифференцируем обе части дифференциального уравнения:

$$y'' = -2\sin x - y^2 - 2xyy' \qquad y''(0) = -2\sin 0 - 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \quad y''(0) = -1,$$

$$y''' = -\cos x - 2yy' - 2yy' \qquad 2x(y')^2 - 2xyy'' \quad y'''(0) = -10,$$

$$y^{(4)} = 2\sin 6(y')^2 - 6yy'' - 6xy'y'' - 2xyy''' \qquad y^{(4)}(0) = -18.$$

Подставим найденные коэффициенты в (3.7):

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{10}{3!}x^3 - \frac{18}{4!}x^4 + \ldots ,$$

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \ldots .$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите определенный интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью δ = 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно:

1. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x), b = 1$

Ответ: 0.364.

2. $f(x) = x^2 \cdot \sin x, b = 1$

Ответ: 0,223.

3. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x},\ b = \dfrac{1}{2}$

Ответ: 0.946.

4. $f(x) = \sqrt{1 + x^3},\ b = \dfrac{1}{2}$

Ответ: 0,508.

Найдите первые три, отличные от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$:

5. $y' = 2\sin x + xy, y(0) = 0$

Ответ: $y = x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{11}{360}x^6 + \ldots$

6. $y' = e^y + xy, y(0) = 0$

Ответ: $y = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \ldots$

7. $y' = \sin 2x + y + 1, y(\pi) = 0$

Ответ: $y = x - \pi + \dfrac{3}{2}(x-\pi)^2 + \dfrac{1}{2}(x-\pi)^3 + \ldots$

8. $y' = y \cdot \cos x, y(0) = 3$

Ответ: $y = 3 + 3x + \dfrac{3}{2}x^2 + \ldots$

Практическое занятие № 4

РЯДЫ ФУРЬЕ

Рядом Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l; l)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.1}$$

где коэффициенты ряда a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3,…) вычисляются по формулам Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,; \qquad (4.2)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots); \qquad (4.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots). \qquad 4)$$

Теорема 4.1. Если периодическая функция с периодом $2l$ кусочно – монотонная и ограниченная на отрезке $[-l\,;\,l\,]$, то ее ряд Фурье (4.1) сходится для любого $x \in R$ к сумме

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Для четной функции $f(-x) = f(x)$ все коэффициенты $b_n = 0$ и соответствующий ряд Фурье не содержит синусов:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (4.5)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots). \qquad (4.6)$$

Для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$ все коэффициенты $a_n = 0$ (n = 1, 2, 3,…) и соответствующий ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (4.7)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,\,2,\,3,\ldots). \qquad (4.8)$$

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $[0; 2l]$ пределы интегрирования в формулах (4.6), (4.7) и (4.8) будут от 0 до $2l$.

Если функция непериодическая, то ее в виде ряда Фурье можно представить только на конечном промежутке. При этом функция должна быть на этом промежутке кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной, т.е. должна удовлетворять так называемым условиям Дирихле.

Пример 1. Разложите данную функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье в интервале [–2,2] (рис. 4.1):

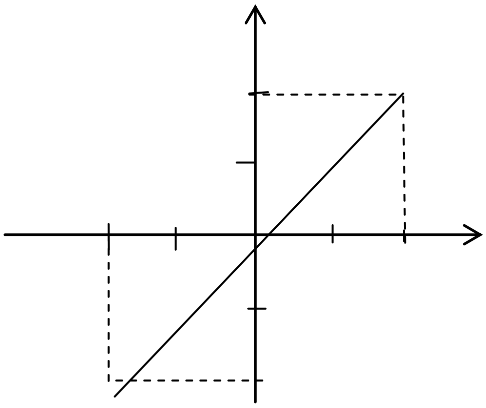


Рис. 4.1

Решение. Данная функция нечетная в $[-2,\ 2]$, поэтому ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы. Используем формулы (4.7) и (4.8), положив $l=2$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2x}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}(2\cos n\pi-0)+\frac{2^2}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{4}{n\pi}-(-1)^n+\frac{4}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin 0)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\ \Rightarrow\ b_n=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Замечание. При отыскании коэффициентов Фурье полезно знать некоторые формулы:

1) $\cos n\pi=(-1)^n$, $\qquad n\in Z$;

2) $\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$, $\qquad n\in Z$, n – нечетное;

3) $\sin n\pi=0$, $\qquad n\in Z$.

Пример 2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } -\pi<x<0\\ 2, & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}$

Решение. Функция задана на $[-\pi,\pi]$ двумя формулами. Используем формулы (4.1) – (4.4), положив $l=\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx\right),$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\Big|$ разбиваем интеграл на сумму двух, так как функция задана двумя формулами $\Big|=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int\limits_{0}^{\pi}2\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}2x\Big|_0^{\pi}=2$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\int\limits_{0}^{\pi}2\cdot\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\pi x=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}0\cdot\sin\pi x\,dx+\int\limits_{0}^{\pi}2\cdot\sin nx\,dx\right)=-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=-\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right);$$ следовательно,

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx=1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\sin nx.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^3$ с периодом $T = 2\pi$ на отрезке $[-\pi; \pi]$

Ответ: $x^3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(nx)$.

2. Разложите функцию $f(x)=1-x,\ x\in(0,1)$ с наименьшим периодом суммы *а*) в ряд Фурье по синусам, *б*) в ряд Фурье по косинусам.

Ответ: а) $f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}$; *б*) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$.

3. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\sin(3x)\cos^2(7x)$

Ответ: $f(x)\sim\frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(17x)-\frac{1}{4}\sin(11x)$.

Практическое занятие № 5

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Двойной интеграл является обобщением понятия определенный интеграл на случай функции двух переменных $z=f(x,y)$.

Рассмотрим в плоскости Оxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$, соответствующие наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим d_1, d_2, ..., d_n. Величину d_i будем называть **максимальным диаметром** подобласти ΔS_i. Выберем в каждой части ΔS_i произвольно точку P_i (рис. 5.1).

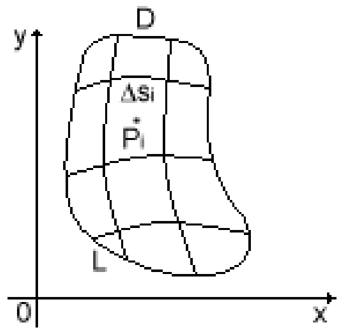


Рис. 5.1

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$,…, $f(P_n)$ значения этой функции в точках P_i и составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \qquad (5.1)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ в области D. С геометрической точки зрения при $f(x,y)\geq 0$ интегральная сумма (5.1) представляет собой сумму объемов цилиндров с основаниями ΔS_i и высотами $f(P_i)$.

Если существует один и тот же предел интегральных сумм (5.1) при $n\to\infty$ и $\max d_i\to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек P_i в них, то этот предел называется **двойным интегралом от функции *f(x, y)* по области *D*** и обозначается

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \,. \qquad (5.2)$$

Функция $f\ (x,y)$ в этом случае называется **интегрируемой** в области D,область D – **областью интегрирования**, x и y – **переменными интегрирования**, $dxdy = dS$ – **элементом площади**.

Замечание. Аналогично одномерному случаю можно доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойных интегралов

1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и $k = const$, то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в этой области, причем

$$\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (5.3)$$

2. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y\ )$интегрируемы в области D, то в этой области интегрируемы и функции $f(x, y) \pm g(x, y)$, при этом

$$\iint\limits_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \qquad (5.4)$$

3. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y\ )$ интегрируемы в области D и выполняется неравенство $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \qquad (5.5)$$

4. Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (5.6)$$

5. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то в этой области интегрируема и функция $|\ f(x, y)\ |$, и имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{D} |\, f(x,y)\,|\, dxdy. \qquad (5.7)$$

6. $\iint\limits_{D} dxdy = S_D$, где S_D – площадь области D.

7. Если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$m \le f(x, y) \le M,$$

то

$$mS_D \le \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D. \qquad (5.8)$$

8. (**Теорема о среднем**). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то в этой области существует такая точка $M(x_0, y_0)$, что

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = S_D f(x_0, y_0). \qquad (5.9)$$

Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана область D, которая определяется неравенствами $a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – однозначные непрерывные функции на отрезке $[a;b]$ (рис. 5.2), тогда область D называется **стандартной** (или **правильной**) относительно оси Oy. Аналогично определяется стандартная область относительно оси Ox, рис. 5.3. Область D, стандартную и относительно оси Ox и относительно оси Oy, называют **просто стандартной областью.**

Всякая прямая, параллельная оси координат и проходящая через внутреннюю точку $P(x, y)$ стандартной области D, пересекает границу области в двух точках (см. рис. 5.2).

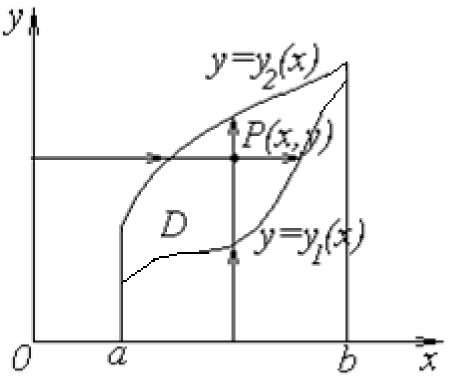


Рис. 5.2

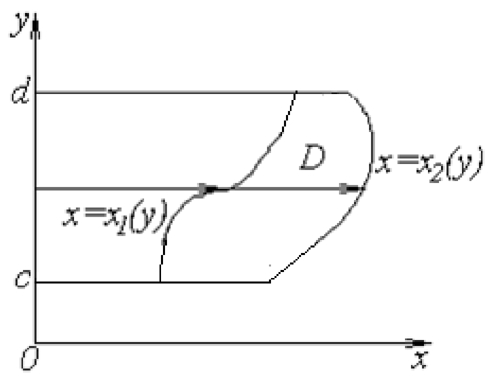


Рис. 5.3

Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по области D, стандартной относительно оси Oy, определяется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (5.10)$$

Правая часть формулы (5.10) называется **повторным интегралом**, а интеграл

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

называется **внутренним интегралом**.

Вычисление повторного интеграла начинают с вычисления внутреннего интеграла, при этом переменная x считается постоянной величиной. Результатом интегрирования будет некоторая функция от x, которая интегрируется затем по отрезку $[a;b]$.

Если область D является стандартной относительно оси Ox (рис. 5.3), двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (5.11)$$

Процедура расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов в формулах (5.10) или (5.11) называется **приведением двойного интеграла к повторному**.

Изменением порядка интегрирования называется переход от формулы (5.10) к формуле (5.11) или наоборот.

Если хотя бы одна из кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в области, стандартной относительно оси Oy, задается двумя различными аналитическими выражениями, то область интегрирования разбивается на стандартные подобласти и следует использовать формулу (5.6). Аналогично можно разбить область D на любое число стандартных областей. При этом повторный интеграл по области D будет равен сумме интегралов по частичным областям. Аналогично поступают, если область является стандартной относительно оси Ox.

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите двойной интеграл $J=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$, если область D – прямоугольник $0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$.

Решение. Поскольку пределы интегрирования постоянные величины, область интегрирования является стандартной и относительно оси Ox, и относительно оси Oy. Первое интегрирование может быть по любой переменной. Сводим двойной интеграл к повторному по формуле (5.10)

$$J=\int_0^1 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

Вычислим внутренний интеграл по *y*, считая x постоянной величиной и используя формулу Ньютона-Лейбница:

$$J=-\int_0^1 \frac{1}{x+y}\bigg|_1^2 dx=-\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx.$$

Теперь вычислим внешний интеграл по *x*:

$$J=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=(\ln|x+1|-\ln|x+2|)\Big|_0^1=\ln\frac{x+1}{x+2}\bigg|_0^1=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}.$$

Задача 2. Вычислите двойной интеграл $J=\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

Решение. Изобразим область D в декартовой системе координат (рис. 5.4), она является стандартной относительно оси Oy.

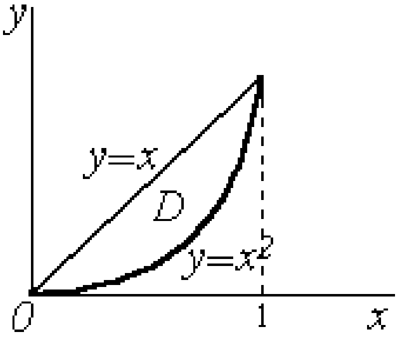


Рис. 5.4

Сводим двойной интеграл к повторному по формуле (5.10):

$$\iint\limits_D (x+3y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\left(x+3y^2\right)dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл в повторном, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x^2}^{x}\left(x+3y^2\right)dy=\left(xy+y^3\right)\Big|_{x^2}^{x}=x^2-x^6.$$

Теперь вычисляем внешний интеграл:

$$J=\int_0^1\left(x^2-x^6\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{21}.$$

Задача 3. Вычислите интеграл из задачи 5.2, изменив порядок интегрирования.

Решение. Для области, стандартной относительно оси *Ox*, запишем уравнения кривых $y=x$ и $y=x^2$, ограничивающих область D (рис. 5.4), в виде $x=x(y)$. Получим $x=y$ и $x=\sqrt{y}$. Тогда повторный интеграл по области, стандартной относительно оси *Ox*, запишется в виде (формула 5.11):

$$J=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}(x+3y^2)dx\,.$$

Интегрируя, получим

$$J=\int_0^1 dy\left(\left(\frac{x^2}{2}+3xy^2\right)\Bigg|_y^{\sqrt{y}}\right)=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+3y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{2}-3y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{6}{7}y^{\frac{7}{2}}-\frac{y^3}{6}-\frac{3y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{21}.$$

Ответы, полученные при изменении порядка интегрирования, совпали, что является проверкой правильности вычислений.

Задача 4. Вычислите двойной интеграл от функции $z = 2x + y$ по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках (0; 0), (0; 1) и (1; 0).

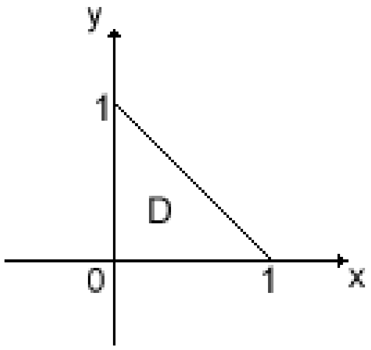


Рис. 5.5

Решение. Изобразим область D в декартовой системе координат (рис. 5.5), она является стандартной относительно оси Oy и относительно оси Ox. Область интегрирования D ограничена прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$. Запишем повторный интеграл для области, стандартной относительно оси Oy (формула 5.10)

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (2x+y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left(\left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} \right) = \int\limits_0^1 \left(2x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(1 + 2x - 3x^2 \right) dx = \frac{1}{2} (x + x^2 - x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Задача 5. Вычислите $\iint\limits_D xdxdy$ по области, ограниченной линиями $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$. Решите двумя способами, изменив порядок интегрирования.

Решение. Построим область D в декартовой системе координат (рис. 5.6).

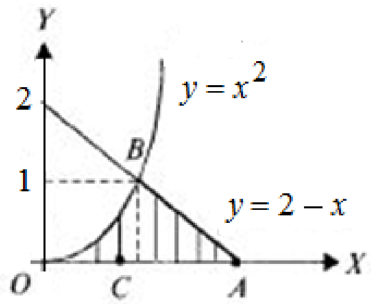


Рис. 5.6

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$, находим точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x + y = 2$, лежащую в первом квадранте, В (1; 1).

а) Решим, считая область правильной относительно оси Oy.

В этом случае область разбивается на две подобласти: *OBC* и *CBA*, так как линия *OBA* задается разными уравнениями. Воспользуемся формулой (5.6):

$$J = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} x\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} x\,dy.$$

Вычислим повторный интеграл

$$J=\int_0^1 xy\Big|_0^{x^2}dx+\int_1^2 xy\Big|_0^{2-x}dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{11}{12}.$$

б) Решим, считая область правильной относительно оси *Ox*. Приходим к одному повторному интегралу

$$J=\iint_D xdxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} x\,dx=\int_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(4-5y+y^2)dy=\frac{11}{12}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите $J=\iint_D x\sin y dxdy$, если область D - прямоугольник $0\le x\le 2,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 2.

2. Вычислите $J=\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, если область D – прямоугольник $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

3. Вычислите $J=\iint_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $x=0,\ y=0, y=1-x^2,\ x\ge 0$.

Ответ: $\frac{47}{60}$.

4. Вычислите $J=\iint_D \frac{x}{y}dxdy$, где область D – ограничена кривыми $y=e^x,\ y=e^{2x},\ x=2$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

5. Вычислите $J=\iint_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $x=0,\ y=x-x^2$ и $y=1-x^2$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

6. Вычислите $J=\iint\limits_{D} e^{xy}dxdy$ по области D, ограниченной гиперболой $xy=1$, осью абсцисс и прямыми $x=2$, $x=3$.

Ответ: $(e-1)\ln\frac{3}{2}$.

7. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}(x+y)dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{2-y}(x+y)dx$, изменив порядок интегрирования.

Ответ: $\frac{89}{60}$.

Практическое занятие № 6

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим общий случай замены переменных в двойном интеграле. Пусть в двойном интеграле $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ прямоугольные координаты x,y преобразуются к новым координатам u,v, которые связаны с x,y соотношениями:

$$x=x(u,v), y=y(u,v). \tag{6.1}$$

устанавливающими взаимно однозначное отображение между областями D и D^*, лежащими в плоскостях xOy и uOv (рис. 6.1), причем функции (6.1) имеют непрерывные частные производные первого порядка в области D^* и якобиан отображения в области D^* не обращается в нуль, т.е.

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

тогда имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|dudv. \qquad (6.2)$$

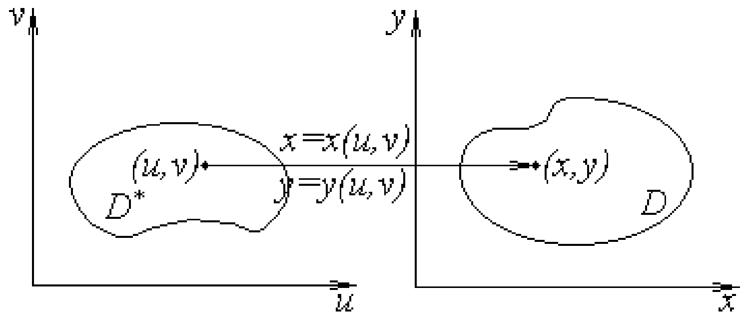


Рис. 6.1

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат

Если полюс полярных координат и начало декартовой системы координат совпадают и полярная ось направлена вдоль оси Ox, то формулы (6.1) имеют вид $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$. В этом случае

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

и формула (6.2) принимает вид

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)rdrd\varphi. \qquad (6.3)$$

Для области D, ограниченной лучами, образующими с полярной осью углы φ_1 и φ_2 $(\varphi_1 < \varphi_2)$, и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, причем получаем (рис. 6.2),

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)rdr. \qquad (6.4)$$

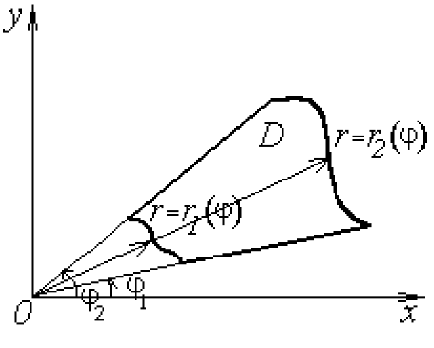


Рис. 6.2

Формулу (6.4) удобно использовать при решении задач, когда область D есть круг или часть круга.

Обобщенными полярными координатами называют переменные r и φ, связанные с прямоугольными координатами x и y формулами $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, где $r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ a > 0, b > 0, a \neq b$. В этом случае $|J| = abr$ и формула (6.2) принимает вид

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{D^*} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\, rdrd\varphi. \qquad (6.5)$$

Приложения двойного интеграла

Геометрические приложения двойного интеграла

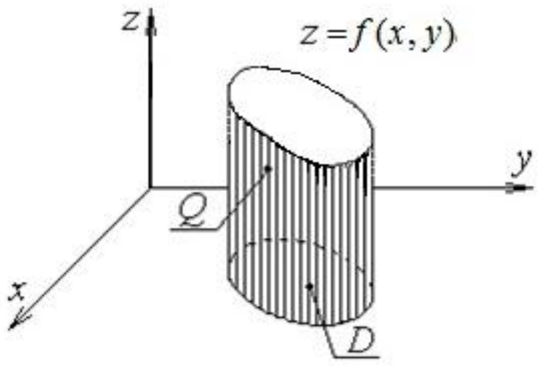


Рис. 6.3

1) *Объем цилиндрического тела*, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y) \geq 0$, снизу – плоскостью $z = 0$ и с боков – цилиндрической поверхностью Q, вырезающей на плоскости Oxy область D (рис. 6.3), равен

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (6.6)$$

2) В частности, когда $f(x,y) = 1$, двойной интеграл (6.6) равен *площади* S_D области D, т. е.

$$S_D = \iint\limits_D dxdy\,. \qquad (6.7)$$

Физические приложения двойного интеграла

Если область D — плоская пластинка, лежащая в плоскости xOy, с поверхностной плотностью $\mu(x,y)$, то

3) *масса пластинки*

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy; \qquad (6.8)$$

4) *статические моменты пластинки* относительно осей Ox и Oy

$$M_x = \int_D y\mu(x,y)dxdy,\ M_y = \int_D x\mu(x,y)dxdy; \qquad (6.9)$$

5) *координаты центра масс пластинки*:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}; \qquad (6.10)$$

6) *моменты инерции пластинки* относительно осей Ox, Оу и начала координат:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)dxdy, \qquad (6.11)$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)dxdy, \qquad (6.12)$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\mu(x,y)dxd; \qquad (6.13)$$

7) *заряд пластины*. Если электрический заряд распределен по области D в плоскости Оxy и его плотность распределения задана функцией $\sigma(x,y)$. Тогда полный *заряд пластины* Q определяется выражением

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)dxdy. \qquad (6.14)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите, используя полярные координаты, двойной интеграл

$$I = \iint_D (2x + y^3)dxdy,$$

где D – часть кругового сектора единичного радиуса с центром в начале координат, расположенная в 1-м квадранте.

Решение. Заданный интеграл в полярных координатах $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

по заданной области $D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет вид:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1(2r\cos\varphi+r^3\sin^3\varphi)rdr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}r^3\Bigg|_0^1\cos\varphi d\varphi-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1\sin^2\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\cos\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{15}\cos^3\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{4}{5}.$$

Задача 2. Найдите объем цилиндрического тела, ограниченного поверхностью $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостью $z=0$.

Решение. Изобразим это цилиндрическое тело в системе координат $Oxyz$ (рис.6.4). Область D-круг $x^2+y^2=4$. Применим формулу (6.6):

$$V=\iint\limits_D\sqrt{9-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}dy.$$

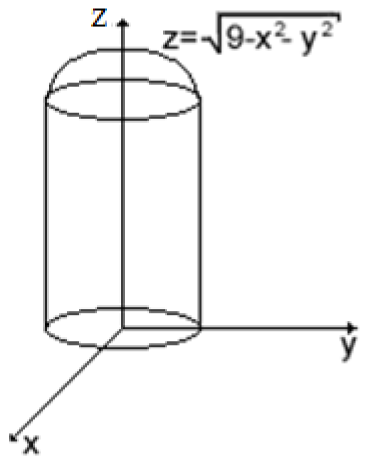


Рис. 6.4

Перейдем к полярным координатам:

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{9-r^2}rdr=-\frac{1}{2}\cdot2\pi\int\limits_0^2\left(9-r^2\right)^{\frac{1}{2}}d(9-r^2)=-\frac{2\pi(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2=$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\pi(27 - 5\sqrt{5})}{3}.$$

Задача 3. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 16 - x^2$, $y = -9$.

Решение. Построим фигуру в системе координат *Oxy,* рис.6.5.

Применим формулу (6.7). Для определения пределов интегрирования найдем абсциссы точек пересечения кривых, ограничивающих фигуру. Для этого приравняем правые части уравнений, задающих границы области: $16 - x^2 = -9$.

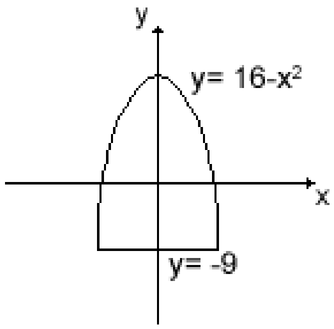


Рис. 6.5

Отсюда $x^2 = 25,\ \ x = \pm 5$.

Тогда $$S = \int_{-5}^{5} dx \int_{-9}^{16-x^2} dy = \int_{-5}^{5}\left(16 - x^2 - (-9)\right)dx = \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5} =$$

$$= 125 - \frac{125}{3} + 125 - \frac{125}{3} = \frac{500}{3}.$$

Задача 4. Найдите массу плоской пластинки *D*, заданной неравенством $x^2 + y^2 \le 1$, с поверхностной плотностью $\mu(x, y) = x^2$.

Решение. Воспользуемся формулой (6.8):

$$m = \iint_D x^2 dxdy.$$

Область интегрирования ограничена окружностью, переходим к полярным координатам

$$D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases},$$

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rr^2 \cos^2 \varphi dr = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 5. Найдите статические моменты и координаты центра масс кругового сектора радиуса 2 с центром в начале координат и центральным углом 60^o, если поверхностная плотность $\mu(x, y) = 1$(рис. 6.6).

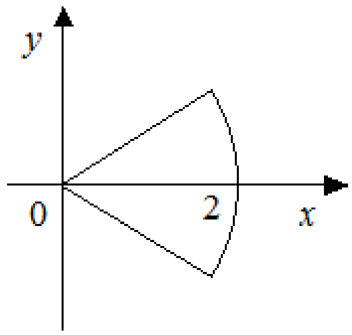


Рис. 6.6

Решение. Найдем массу m и статические моменты пластинки M_xи M_yпо формулам (6.8) и (6.9), переходя к полярным координатам и учитывая, что область интегрирования симметрична относительно осиOx:

$$m = \iint_D dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 rdr = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{3};$$

$$M_x = \iint_D ydxdy = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 r\sin\varphi \cdot rdr = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^2 dr =$$

$$= -\cos\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0;$$

$$M_y = \iint_D xdxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 r\cos\varphi \cdot rdr = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi d\varphi \int_0^2 r^2 dr = 2\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Координаты центра масс рассчитаем по формулам (6.10):

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{4}{3} : \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\pi}; \qquad y_C = \frac{M_x}{m} = 0.$$

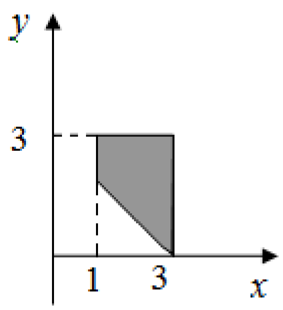


Рис. 6.7

Задача 6. Плоская пластина ограничена отрезками прямых $x + y = 3$,$x = 1$, $x = 3$, $y = 3$ (рис. 6.7) и имеет поверхностную плотность $\mu(x, y) = \dfrac{3}{x}$.Вычислите момент инерции пластины относительно оси Oy.

Решение. Применим формулу (6.12):

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)dxdy=\iint_D x^2\frac{3}{x}dxdy=\int_1^3 3xdx\int_{3-x}^3 dy=3\int_1^3 x^2dx=x^3\Big|_1^3=26.$$

Задача 7. Электрический заряд распределен по площади диска $x^2+y^2\le 1$ таким образом, что его поверхностная плотность равна $\sigma(x,y)=1+x^2+y^2$ (Кл/м^2). Вычислите полный заряд диска.

Решение. Применим формулу (6.14) и вычислим, переходя к полярным координатам,

$$Q=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(1+r^2)rdr=2\pi\int_0^1(r+r^3)dr=2\pi\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите интеграл $\iint_D x^2ydxdy$, переходя к полярным координатам, где D – полукруг единичного радиуса, расположенный в полуплоскости $y\ge 0$.

Ответ: $2/15$.

2. Вычислите интеграл $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=3,\ y=x,\ x=0$ ($x\ge 0, y\ge 0$).

Ответ: $\frac{\pi}{8}(e^3-1)$.

3. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $x=0$, $y=x$, $z=1-y\sqrt{y}$.

Ответ: 3/14.

4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=3,\ z=0$.

Ответ: $\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=11-x^2$; $y=-10x$.

Ответ: 288.

6. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=4\sqrt{x}$, $x=1$.

Ответ: 2**.**

7. Плоская пластинка G задана ограничивающими её кривыми: $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ ($x\geq 0, y\leq 0$), поверхностная плотность $\mu(x,y)=\dfrac{3x-2y}{x^2+y^2}$. Найдите массу пластинки.

Ответ: 5.

8. Найдите координаты центра масс однородной пластинки ($\mu(x,y)=1$), ограниченной окружностью $x^2+y^2=R^2$ и лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $x_c=\dfrac{\sqrt{3}\,R}{\pi}$, $y_c=\dfrac{R}{\pi}$.

9. Вычислите моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1$,$x = 0$, $y = 0$ и имеющего плотность $\mu(x,y)=xy$.

Ответ: $I_x=\dfrac{1}{120}$, $I_y=\dfrac{1}{120}$.

Практическое занятие№ 7

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Понятие тройного интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в некоторой области G трехмерного пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S, задана ограниченная непрерывная функция $u=f(x,y,z)$.Разобьем область G на n произвольных частей Δv_i, считая объем каждой части равным Δv_i , и составим интегральную сумму вида

$$\sum_{G} f(P_i)\Delta v_i\,, \tag{7.1}$$

где точка P_i принадлежит Δv_i. Пусть d– наибольшее расстояние между двумя точками любой части Δv_i области G. Найдем предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа элементов разбиения n и при условии, что каждый элементарный объем Δv_i стягивается в точку, т.е. максимальный диаметр d каждой подобласти стремится к нулю.

Если интегральная сумма (7.1) при $d \to 0$ $(n \to \infty)$ имеет предел, не зависящий от способа разбиения области G на части Δv_i и выбора точек P_i в них, то этот предел называется **тройным интегралом от функции** $f(x, y, z)$ **по области** G и обозначается

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\rho\to 0} \sum_G f(P_i)\Delta v_i\,, \qquad (7.2)$$

а функция $f(x, y, z)$ называется **интегрируемой** в области G.

Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области G функция $f(x, y, z)$ интегрируема в ней.

Все сформулированные ранее свойства двойного интеграла (5.3)–(5.9) справедливы и для тройного интеграла.

Процедура вычисления тройного интеграла аналогична соответствующей операции для двойного интеграла, она сводится к вычислению повторных интегралов при детальном учете конфигурации области интегрирования.

При вычислении тройных интегралов используется понятие стандартной трехмерной области, которое вводится по аналогии со стандартной двумерной областью. Так, например, область G, ограниченная снизу и сверху непрерывными поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, – стандартная относительно оси Oz (рис. 7.1).

Она обладает следующими свойствами.

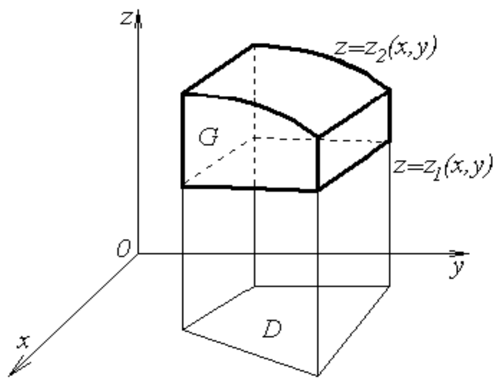


Рис. 7.1

1. Всякая прямая, параллельная оси Oz и проведенная через внутреннюю точку области G, пересекает границу области ровно в двух точках.

2. Вся область G однозначно проецируется на плоскость xOy в двумерную область D (рис. 7.1).

Тройной интеграл по области G, стандартной относительно оси Oz вычисляется так:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (7.3)$$

Здесь внутренний интеграл берется по z при фиксированных, но произвольных в D значениях x и y. В результате получается некоторая функция $F(x, y)$, которая интегрируется затем по области D. Если область D

ограничена линиями $y=y_1(x), y=y_2(x), x=a, x=b$, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_D F(x,y)dxdy$ к повторному, получаем формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (7.4)$$

Или в другой форме записи

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \qquad (7.5)$$

Правые части в формулах (7.4) и (7.5) называются **трехкратным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *G***.

Если область G не является стандартной, то с помощью плоскостей, параллельных какой-либо из координатных плоскостей, разбивают ее на конечное число стандартных областей.

Если область интегрирования является параллелепипедом, т.е. задана в виде $G:\{a\le x\le b;\ c\le y\le d;\ l\le z\le m\}$,то тройной интеграл от функции *f(x,y,z)* по G записывается в виде повторного с произвольным порядком интегрирования. Например:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_e^m f(x,y,z)dz=\int\limits_c^d dy\int\limits_e^m dz\int\limits_a^b f(x,y,z)dx. \qquad (7.6)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите интеграл $J=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyz\,dz$.

Решение. Найдем последовательно все три интеграла:

$$J=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x\left(xy\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^y\right)dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x xy\frac{y^2}{2}dy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x\frac{y^3}{2}dy=\int\limits_0^1 x\frac{y^4}{8}\Bigg|_0^x dx=\int\limits_0^1\frac{x^5}{8}dx=\frac{1}{48}.$$

Задача 2. Вычислите $J=\iiint\limits_G 8y^2ze^{-xyz}dxdydz$,где область G задается неравенствами $0\le x\le 2, -1\le y\le 0, 0\le z\le 2$.

Решение: Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед (рис. 7.2).Воспользуемся формулой (7.6). При этом порядок интегрирования будем выбирать так, чтобы не интегрировать по частям.

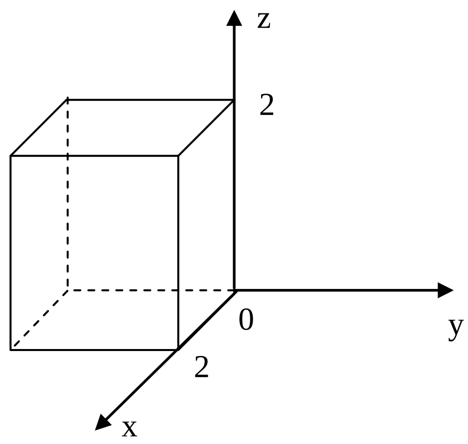


Рис. 7.2

$$J=\iiint\limits_G 8y^2ze^{-xyz}dxdydz=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^2 dz\int\limits_0^2 8y^2ze^{-xyz}dx=\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^2 \frac{8y^2ze^{-xyz}}{-yz}\Bigg|_{x=0}^{x=2}dz=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^2 8ye^{-xyz}\Bigg|_{x=0}^{x=2}dz=-\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^2 8y(e^{-2yz}-e^0)dz=$$

$$=-8\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^2(ye^{-2yz}-y)dz=-8\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{ye^{-2yz}}{-2y}-yz\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2}dy=$$

$$=-8\int\limits_{-1}^{0}(\frac{e^{-4y}}{-2}-2y-\frac{e^0}{-2}+0)dy=-8\int\limits_{-1}^{0}(\frac{e^{-4y}}{-2}-2y+\frac{1}{2}y)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=-8\frac{e^0}{8}+8(\frac{e^4}{8}-1-\frac{1}{2})=-1+e^{-4}-12=e^{-4}-13.$$

Задача 3. Вычислите интеграл $J=\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

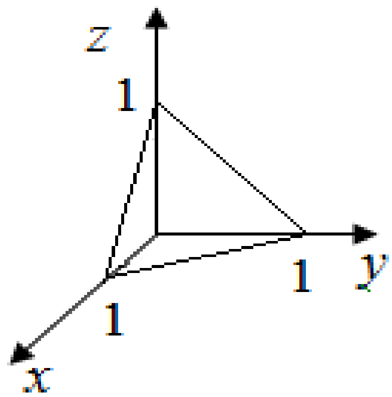


Рис. 7.3

Решение. Проекцией области интегрирования на плоскость Oxy является треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 1$ (рис. 7.3).

Перейдем к трехкратному интегралу по формуле (7.4):

$$J = \iiint\limits_V xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz.$$

Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$J = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right) = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \left((1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \Bigg|_0^{1-x} \right) = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)dx = \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}.$$

Задача 4. Вычислите $J = \iiint\limits_G x^2 \sin(4\pi xy) dxdydz;$ где область интегрирования G ограничена плоскостями $x = 1;\ y = \frac{x}{2};\ z = 0;\ z = 8\pi.$

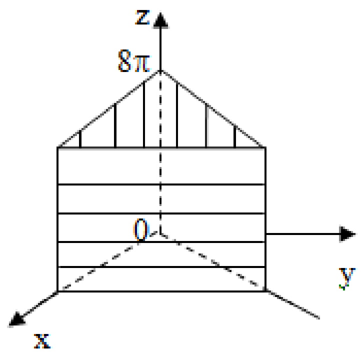


Рис. 7.4

Решение. Изобразим область интегрирования графически в системе координат $Oxyz$ (рис. 7.4). G – треугольная призма.

Применим формулу (7.3).

$$J = \iiint\limits_G x^2 \sin(4\pi xy) dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_0^{8\pi} x^2 \sin(4\pi xy) dz.$$

Внутренний интеграл по z вычисляем, считая x и y постоянными:

$$J = \iint\limits_D x^2 \sin(4\pi xy) z \Bigg|_{z=0}^{z=8\pi} dxdy = 8\pi \iint\limits_D x^2 \sin(4\pi xy) dxdy.$$

Полученный двойной интеграл удобнее вычислять, интегрируя сначала по y, а затем по x, поскольку при этом не встретится интегрирование по частям.

$$J = 8\pi\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}} x^2\sin(4\pi xy)dy = -8\pi\int_0^1 \frac{x^2\cos(4\pi xy)}{4\pi x}\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} dx = -2\int_0^1 (x\cos\frac{4\pi x^2}{2} - x\cos 0)dx =$$

$$= -2\int_0^1 (x\cos 2\pi x^2 - x)dx = -\int_0^1 \cos 2\pi x^2 dx^2 + x^2\Big|_0^1 = \frac{-\sin 2\pi x^2}{2\pi}\Bigg|_0^1 + 1 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите интеграл $J = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

2. Вычислите интеграл $J = \iiint\limits_V x^2 z dxdydz$, если область V ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z - 3 = 0$.

Ответ: $\frac{81}{40}$.

3. Вычислите интеграл $J = \iiint\limits_V (y - z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Ответ: 28,8.

4. Вычислите $J = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1 + \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right)^6}$; если область V ограничена плоскостями $\frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$; *x=0; y=0; z=0.*

Ответ: 1.

Практическое занятие № 8

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть ограниченная замкнутая область G пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область G^* пространства $Ouvw$. И пусть прямоугольные координаты x, y, z преобразуются к новым координатам u, v, w, которые связаны с x, y, z соотношениями

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w), \tag{8.1}$$

которые однозначно разрешимы относительно u, v, w:

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z) \quad w = w(x,y,z). \tag{8.2}$$

Если функции (8.1) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и якобиан преобразования

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

в области G^*, то для тройного интеграла имеет место следующая формула замены переменных:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{G^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|dudvdw. \tag{8.3}$$

Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты точки $M(r,\varphi,z)$ – это полярные координаты r, φ проекции этой точки на плоскость Oxy и аппликата данной точки z (рис. 8.1). Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \tag{8.4}$$

где $r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$ (рис. 8.1).

Якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

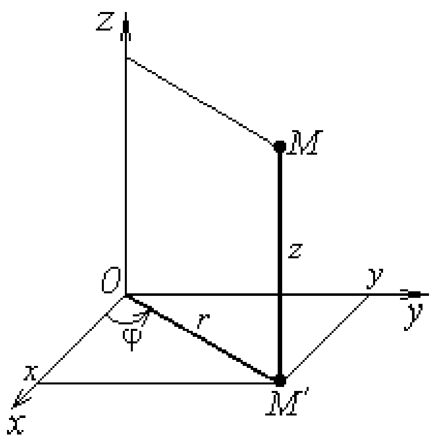


Рис. 8.1

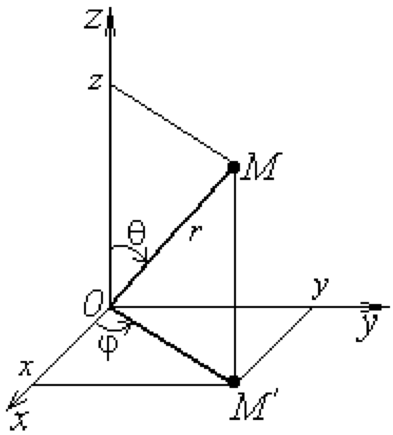


Рис. 8.2

Тогда формула (8.3) принимает вид

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz. \tag{8.5}$$

Сферическая система координат

Если точка M в пространстве имеет прямоугольные координаты x, y, z, то сферическими координатами точки M называют тройку чисел (r, φ, θ), где r – расстояние от точки M до начала координат O, φ – угол между лучом OM' (M' – проекция точки M на плоскость xOy) и осью Ox, θ – угол между положительным направлением оси Oz и лучом OM (рис. 8.2).

Связь между прямоугольными и сферическими координатами определяется соотношениями

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta, \tag{8.6}$$

где $r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$. При этом

$$I=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

и формула (8.3) принимает вид

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta. \qquad (8.7)$$

Приложения тройного интеграла

1) *Объем тела.* Если в *области* G функция $f(x,y,z)=1,$ то тройной интеграл равен объему области G, т. е.

$$V(G)=\iiint\limits_G dxdydz. \qquad (8.8)$$

2) *Масса тела.* Если $\mu(x,y,z)$ – объемная плотностью распределения вещества в области G, то масса тела, заключенного в области G (физический смысл тройного интеграла).

$$m=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz\,. \qquad (8.9)$$

3) *Статические моменты тела* относительно координатных плоскостей xOy, xOz и yOz:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\mu(x,y,z)dxdydz,\quad M_{xz}=\iiint\limits_G y\mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_G x\mu(x,y,z)dxdydz, \qquad (8.10)$$

где $\mu(x,y,z)$ – плотность распределения вещества.

4) *Координаты центра масс тела:*

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},\ y_c=\frac{M_{xz}}{m},\ z_c=\frac{M_{xy}}{m}, \qquad (8.11)$$

где m – масса тела.

5) *Моменты инерции тела* относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2 \mu(x,y,z)dxdydz, \quad I_{xz} = \iiint\limits_G y^2 \mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G x^2 \mu(x,y,z)dxdydz, \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}, \\ &I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$ по области *G*, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. Изобразим область интегрирования *G*, рис. 8.3. Вычислим интеграл, переходя к цилиндрической системе координат по формуле (8.5):

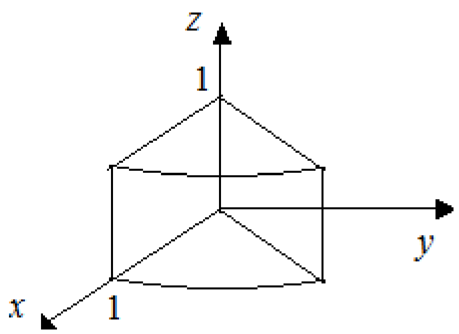


Рис. 8.3

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^1 r \cdot rdr \int\limits_0^1 zdz = \left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}.$$

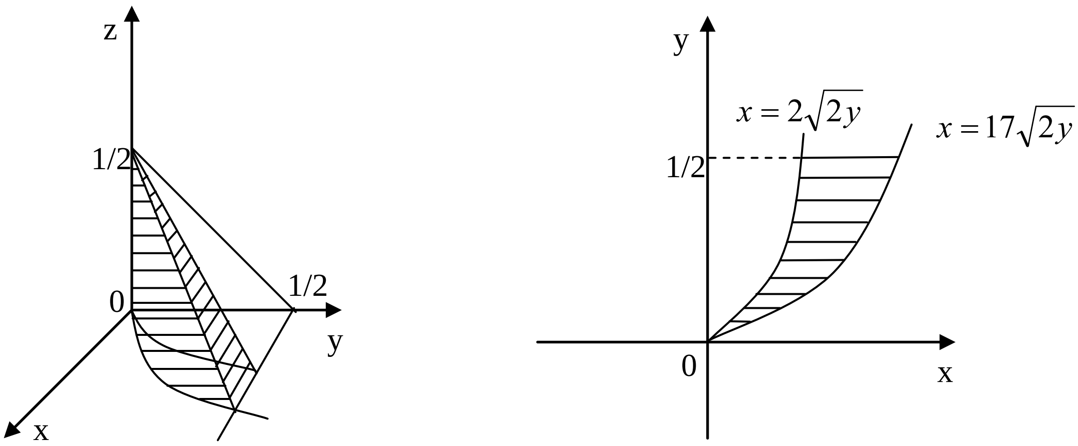
Задача2. Переходя к сферическим координатам, вычислите интеграл $J = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 dxdydz$, если область интегрирования *V* ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам по формуле (8.7):

$$J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^6 r^2 \sin\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^8 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\frac{r^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{9}.$$

Задача 3. Найдите объем тела *V*, заданного ограничивающими его поверхностями $x = 17\sqrt{2y}$; $x = 2\sqrt{2y}$; $z = 0$; $z + y = \frac{1}{2}$.

Решение. Поверхности $x = 17\sqrt{2y}$; $x = 2\sqrt{2y}$; – это цилиндрические поверхности с вертикальными образующими. Две остальные поверхности являются плоскостями. Построив эти поверхности, получаем тело, ограниченное этими поверхностями (рис. 8.4, *а*).



а) *б)*

Рис. 8.4

Тело снизу ограничено поверхностью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = \frac{1}{2} - y$, и проекция его на плоскость Оxy совпадает с основанием D этого тела (рис. 8.4, *б*). Применим формулу (8.8):

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1/2-y} dz = \iint\limits_D (\frac{1}{2} - y)dxdy = \int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{17\sqrt{2y}} (\frac{1}{2} - y)dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} (\frac{1}{2}x - yx)\Bigg|_{x=2\sqrt{2y}}^{x=17\sqrt{2y}} dy = \int\limits_0^{1/2} (\frac{17}{2}\sqrt{2y} - 17\sqrt{y}\cdot y - \sqrt{2y} + 2y\sqrt{2y})dy =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} (\frac{15}{2}\sqrt{2}y^{1/2} - 15\sqrt{2}y^{3/2})dy = (\frac{15}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{15\sqrt{2}}{5/2}y^{5/2})\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2^{3/2}} - 2\cdot 3(\frac{\sqrt{2}}{2^{5/2}}) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1.$$

Задача 4. Определите массу, статические моменты и координаты центра масс единичного куба с плотностью μ (x, y, z) = $x + 2y + 3z$ (рис. 8.5).

Решение. Вычислим массу куба по формуле (8.9):

$$m=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\left[\left(xz+2yz+\frac{3z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (x+2y+1{,}5)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left[\left(xy+y^2+1{,}5y\right)\Big|_{y=0}^{y=1}\right]=\int\limits_0^1 (x+2{,}5)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2{,}5x\right)\Bigg|_0^1=3.$$

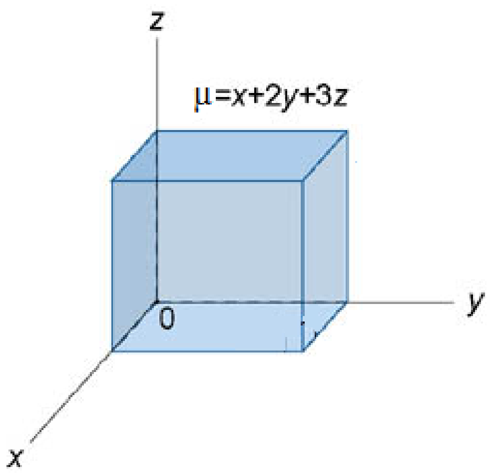


Рис. 8.5

Вычислим статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} по формулам (8.10):

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\mu(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 z(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (xz+2yz+3z^2)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\left[\left((x+2y)\frac{z^2}{2}+z^3\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (x+2y+2)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\left[\left(xy+y^2+2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x+3)dx=\frac{7}{4}.$$

Аналогично находим моменты M_{xz} и M_{yz}:

$$M_{xz}=\iiint\limits_G y\mu(x,y,z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 y(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (xy+2y^2+3yz)dz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left[\left(xyz+2y^2z+\frac{3yz^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (xy+2y^2+\frac{3y}{2})dy=\int_0^1 dx\left[\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}+\frac{3y^2}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{17}{12}\right)dx=\frac{5}{3},$$

$$M_{yz}=\iiint_G x\mu(x,y,z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 x(x+2y+3z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2+2xy+3xz)dz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left[\left(x^2z+2xyz+\frac{3xz^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1}\right]=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+2xy+\frac{3x}{2})dy=\int_0^1 dx\left[\left(x^2y+xy^2+\frac{3xy}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right]=\int_0^1\left(x^2+\frac{5x}{2}\right)dx=\frac{19}{12}.$$

Вычисляем координаты центра масс по формулам (8.11):

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{19/12}{3}=\frac{19}{36},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{5/3}{3}=\frac{5}{9},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{7/4}{3}=\frac{7}{12}.$$

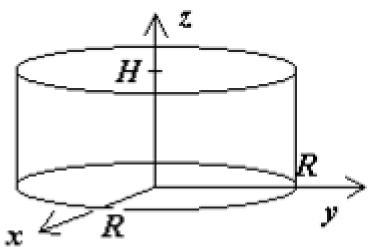


Рис. 8.6

Задача 5. Найдите моменты инерции однородного цилиндра (μ=const) относительно осей *Ox* и *Oz* (рис. 8.6).

Решение. Воспользуемся формулами (8.12) и (8.13) и вычислим интегралы, переходя к цилиндрическим координатам по формуле (8.5):

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}=\iiint_G\left(z^2+y^2\right)\mu\, dxdydz=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R rdr\int_0^H(z^2+r^2\sin^2\varphi)dz=$$

$$=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r\left(\frac{H^3}{3}+r^2H\sin^2\varphi\right)dr=\mu\int_0^{2\pi}\left(\frac{H^3R^2}{6}+\frac{R^4}{4}H\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\mu\frac{H^3R^2}{6}2\pi+\mu\frac{R^4}{4}H\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=\mu\frac{H^3R^2}{3}\pi+\mu\frac{R^4}{4}H\left(\pi-\frac{1}{4}\sin2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{\mu\pi H^3R^2}{3}+\frac{\mu\pi HR^4}{4};$$

$$I_z=I_{xz}+I_{yz}=\iiint\limits_G\left(y^2+x^2\right)\mu\,dxdydz=\mu\iiint\limits_{G^*}r^2\,rd\varphi drdz=$$

$$=\mu\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr\int\limits_0^H dz=\mu\,2\pi\,\frac{R^4}{4}H=\frac{\mu\pi HR^4}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2=1$ и плоскостями $z=0$, $z=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2. Вычислите интеграл $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, переходя к сферическим координатам, если область интегрирования V ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0$.

Ответ: $\frac{64}{5}\pi$.

3. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 8.7).

Ответ: $\frac{32}{3}\pi$.

4. Найдите массу и координаты центра масс половины однородного шара радиуса R (плотность μ = const), рис. 8.8.

Ответ: $m=\frac{2}{3}\pi\mu R^3,\ x_c=0,\quad y_c=0,\quad z_c=\frac{3}{8}R.$

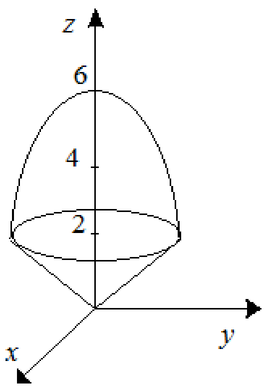


Рис. 8.7

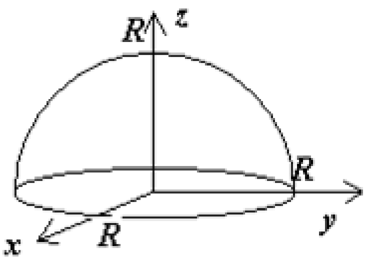


Рис. 8.8

5. Найдите массу и координаты центра масс половины шара радиуса R (рис. 8.8), если плотность пропорциональна расстоянию от центра шара $\mu = k\,r$.

Ответ: $m = \dfrac{\pi k R^4}{2}$, $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = 0{,}4R$.

6. Найдите массу шара радиуса R, с переменной плотностью $\mu = r$, где r – расстояние от центра.

Ответ: $m = \pi R^4$.

7. Найдите массу шара радиуса R, если его плотность $\mu = ar^2$, где a – некоторая постоянная, r – расстояние от центра.

Ответ: $m = \dfrac{4a\pi R^5}{5}$.

Практическое занятие № 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая $L = AB$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$, определенную в точках дуги AB. Произвольно разобьем кривую L на n частей точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ (рис. 2.1). Затем на каждой из полученных частей (дуг) $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ (i=1, 2, …, n) выберем произвольную точку $M_i^*(x_i^*, y_i^*)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i, \qquad (9.1)$$

где Δl_i – длина дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Полученная сумма называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y)$ по кривой L.

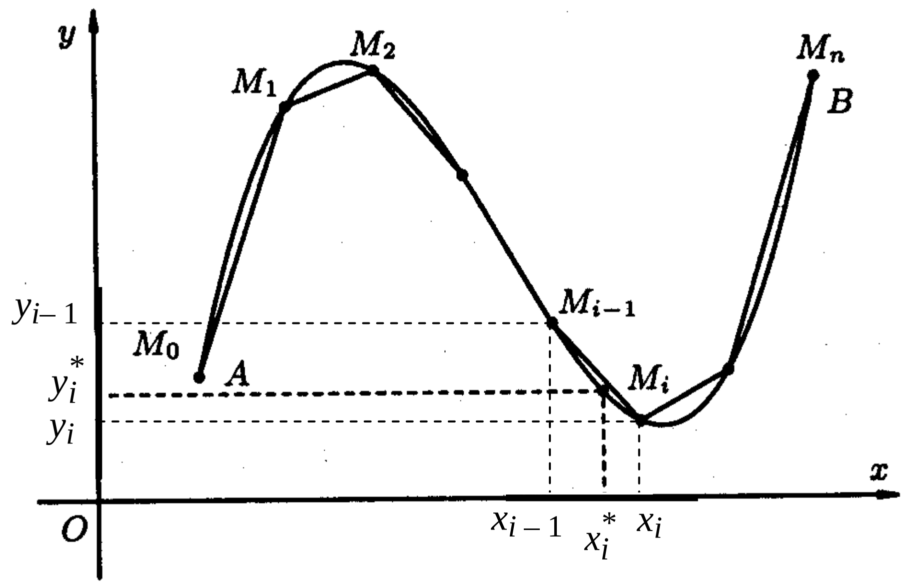


Рис. 9.1

Определение 9.1. Обозначим через d наибольшую из длин дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ (таким образом, $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$). Если при $d \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует предел интегральных сумм S_n (не зависящий от способа разбиения кривой L на части и выбора точек $M_i^*(x_i^*, y_i^*)$), то этот предел называется ***криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается $\int\limits_L f(x, y)dl$ или $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$. Таким образом, по определению,

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \lim_{\substack{d\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i . \qquad (9.2)$$

Условие существования криволинейного интеграла I-го рода (существования предела интегральной суммы S_n при $n \to \infty$ и $d \to 0$) представляет следующая теорема.

Теорема 2.1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x, y) \in L$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I-го рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x, y, z)$ по пространственной кривой L.

Основные свойства криволинейного интеграла I-го рода:

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$.
2. $\int\limits_{L} c \cdot f(x,y)dl = c \cdot \int\limits_{L} f(x,y)dl,\ c = \mathrm{const}$.
3. $\int\limits_{L} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dl = \int\limits_{L} f_1(x,y)dl \pm \int\limits_{L} f_2(x,y)dl$.
4. $\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl$, где $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.
5. Если для точек кривой L выполнено неравенство $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$, то $\int\limits_{L} f_1(x,y)dl \le \int\limits_{L} f_2(x,y)dl$.
6. $\int\limits_{AB} dl = L_{AB}$ – длина кривой AB.

7. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой $L = AB$, то на этой кривой найдется точка (x_c, y_c) такая, что $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = f(x_c, y_c) \cdot L_{AB}$ **(теорема о среднем).**

Вычисление криволинейного интеграла I рода сводится к вычислению определенного интеграла, а именно:

1. Если кривая L задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x),\ x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx, \tag{9.3}$$

при этом выражение $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$ называется **дифференциалом длины дуги кривой.**

2. Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ \ t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \tag{9.4}$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой L, задаваемой уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$:

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt. \qquad (9.5)$$

3. Если плоская кривая L задана полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$,

то
$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho_\varphi'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (9.6)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите криволинейный интеграл I-го рода.

а) $\int\limits_L \sqrt{y}dl,\quad L$ – часть параболы $y = x^2$ от т. $A(0, 0)$ до т. $B(2, 4)$;

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, L – часть кривой $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t\ (0 \le t \le 2\pi)$ (первый виток винтовой линии);

в) $\int\limits_L |y|dl, L$ – лемниската Бернулли $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Решение.

а) Поскольку кривая интегрирования L задана в явном виде, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (9.3)

$$\int\limits_L \sqrt{y}dl = \int\limits_0^2 \sqrt{x^2}\sqrt{1 + ((x^2)')^2}dx = \int\limits_0^2 x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2) =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 1\right).$$

б) Поскольку кривая интегрирования L пространственная и задана в параметрическом виде, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (9.5). Предварительно вычисляем: $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t,\ z'(t) = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + 4t^2 = 1 + 4t^2$. Подставляем эти результаты в формулу (9.5) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl = \int\limits_0^{2\pi}(4t^2+1)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+4}dt = \sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi}(4t^2+1)dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{4t^3}{3}+t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{5}\left(\frac{32\pi^3}{3}+2\pi\right).$$

в) Поскольку кривая интегрирования L задана в полярных координатах, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (9.6). Предварительно вычисляем: $\rho'(\varphi) = -\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $|y| = |\rho(\varphi)\sin\varphi| = |\sin\varphi|\sqrt{\cos 2\varphi}$. Так как в уравнении кривой интегрирования должно выполняться условие $\cos 2\varphi \geq 0$, то $-\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$. Подставляем эти результаты в формулу (9.6) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L |y|dl = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}|\sin\varphi|\sqrt{\cos 2\varphi}\sqrt{(\sqrt{\cos 2\varphi})^2+\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}|\sin\varphi|d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi = -2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2-\sqrt{2}.$$

Приложения криволинейных интегралов I-го **рода**

1. *Длина кривой*

Если подынтегральная функция равна единице, то криволинейный интеграл I-го рода будет равен длине кривой L, т.е.

$$L_{AB} = \int\limits_L dl = \begin{cases} \int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx \text{ при явном представлении } L, \\ \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt \text{ при параметрическом представлении } L, \\ \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho_\varphi'(\varphi))^2}d\varphi \text{ при полярном представлении } L. \end{cases} \quad (9.7)$$

2. *Площадь цилиндрической поверхности*

Пусть в плоскости *Oxy* задана гладкая кривая *L*, на которой определена и непрерывна функция двух переменных $z = f(x, y) \geq 0$. Тогда можно построить цилиндрическую поверхность с направляющей *L* и образующей, параллельной оси *Oz* и заключенной между *L*и поверхностью $z = f(x, y)$. Площадь этой цилиндрической поверхности можно вычислить по формуле:

$$S = \int\limits_L f(x, y)dl. \tag{9.8}$$

3. *Масса кривой*

Если *L* = *AB* – материальная кривая с линейной плотностью, равной $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса этой кривой вычисляется по формуле

$$m = \int\limits_L \gamma(x, y)dl \tag{9.9}$$

(физический смысл криволинейного интеграла I-го рода).

4. *Статические моменты и центр тяжести кривой*

Статические моменты относительно осей *Ox* и *Oy* и координаты центра масс материальной кривой *L* определяются формулами

$$M_x = \int\limits_L y \cdot \gamma(x, y)dl, \quad M_y = \int\limits_L x \cdot \gamma(x, y)dl, \qquad x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}. \tag{9.10}$$

5. *Моменты инерции*

Для материальной кривой *L*моменты инерции относительно осей *Ox*, *Oy* и начала координат соответственно равны:

$$J_x = \int\limits_L y^2 \cdot \gamma(x, y)dl, \; J_y = \int\limits_L x^2 \cdot \gamma(x, y)dl, \; J_0 = \int\limits_L (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y)dl. \tag{9.11}$$

Задача 2. Вычислите массу m и координаты центра масс x_c, y_c плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 1$, линейная плотность которой $\gamma(x, y) = y \cdot \sqrt{1+x}$.

Решение. Согласно формулам (9.9) и (9.3) для случая плоской дуги имеем:

$$m = \int\limits_0^1 \gamma(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx = \frac{2}{3} \cdot \int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+x}\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3} \cdot \int\limits_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{16}{35}.$$

По формулам (9.10) находим:

$$x_C = \frac{35}{16}\int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}})dx = \frac{10}{9},\ y_C = \frac{35}{16}\int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})dx = \frac{35}{24}\int_0^1 (x^3 + x^4)dx = \frac{21}{32}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите:

1. $\int\limits_L xdl$, еслиL– отрезок прямой, соединяющей точки A(0,0) и B(1,2).

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. $\int\limits_L x^2 ydl$, если L – часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первом квадранте.

Ответ: 27.

3. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = (1 + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. $\int\limits_L ydl$, где L – дуга астроиды $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$, заключенная между точками A(1,0) и B(0,1).

Ответ: 0,6.

5. $\int\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами O(0,0), A(4,0), B(4,2), C(0,2).

Ответ: 24.

6. $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

Ответ: 8.

7. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$.

Ответ: 32π.

8. $\int\limits_{L} ydl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $x^2 = 2y$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{3}$.

9. Массу дуги кривой $y = \ln x$ плотностью $\gamma = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями $x: x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{8}$.

Ответ: $\dfrac{19}{3}$.

10. Площадь поверхности, которую вырезает из круглого цилиндра радиусом *R*такой же цилиндр , если оси этих цилиндров пересекаются под прямым углом.

Ответ: $8R^2$.

11. Длину дуги цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [0;1]$.

Ответ: $\dfrac{e^2-1}{2e}$.

12. Моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $y = 2x$, заключенного между точками (1,2) и (2,4). Линейную плотность отрезка считать равной 1.

Ответ: $I_x = \dfrac{28\sqrt{5}}{3}, I_y = \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$.

Практическое занятие № 10

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО РОДА. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО – ГРИНА

Пусть в плоскости *Oxy* задана непрерывная кривая $L = AB$ и функции $P(x, y), Q(x, y)$, определенные в каждой точке кривой. Разобьем кривую L на n произвольных частей точками $M_0 = A, M_1, M_2, ..., M_n = B$ (рис. 9.1). Далее в каждой из полученных дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ (i = 1, 2, …, n) выберем произвольную точку $M_i^*(x_i^*, y_i^*)$ и составим суммы вида

$$S_{n,x} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i, \tag{10.1}$$

$$S_{n,y} = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\,, \qquad (10.2)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}-$ проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось $Ox, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}-$ проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось Oy.

Сумму (10.1) называют **интегральной суммой** для функции $P(x,y)$ по переменной x, а сумму (10.2) – **интегральной суммой** для функции $Q(x,y)$ по переменной y.

Определение 10.1. Если при $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i \to 0$ интегральная сумма (10.1) (сумма (10.2)) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой L, ни от выбора точек $M_i^*(x_i^*, y_i^*)$, то его называют криволинейным интегралом по координате x (координате y) (или 2-го рода) от функции $P(x,y)$ (функции $Q(x,y)$) по кривой L и обозначают $\int\limits_L P(x,y)dx$ ($\int\limits_L Q(x,y)dx$) или $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ ($\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$). Итак,

$$\int\limits_L P(x,y)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i\,, \qquad (10.3)$$

$$\int\limits_L Q(x,y)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i\,. \qquad (10.4)$$

Сумма криволинейных интегралов $\int\limits_L P(x,y)dx$ и $\int\limits_L P(x,y)dx$ называется ***полным криволинейным интегралом II-го рода*** **или** ***криволинейным интегралом II-го рода общего вида*** и обозначается

Криволинейный интеграл $\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

Теорема 10.1. Если кривая $L = AB$ гладкая, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывные на кривой L, то криволинейный интеграл II рода существует.

Из определения криволинейного интеграла II рода вытекают следующие его свойства:

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т.е. $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.

2. Если кривая *AB* точкой *C* разбита на две части *AC* и *CB*, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т.е.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} .$$

3. Если кривая *L* лежит в плоскости, перпендикулярной оси *Ox*, то

$$\int\limits_{L} P(x, y)dx = 0;$$

аналогично для кривой *L*, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси *Oy*:

$$\int\limits_{L} Q(x, y)dy = 0.$$

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода).

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$– проекция дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ на ось *Oy*.

Вычисление криволинейного интеграла также II -го рода сводится к вычислению определенного интеграла. А именно:

1. Если кривая *L* задана в явном виде непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x), x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)\right]dx. \qquad (10.5)$$

2. Если кривая *L* задается параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right]dt. \qquad (10.6)$$

Если *L* – гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha, \beta]$ функциями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t) \right] dt. \tag{10.7}$$

При $A = B$ кривая L замкнута, а соответствующий криволинейный интеграл II рода по замкнутой кривой обозначается так:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Пусть в плоскости Oxy имеется односвязная область D. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 10.2. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{10.8}$$

где L – граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Формула (10.8) называется **формулой Остроградского-Грина**. Она связывает криволинейный интеграл II -го рода по замкнутой кривой с двойным интегралом.

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – две произвольные точки области D. Точки A и B можно соединить различными линиями (рис. 10.1). По каждой из этих кривых интеграл $I = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ имеет свое значение.

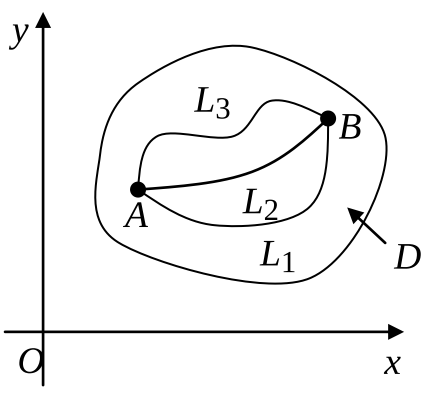


Рис. 10.1

Если же его значения по всевозможным кривым AB одинаковы, то говорят, что интеграл I не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла I достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1, y_1)$ и его конечную точку $B(x_2, y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Теорема 10.3. Для того чтобы криволинейный интеграл $I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{10.9}$$

Следствие 1. Если выполнено условие (10.9), то подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y).$$

Тогда

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} dU(x,y) = U(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} =$$

$$= U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1). \tag{10.10}$$

Формула (10.10) называется **обобщенной формулой Ньютона–Лейбница** для криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Следствие 2. Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования L замкнутый, то $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

Функцию $U(x,y)$ можно найти, используя формулу

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\chi, y_0)d\chi + \int_{y_0}^{y} Q(x,\xi)d\xi + C, \tag{10.11}$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ принадлежат области D, в которой $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями; C – произвольная постоянная.

Приложения криволинейного интеграла II рода

1. Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найдите по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint_L (xdy - ydx), \tag{10.12}$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

2. Работа переменной силы

Переменная сила $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ на криволинейном участке $AB = L$ производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{10.13}$$

(***физический смысл криволинейного интеграла II-го рода***).

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислите криволинейный интеграл II-го рода. $\int_L xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, L– отрезок прямой AB, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$.

Решение. Составляем параметрические уравнения кривой интегрирования L:

$$L: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t, \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Вычисляем $x'(t) = 1, y'(t) = 2, y'(t) = 3$. Полученные результаты подставляем в формулу (10.7) и вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_L xdx + ydy + (x - y + 1)dz = \int\limits_0^1 ((1+t)\cdot 1 + (1+2t)\cdot 2 + (1 + t - (1+2t) + 1)\cdot 3)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2t+6)dt = (t^2 + 6t)\Big|_0^1 = 7\,.$$

Задача 2. Вычислите криволинейный интеграл II-го рода.

$\int\limits_L xydx + (x^2 + y)dy$, если линия L – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками A(0,0) и B(2,4).

Решение. Так как в данном случае $y = x^2$, $y'(x) = 2x, x \in [0;2]$, то, согласно формуле (10.5), получаем:

$$\int\limits_0^2 [xx^2 + (x^2 + x^2)\cdot 2x]dx = \int\limits_0^2 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\,|_0^2 = 20.$$

Задача 3. С помощью формулы Грина Вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$, где L – контур прямоугольника $ABCD$ (рис. 10.2), $A(1,\,1)$, $B(7,\,1)$, $C(7,\,4)$, $D(1,\,4)$.

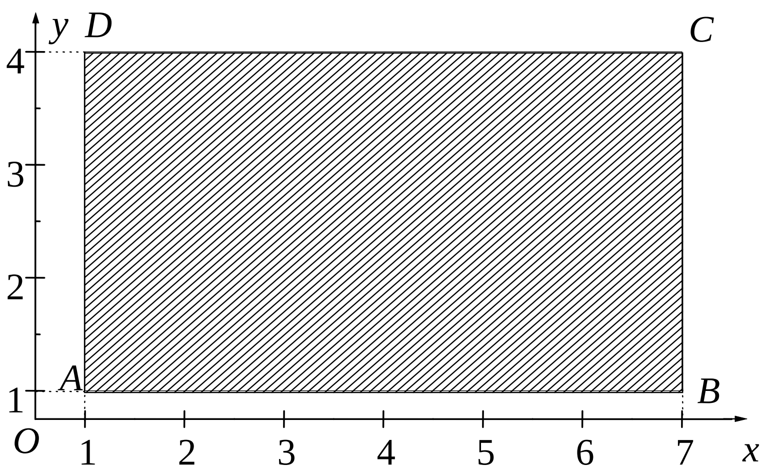


Рис. 10.2

Решение. Имеем $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, Q(x,y) = y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right).$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\left(y + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=y^2.$$

По формуле Грина (10.8) получаем:

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy=$$

$$=\iint\limits_{D_{ABCD}} y^2dxdy=\int\limits_1^7 dx\int\limits_1^4 y^2dy=x\Big|_1^7\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_1^4=(7-1)\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)=147.$$

Задача 4. Покажите, что дифференциальное выражение

$$\frac{x}{y}dy+\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx$$

является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, и найдите эту функцию.

Решение. Так как $P(x,y)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y, Q(x,y)=\frac{x}{y}$, то $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}$. Значит во всех точках плоскости Oxy, исключая точки, лежащие на осях координат, данное дифференциальное выражение в силу равенства (10.9) является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$.Теперь воспользуемся формулой (10.11), где можно взять $M_0(1{,}1)$.

По формуле (10.11) имеем:

$$U(x,y)=\int\limits_1^x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\int\limits_1^y\frac{x}{y}dy+C=(arctgx-\ln|x|)\Big|_1^x+x\ln|y|\Big|_1^y+C=$$
$$=arctgx-\ln|x|+x\ln|y|+C,$$

где C– произвольная постоянная.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите данные криволинейные интегралы :

1. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, где L – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

2. $\int\limits_L xdy-ydx$, где L – дуга астроиды $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

3. $\int\limits_L xdx+ydy+(x-y+1)dz$, где L – отрезок прямой AB; $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$.

Ответ: 7.

4. $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника ABCс вершинами в Точках $A(3,0)$, $B(3,3)$ и $C(0,3)$.

Ответ: 18.

5. $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, где L – окружность $x=2\cos t, y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

Ответ: -4π.

6. С помощью криволинейного интеграла второго рода Вычислите площадь области D, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

7. Вычислите работу силы F(x,y) = 2xyi + x^2j, совершаемую на пути, соединяющем точки $A(0,0)$ и $B(2,1)$.

Ответ: 4.

8. Покажите, что данное выражение является полным дифференциалом функции$U(x,y)$.Найдите функцию $U(x,y)$.:

а) $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$.

Ответ: $x^2+x+2y-3xy^2+C$.

б) $(ye^{xy}+y^2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy$.

Ответ: $e^{xy}+xy^2+C$.

Практическое занятие № 11

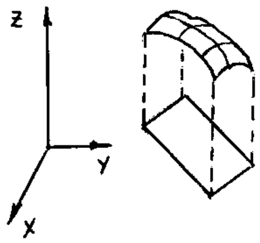
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Элементы дифференциальной геометрии.

Пусть поверхность Ф определена параметрическими уравнениями:

$$\Phi: x = x(u,v); y = y(u,v); z = z(u,v); (u,v) \in D. \qquad (11.1)$$

Если все функции $x(u,v); y(u,v); z(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по аргументам u, v и в каждой точке $(u,v) \in D$ ранг матрицы $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ равен двум, то говорят, что поверхность Ф является гладкой и не имеет особых точек. В этом случае в каждой точке $(u,v) \in D$ векторы $\overline{r_u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overline{r_v} = (x_v, y_v, z_v)$ неколлинеарны и потому определяют плоскость, называемую касательной плоскостью. При перемещении по поверхности положение касательной плоскости и ее вектора нормали $\vec{N} = [\overline{r_u}, \overline{r_v}]$ непрерывно изменяется. Если при перемещении вектора $\overline{N}$ по произвольному замкнутому контуру на поверхности Ф он не изменяется, то поверхность Ф называется двусторонней.



Площадь гладкой поверхности.

Рассмотрим гладкую без особых точек поверхность Ф**.** Разделим ее сеткой линий на m участков $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ и на каждом Φ_i выберем точку M_i. Проведем через M_i касательную плоскость и спроектируем на нее участок Φ_i. В результате получим плоскую фигуру Φ_i^* с площадью ΔS_i и вся гладкая поверхность покроется «многогранником».

Общую площадь «многогранника» определяет интегральная сумма $S(m) = \sum_{i=1}^{m} \Delta S_i$. Переход к пределу $m \to \infty$ дает точное значение для площади криволинейной поверхности Ф:

$$S = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \Delta S_i = \int_G dS. \qquad (11.2)$$

Число S, в случае, когда оно существует, называется **площадью поверхности Ф.**

Для гладкой поверхности Φ, задаваемой уравнениями (11.1), имеет место равенство:

$$S = \iint_D |[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|\, dudv. \tag{11.3}$$

При этом выражение $d\sigma = |[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|\, dudv$ называется **элементом поверхности Φ.**

Понятие поверхностного интеграла первого рода.

Пусть на гладкой без особых точек поверхности Φ задана непрерывная функция f(x,y,z). Используя стандартную схему построения двойных, тройных интегралов, разобьем поверхность Φ на участки, выберем на каждом из них точку и составим интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{m} f(M_i)\Delta S_i$

Определение 11.1. Поверхностным интегралом первого рода от функции *f(x,y,z)* по поверхности Φ называется предел $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(M_i)\Delta S_i$, в случае, когда он существует, и обозначается $\iint_\Phi f(x,y,z)d\sigma$.

Теорема 11.1. Справедливо равенство:

$$\iint_\Phi f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|\, dudv. \tag{11.4}$$

Замечание 1. Если вектор $\overline{N} = [\overline{r_u}, \overline{r_v}] = (A, B, C)$, то $A = y_u z_v - z_u y_v$, $B = z_u x_v - x_u z_v$, $C = x_u y_v - y_u x_v$. Отсюда находим единичный вектор нормали $\bar{n} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$, где выбор знака зависит от заданного направления нормали (обычно ее направляют во внешность пространства).

Замечание 2. Достаточно часто встречается случай, когда параметрические уравнения поверхности имеют вид: $\Phi: x = u; y = v; z = z(x, y); (x, y) \in D$. Тогда вектор нормали $\bar{n} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)$, элемент поверхности $d\sigma = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy$.

Приведем необходимые сведения о некоторых часто встречающихся поверхностях.

1) Часть сферы $S: x^2+y^2+z^2=R^2$, записанной параметрически

$$S:\begin{cases} x=R\cos\varphi\sin\psi; y=R\sin\varphi\sin\psi; z=R\cos\psi; (\varphi,\psi)\in D\subset(0,2\pi)\times(0,\pi) \\ d\sigma=R^2\sin\psi\, d\varphi d\psi \\ \bar{n}=\pm(\cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi) \end{cases}$$

2) Часть цилиндра Ц, симметричного относительно оси Oz с радиусом основания R

$$Ц:\begin{cases} x=R\cos\varphi; y=R\sin\varphi; z=z; (\varphi,z)\in D\subset(0,2\pi)\times R \\ d\sigma=R\, d\varphi dz \\ \bar{n}=\pm(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \end{cases}$$

3) Часть конуса $K: x^2+y^2=z^2$, записанного параметрически

$$K:\begin{cases} x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi; z=r; (r,\varphi)\in D\subset(0,+\infty)\times(0,2\pi) \\ d\sigma=\sqrt{2}r\, drd\varphi \\ \bar{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi, -\sin\varphi, 1) \end{cases}$$

4) Часть параболоида Р: $x^2+y^2=z$, записанного параметрически

$$P:\begin{cases} x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi; z=r^2; (r,\varphi)\in D\subset(0,+\infty)\times(0,2\pi) \\ d\sigma=r\sqrt{1+4r^2}\, drd\varphi \\ \bar{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+4r^2}}(-2r\cos\varphi, -2r\sin\varphi, 1) \end{cases}$$

5) Часть плоскости

$$П:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0,\ C\neq 0; (x,y)\in D\subset R^2 \\ d\sigma=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\, dxdy \\ \bar{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, |C|) \end{cases}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите площадь сферы радиуса *R*, центр которой находится в начале координат.

Решение: Обозначим через *S* площадь поверхности заданной сферы.

Исходя из параметрических уравнений сферы 1) и формулы (11.3), получаем:

$$S=\iint\limits_{\Phi} d\sigma=\iint\limits_{D} R^2\sin\psi\ d\varphi d\psi=R^2\int\limits_0^{\pi} d\psi\int\limits_0^{2\pi}\sin\psi d\varphi=$$

$$=2\pi R^2\int\limits_0^{\pi}\sin\psi d\psi=-2\pi R^2\cos\psi\,|_0^{\pi}=4\pi R^2.$$

Пример 2. Найдите $\iint\limits_{\Phi}(x^2+y^2+z^2)d\sigma$, где Φ – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте.

Решение: Исходя из параметрических уравнений сферы 1) и формулы (11.4), получаем: $\iint\limits_{\Phi}(x^2+y^2+z^2)d\sigma=$

$$=\iint\limits_{D}[R\cos\varphi\sin\psi)^2+(R\sin\varphi\sin\psi)^2+(R\cos\psi)^2]R^2\sin\psi d\varphi d\psi=$$

$$=R^4\iint\limits_{D}[\sin^2\psi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\psi]\sin\psi d\varphi d\psi=$$

$$=R^4\iint\limits_{D}\sin\psi d\varphi d\psi=R^4\int\limits_0^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi d\varphi=$$

$$=\frac{\pi R^4}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi d\psi=\frac{\pi R^4}{2}(-\cos\psi)\,|_0^{\pi/2}=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Пример 3. Найдите площадь боковой поверхности конуса $K: x^2+y^2=z^2$, расположенного между плоскостями $z=A$ и $z=B(0<A<B)$.

Решение: обозначим через S площадь боковой поверхности заданного конуса. Исходя из параметрических уравнений конуса 3) и формулы (11.3), получаем:

$$S=\iint\limits_{K} d\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{2}rdrd\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_A^B rdr=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\frac{r^2}{2}\,|_A^B=\sqrt{2}\pi(B^2-A^2)$$

Пример 4. Найдите $\iint\limits_{\Phi} xyd\sigma$, где Φ – часть конуса $K: x^2+y^2=z^2$, расположенного в первом октанте и ограниченного плоскостями $z=A$ и $z=B$ $(0<A<B)$.

Решение: Исходя из параметрических уравнений конуса 3) и формулы (11.4), получаем:

$$\iint_{\Phi} xyd\sigma = \iint_{D} r\cos\varphi r\sin\varphi\sqrt{2}rdrd\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_A^B r^3 \sin\varphi\cos\varphi dr =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi\sin\varphi\cos\varphi\frac{r^4}{4}\Big|_A^B = \frac{\sqrt{2}}{4}(B^4 - A^4)\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(B^4 - A^4)\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{8}(B^4 - A^4).$$

Приме 5. Найдите $\iint_{\Phi} z^2(x^2 + y^2)d\sigma$, где Φ – боковая поверхность цилиндра, симметричного относительно осиOz и ограниченного плоскостями $Z = 0$ и $z = H$ (H>0).

Решение: Исходя из параметрических уравнений цилиндра 2) и формулы (11.4), получаем:

$$\iint_{\Phi} z^2(x^2 + y^2)d\sigma = \iint_{D} z^2(R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi)Rd\varphi dz = R^3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H z^2dz = \frac{2\pi}{3}H^3R^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите поверхностный интеграл 1-го рода

1. $\iint_S \frac{d\sigma}{(1 + x + z)^3}$, S – часть плоскости $x + y + z = 1$, заключённая в первом октанте.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

2. $\iint_S (x^2 + y^2)d\sigma$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi a^4$.

3. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}d\sigma, S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$

Ответ: $\frac{1}{8}\pi^2 a^3$.

4. $\iint_S zd\sigma$, S:$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$

Ответ: $\pi^2(a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2}))$.

5. $\iint_S (xy + yz + xz)d\sigma$, $S: x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 4y$, (z>0)

6. *Ответ* : $\frac{1024\sqrt{2}}{15}$.

Практическое занятие № 12

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Предположим, что на гладкой двусторонней не имеющей особых точек поверхности Ф, определяемой параметрическими уравнениями:

$$\Phi: x = x(u,v); y = y(u,v); z = z(u,v); (u,v) \in D, \qquad (12.1)$$

задана непрерывная функция $f(x, y, z)$.

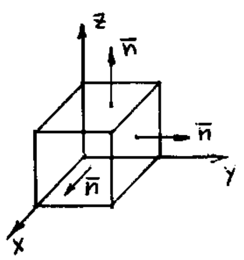
Зафиксируем каким-либо образом одну из сторон поверхности А и выберем направление поля нормалей $\bar{n}$ к Ф, например, во внешность пространства.

Определение 12.1. Число $\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos(\bar{n},L)d\sigma$, где L – любая из координатных осей Ox, Oy, Oz, называется **поверхностным интегралом второго рода** от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Ф.

Заметим, что при изменении направления поля нормалей $\bar{n}$ интеграл $\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos(\bar{n},L)d\sigma$ меняет знак на противоположный. Кроме этого, справедливо равенство: $\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\cos(\bar{n},Ox)d\sigma = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))Adudv$, при этом если $L=Oy$ (Oz), то вместо A берем B(C). В том случае, когда поверхность Ф задана уравнением $z=z(x,y)$, $(x,y) \in D$, пользуемся равенствами из Замечания 2 темы: Поверхностные интегралы первого рода.

Переходим к рассмотрению примеров.

Пример 1. Вычислите интеграл $I = \oiint_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Ф – внешняя сторона куба, составленного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.



Решение:

$$I = I_1(z=0) + I_2(y=0) + I_3(x=0) + I_4(z=1) + I_5(y=1) + I_6(x=1).$$

Используя Замечание 2, по каждой из граней куба имеем:

Φ_1: $z = 0$; $dz = 0$, угол между нормальным вектором и плоскостью $z=0$ равен π, поэтому интеграл берем со знаком «минус»: $I_1 = -(0 + 0 + \iint_{D_{xy}} 0dxdy) = 0$.

Аналогично $I_2 = I_3 = 0$. Для грани Φ_4: $z= 1$; $dz = 0$, угол между нормальным вектором и плоскостью $z =1$ равен 0, поэтому интеграл берем со знаком «плюс»: $I_4 = 0 + 0 + \iint_{D_{xy}} 1dxdy = 1$. Аналогично $I_5 = I_6 = 1$. Окончательно получаем $I = 3$.

Пример 2. Вычислите $\iint\limits_{\Phi}(y+z)dxdz$, где Ф – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащая в первом октанте.

Решение: Выбираем поле нормалей с направлением вовне. Исходя из опр. 12.1., параметрических уравнений сферы 1) и формулы (11.4), имеем:

$$\iint\limits_{\Phi}(y+z)dxdz = \iint\limits_{\Phi}(y+z)\cos(\bar{n},Oy)d\sigma = \iint\limits_{D}(R\sin\varphi\sin\psi + R\cos\psi)(R^2\sin\varphi\sin^2\psi)d\varphi d\psi =$$

(область D – прямоугольник $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$) =

$$= R^3\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\psi d\psi + \int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi\sin^2\psi d\psi\right) =$$

$$= R^3\left(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}-\sin^2\Psi d\cos\psi - \cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\sin^3\psi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= R^3\left(\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{(\pi+2)R^3}{6}.$$

Пример 3. Вычислите $\iint\limits_{\Phi}5\pi xdydz + (1-2y)dxdz + 4\pi zdxdy$, где Ф – часть плоскости $\frac{x}{2}+4y+\frac{z}{3}=1$, лежащая в первом октанте.

Решение: Выбираем поле нормалей так, чтобы они образовывали острый угол с осью *Oz*. Исходя из опр.12.1, уравнений плоскости 5) и формулы (11.4) , имеем:

$$\iint\limits_{\Phi}5\pi xdydz + (1-2y)dxdz + 4\pi zdxdy = \iint\limits_{\Phi}(5\pi x\frac{3}{\sqrt{589}} + (1-2y)\frac{24}{\sqrt{589}} + 4\pi z\frac{2}{\sqrt{589}})d\sigma =$$

= (выражая из уравнения плоскости переменную *z*, получаем) = $= \frac{1}{\sqrt{589}}\iint\limits_{D}(15\pi x + 24(1-2y) + 4\pi(6-3x-24y))\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{576}{4}}dxdy =$ (область D представляет собой треугольник, отсекаемый прямой $y=\frac{2-x}{8}$ от осей координат) =

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(15\pi x+24(1-2y)+4\pi(6-3x-24y))dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{(2-x)/8}(3\pi x-48(1-2\pi)y+24(1+\pi))dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(3\pi xy-24(1-2\pi)y^2+24(1+\pi)y)\Big|_{0}^{(2-x)/8}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(\frac{3\pi}{8}(2x-x^2)-\frac{3(1-2\pi)}{8}(2-x)^2+3(1+\pi)(2-x))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{8}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1-2\pi}{8}(2-x)^3-\frac{3}{2}(1+\pi)(2-x)^2\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{17\pi}{4}+\frac{5}{2}.$$

Пример 4. Вычислите $\iint\limits_{\Phi}(x+z^2)dxdy$, где Φ – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, лежащая между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение: Выбираем поле нормалей вовне, тогда каждая из них образует тупой угол с осью Oz. Исходя из опр. 12.1, параметрических уравнений конуса 3) и формулы (11.4), имеем:

$$\iint\limits_{\Phi}(x+z^2)dxdy=\int\limits_{0}^{1}dr\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi(r\cos\varphi+r^2)r=\int\limits_{0}^{1}dr\left(r^2\sin\varphi+r^3\varphi\right)\Big|_{0}^{2\pi}=\int\limits_{0}^{1}dr\left(2\pi r^3\right)=$$

$$=\left(\pi\frac{r^4}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите поверхностный интеграл 2-го рода

1. $\iint\limits_{\Phi}zdxdy$, где Φ - внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi abc$.

2. $\iint\limits_{\Phi}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где Φ - внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ (z>0).

Ответ: $\frac{\pi a^4}{2}$.

3. $\iint\limits_{\Phi} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где Ф – внешняя сторона пирамиды $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

Ответ: 0.

4. $\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где Ф – внешняя сторона пирамиды $x + y + z = 1$, x=0, y=0, z=0.

Ответ: 1/2.

5. $\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydxdz$, где Ф - внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 1$,

$Z = 0$, $z = 1$.

Ответ: 2π.

Практическое занятие № 13

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Скалярное поле задано, если указан закон, в силу которого каждой точке M области V пространства поставлено в соответствие определенное число $U(M)$.

Если в пространстве выбрана некоторая декартовая система координат, то задание скалярного поля эквивалентно заданию функции трех переменных

$$U(x, y, z).$$

Примерами конкретных скалярных полей могут служить поле температуры нагретого тела, поле давлений воздуха в атмосфере, поле плотности вещества в теле и др.

Часто приходится иметь дело не с пространственными, а с плоскими полями, когда каждой точке плоскости ставится в соответствие значение скаляра. Такие поля рассматриваются, например, в метеорологии (поле температур в определенный момент на поверхности земли, поле давлений и др.).

Плоское поле $U(M)$ в декартовой системе координат задается функцией, не зависящей от z, т.е. $U(M) = U(x, y)$.Такое поле принимает одинаковые значения на каждой прямой, параллельной оси Oz, поэтому его обычно рассматривают только в плоскости Oxy (т.е. при $z = 0$).

Для обеспечения возможности применять методы дифференциального и интегрального исчисления в теории поля будем считать, что функция $U(M)$ имеет в области V непрерывные частные производные первого (если понадобится, то и второго) порядка по x, y, z.

Семейство поверхностей уровня скалярного поля $U(M)$ определяется уравнением

$$U(M) = C,$$

или, в декартовых координатах,

$$U(x, y, z) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

В случае плоского поля линии уровня определяются уравнением

$$U(x, y) = C.$$

Производная скалярного поля $U(M)$ по направлению l, заданному вектором

$$l = ai + bj + ck,$$

вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{l}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{l}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{l}|}, \quad |\mathbf{l}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Градиент скалярного поля $U(M)$ есть вектор **grad**U, направленный по нормали к поверхности уровня поля, модуль которого численно равен максимально возможному для данного скалярного поля значению производной по направлению. Этот вектор определяет направление наибыстрейшего изменения скалярного поля.

Если в пространстве выбрана некоторая декартова система координат, то **grad**U вычисляется по формуле

$$\mathbf{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Между производной поля $U(M)$ по направлению $\boldsymbol{l}$ и его градиентом в данной точке M существует следующая связь:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{grad}\ U=\text{Пр}_{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{grad}U,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ **-** единичный вектор направления $\boldsymbol{l}$.
Из определения градиента непосредственно следует, что

$$\max\frac{\partial U}{\partial l}=|\mathbf{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Найдите линии уровня следующих плоских скалярных полей:

а) $U=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$;

б) $U=xy$.

Решение. а) Линии уровня определяются уравнением

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=C.$$

Из уравнения следует, что постоянная C должна быть неотрицательной, т.е. $C\geq 0$. При $C=0$ линия уровня вырождается в точку $O(0,\ 0)$. При $C>0$ получаем семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{4C}+\frac{y^2}{9C}=1$$

с полуосями

$$a=2\sqrt{C},\quad в=3\sqrt{C},$$

изображенных на рис. 13.1. Чем больше значение постоянной C, тем больше полуоси эллипса.

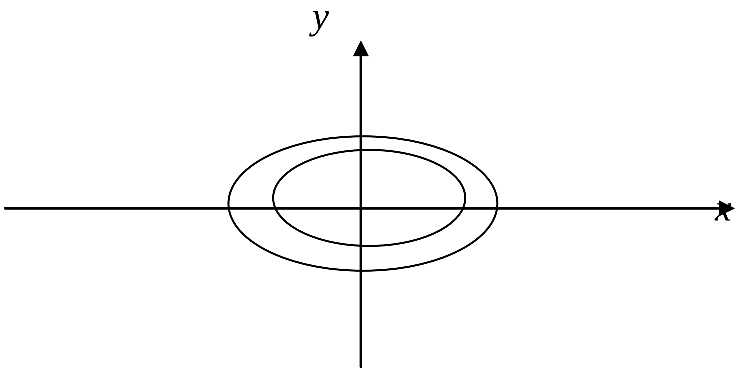


Рис. 13.1

б) Линии уровня определяются уравнением $xy = C$. Здесь постоянная C может иметь любой знак и может обращаться в нуль. При $C = 0$ получаем прямые $x = 0$ и $y = 0$, т.е. оси координат. При $C > 0$ – это семейство гипербол в первой и третьей четверти, а при $C < 0$ – это семейство гипербол во второй и четвертой четверти (рис.13.2).

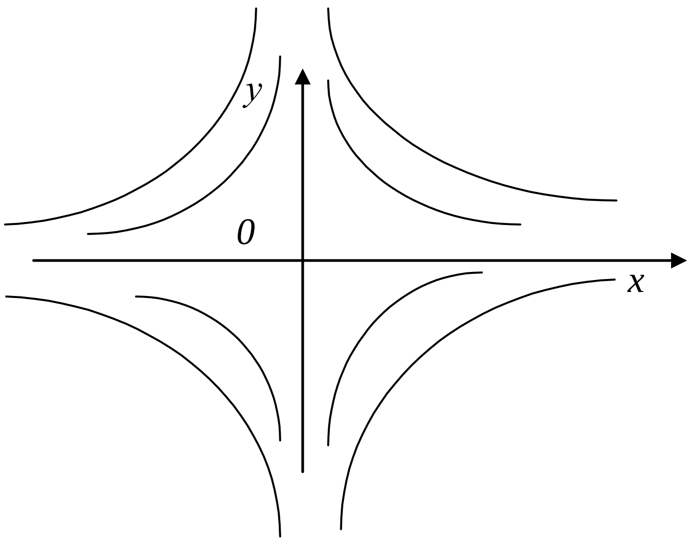


Рис. 13.2

Задача 2. Найдите поверхности уровня скалярного поля

$$U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Решение. Семейство поверхностей уровня скалярного поля определяется уравнением

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C\,,$$

которое описывает семейство концентрических сфер с центром в начале координат.

Задача 3. Плоское поле задано скалярной функцией:

$$\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1.$$

Найдите проекции градиента в точке $M(1; 2)$.

Решение. Градиент скалярного поля на плоскости имеет вид:

$$\mathbf{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x - 2y\Big|_{(1;2)} = -2, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -2x + 3\Big|_{(1;2)} = 1.$$

Отсюда

$$\mathbf{grad}\psi\Big|_{(1;2)} = \{-2;1\}.$$

Задача 4. Найдите величину и направление градиента скалярного поля $u = xy - z^2$ в точке M (–9, 12, 10). Определите производную в направлении биссектрисы координатного угла xOy.

Решение. Используя определение градиента, получаем:

$$\mathbf{grad}\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} = \{y, x, -2z\}.$$

Вычислим градиент в точке M:

$$\mathbf{grad}\ u(M) = \{12, -9, -20\}.$$

Величина градиента – это модуль полученного вектора:

$$|\mathbf{grad}\ u(M)| = \sqrt{12^2 + (-9)^2 + \left(-20^2\right)} = 25.$$

Направление градиента определяется направляющими косинусами:

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{grad}\ u(M)}{|\mathbf{grad}\ u(M)|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}\right\}.$$

Единичный вектор **τ,** исходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}.$$

Производная по направлению равна скалярному произведению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{grad}\ u(M) \cdot \tau = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте линию уровня скалярного поля

$$U = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{для } U = 1, 2, 3, 4.$$

Ответ: Окружности с центром в начале координат радиусов соответственно $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}$.

2. Найдите поверхности уровня скалярного поля

$$U = \ln\frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отве:. Сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2$, где $c = e^U$.)

3. Найдите поверхности уровня скалярного поля U:

а) $U = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$;

б) $U = 5^{2x+3y-z}$.

Ответ: *а*) Параболоиды вращения $x^2 + y^2 = cz$;

б) Плоскости $2x + 3y - z = C$.)

4. Найдите точку, в которой градиент скалярного поля

$$U = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right) \quad \text{равен вектору } \boldsymbol{l} = \mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right)$.)

5. Дано скалярное поле $U = x^2yz^2 - 4y$. Найдите направление и величину наибольшей скорости изменения поля U в точке $M(3;0;4)$.

Ответ: $\boldsymbol{l} = 140\mathbf{j}$, 140.)

6. Найдите производную скалярного поля $U = x^2 y^2 z^2$ в точке $M(1;–1; 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(0;1;1)$.

Ответ: – 22.

Практическое занятие № 14

ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

Говорят, что в некоторой области пространства задано векторное поле, если каждой точке $M(x, y, z)$ этой области сопоставлен вектор

$$\mathbf{F}(M) = P(x,y,z)\mathbf{I} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{14.1}$$

Определение 14.1. ***Векторной линией*** поля $\mathbf{F}(M)$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке M имеет направление соответствующего ей вектора $\mathbf{F}(M)$.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется **векторной трубкой**.

Векторные линии поля (14.1) описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{14.2}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Найдите векторные линии векторного поля **F**=3*x***i** + **6***y***j**.

Решение. Так как третья координата векторного поля $R(x,y,z)=0$, то $dz=0$ и, следовательно, $z=C=\mathrm{const}$. Поэтому дифференциальные уравнения векторных линий (14.2) сводятся к одному уравнению:

$$\frac{dx}{3x}=\frac{dy}{6y} \text{ при } z=C.$$

Решаем дифференциальное уравнение, получим

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}+\ln C_1 \Rightarrow \ln y=2\ln x+\ln C_1 \Rightarrow y=C_1x^2.$$

Следовательно, векторные линии определяются системой уравнений

$$\begin{cases} y=C_1x^2, \\ z=C_2, \end{cases}$$

то есть представляют собой семейства парабол в плоскостях , параллельных плоскости Oxy .

Задача 2. Найдите векторную линию векторного поля

F(*M*) = –*y***i**+*x***j**+*b***k**, проходящую через точку M_0**(1,0,0).** Здесь *b* – число.

Решение. На основании формулы (14.2) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}.$$

Решаем ее:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}, xdx+ydy=0, x^2+y^2=C_1^2$$

или, в параметрическом виде , $x=C_1\cos t, y=C_1\sin t$;

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}, \frac{dz}{b}=\frac{C_1\cos t dt}{C_1\cos t}, dz=bdt, z=bt+C_2.$$

Так как векторная линия должна проходить через точку $M_0(1,0,0)$, то легко находим, что постоянные интегрирования $C_1 = 1,\ C_2 = 0$. Уравнения векторной линии векторного поля имеют таким образом вид

$$x = \cos t,\ y = \sin t;\ z = bt \text{ (винтовая линия).}$$

Пусть в указанной области задана двусторонняя поверхность *S*. Выбор стороны на этой поверхности определяется единичным вектором нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности *S*:

$$\mathbf{n}_0 = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}.$$

Если поверхность *S* задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$\mathbf{n}_0 = \pm\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Знак плюс соответствует выбору верхней стороны поверхности, нормаль к которой образует острый угол с осью *Oz* и, следовательно, $\cos\gamma$ (т.е. коэффициент при $\mathbf{k}$) положителен. Знак минус отвечает нижней стороне поверхности. Если поверхность *S* задана уравнением $U(x, y, z) = 0$, то единичный вектор нормали можно найти по формуле

$$\mathbf{n}_0 = \pm\frac{\mathbf{grad}U}{|\mathbf{grad}U|};$$

причем знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор $\mathbf{n}_0$ именно к выбранной стороне поверхности.

Если поверхность состоит из нескольких частей, то вектор нормали вычисляется для каждой части отдельно по тем же формулам, выбор знаков в которых определяется заданием одной из сторон всей составной поверхности.

В случае замкнутой поверхности условимся всегда выбирать ее внешнюю сторону.

Потоком векторного поля **F** через двустороннюю поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds,$$

где $\mathbf{n}_0(M)$ – единичный вектор нормали к выбранной поверхности в ее произвольной (текущей) точке.

Если поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость Oxy в область D_{xy}, то вычисление потока векторного поля **F** через S сводится к вычислению двойного, интеграла по области D_{xy} по формуле

$$\Pi = \iint\limits_S \mathrm{Fn}_0 ds = \iint\limits_{Dxy} \frac{\mathrm{Fn}_0}{|\cos\gamma|}\Big|_{z=f(x,y)} dxdy,$$

где $\cos\gamma$ есть коэффициент при **k** в представлении единичного вектора нормали $\mathbf{n}_0$.

Аналогично, если поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость Oyz или Oxz, поток вычисляется по формулам:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathrm{Fn}_0 ds = \iint\limits_{Dyz} \frac{\mathrm{Fn}_0}{|\cos\alpha|}\Big|_{x=f(y,z)} dydz,$$

$$\Pi = \iint\limits_S \mathrm{Fn}_0 ds = \iint\limits_{Dxz} \frac{\mathrm{Fn}_0}{|\cos\beta|}\Big|_{y=f(x,z)} dxdz.$$

В более сложных случаях, когда поверхностьSсостоит из нескольких частей S_1, S_2, ..., то

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds = \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds + \dots .$$

Примеры решения задач

Задача1. Найдите поток векторного поля

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через треугольник ΔABC, где $A(1,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,1)$

Решение. Поток векторного поля **F**– это поверхностный интеграл первого рода вида

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds,$$

где $\mathbf{n}_0$– вектор единичной нормали к поверхности, т.е. $|\mathbf{n}_0| = 1$, $\mathbf{F}\mathbf{n}_0$ – скалярное произведение векторов.

Поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

где P, Q, R – проекции вектора **F**.

В связи с этим имеются два способа решения задачи.

1 способ. Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S ydydz + xdxdz + dxdy$$

методом проектирования на все три координатные плоскости:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{yz}} ydydz - \iint\limits_{D_{xz}} xdxdz + \iint\limits_{D_{xy}} z \Big|_{z=1-x+y} dxdy.$$

Получим алгебраическую сумму трех двойных интегралов:

$$\Pi = \iint\limits_{\Delta BOC} ydydz - \iint\limits_{\Delta AOC} xdxdz + \iint\limits_{\Delta AOB} (1-x+y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+1} ydz - \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} xdz + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{0} (1-x+y)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} y(y+1)dy - \int\limits_{0}^{1} x(1-x)dx + \int\limits_{0}^{1} \left[-(1-x)(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \right] dx = -\frac{1}{6}.$$

2 способ. Вычислим поток как поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds.$$

Элемент площади поверхности представим в виде

$$ds = \sqrt{\left[f'_x\ (x,y)\right]^2 + \left[f'_y\ (x,y)\right]^2 + 1}\, dxdy,$$

где $f(x, y) = z$– уравнение поверхности S.

В нашем случае имеем:

$$\mathbf{F} = \{y, x, z\}, \qquad \mathbf{n}_0 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \qquad ds = \sqrt{3}dxdy.$$

Поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу по проекции ΔABC на плоскость Oxy:

$$\Pi = \iint\limits_{\Delta AOB} \frac{1}{\sqrt{3}}(y - x + z)\ \Big|_{z=1-x+y} \sqrt{3}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^0 (2y - 2x + 1)dy =$$

$$= -\int\limits_0^1 (-x^2 + x)dx = -\frac{1}{6}.$$

Задача 2. Найдите поток векторного поля

$$\mathbf{F} = (x + xy^2)\mathbf{i} + (y - yx^2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}$$

через часть поверхности S

$$x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0),$$

вырезаемую плоскостью $z = 1$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности,образуемой данными поверхностями).

Решение. Поверхность S является конусом, проекция которого на плоскость Oxy представляет собой круг радиуса 1. Нормаль кповерхности найдем как градиент скалярной функции

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

то есть

$$\mathbf{n} = \mathbf{grad}\Phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k},$$

отсюда

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Элемент площади ds найдем, учитывая, что

$$\cos\gamma = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Поток векторного поля **F** вычислим как поверхностный интеграл первого рода

$$\Pi = \iint_S \mathbf{F}\mathbf{n}_0 ds,$$

сводя его к двойному интегралу по проекции поверхности S на плоскость $0xy$:

$$\Pi = \iint_S \frac{x^2\left(1 + y^2\right) + y^2\left(1 - x^2\right) - z(z-3)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds =$$

$$= \iint_{Dxy} \left[\frac{x^2(1 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2(1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right) \right] dxdy.$$

Поскольку область Dxy является кругом с центром в начале координат, то удобно перейти к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \cdot \left[\frac{\rho^2 \cos^2\varphi(1 + \rho^2 \sin^2\varphi)}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^2 \sin^2\varphi(1 - \rho^2 \cos^2\varphi)}{\rho} - \rho + 3 \right] d\rho.$$

Упростив подынтегральное выражение, вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 3\rho \, d\rho = \frac{3}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\varphi = 3\pi.$$

Можно было и не переходя к полярным координатам упростить подынтегральное выражение и воспользоваться известной формулой площади круга.

Задача 3. Найдите дивергенцию векторного поля $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

Решение. Согласно определению дивергенции, имеем

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (z^2)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2\,(x + y + z).$$

Задача 4. Найдите поток векторного поля **F** через замкнутую поверхность S, если

$$\mathbf{F} = (e^y + 2x)\mathbf{i} + (xz - y)\mathbf{j} + \frac{1}{4}(e^{xy} - z)\mathbf{k},$$

$$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$

Решение. Поток через замкнутую поверхность можно вычислить по формуле Остроградского–Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \mathrm{div}\mathbf{F}dv,$$

где $\mathrm{div}\mathbf{F} = \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dQ}{dy} + \dfrac{dR}{dz}$, V – область, ограниченная поверхностью S.

Уравнение поверхности S преобразуем к виду:

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4,$$

из которого видно, что это сфера радиуса 2 с центром в точке C (0; 1; 0).
Найдем дивергенцию:

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = 2 - 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Вычислим поток

$$\Pi = \iiint\limits_V \frac{3}{4}\cdot dxdydz = \frac{3}{4}\cdot \iiint\limits_V dxdydz.$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

поэтому

$$\Pi = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi 2^3 = 8\pi .$$

Задача 5. Найдите поток векторного поля

$$\mathbf{F} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через замкнутую поверхность S:
$x^2 = y$, $y = 4x^2$, $z = y$, $z = 0$, $x \geq 0$ (нормаль внешняя).

Решение. Поток через замкнутую поверхность вычислим по формуле Остроградского–Гаусса. Для этого найдем дивергенцию

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = \frac{d(2x)}{dx} + \frac{d(2y)}{dy} + \frac{d(z)}{dz} = 5.$$

Поток равен тройному интегралу от дивергенции по области V, ограниченной снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $z = y$, а боковая поверхность представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oz. Таким образом, поток равен

$$\Pi_S = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}dv = 5\iiint\limits_V dxdydz = 5\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_0^y dz = 5\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} ydx = 5\int\limits_0^1 y\left(\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{y^5}\,\Bigg|_0^1 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дано векторное поле

$$\text{F} = yz\text{i} + xz\text{j} + xy\text{k} .$$

Найдите поток поля через внешнюю сторону поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \ x + y + z = a.$$

Ответ. 0.

3. Найдите поток векторного поля

$$\mathrm{F} = y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$$

через часть плоскости

$$P: \quad x + y + z - 1 = 0,$$

расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Ответ. $\frac{1}{3}$.

4. Найдите поток векторного поля

$$\mathrm{F} = -x\mathrm{i} + 2y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$$

через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости

$$x + 2y + 3z - 1 = 0$$

координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

Ответ. $\frac{1}{18}$.

5. Определите поток векторного поля

$$\mathrm{F} = x^3\mathrm{i} + y^3\mathrm{j} + z^3\mathrm{k}$$

через боковую поверхность конуса

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} \le \frac{z^2}{H^2}, \quad 0 \le z \le H.$$

Ответ. $\frac{1}{10}\pi R^2 H\left(3R^2 + 2H^2\right)$.)

6. Определите поток векторного поля

$$\mathrm{F} = x^2\mathrm{i} + y^2\mathrm{j} + z^2\mathrm{k}$$

через внешнюю сторону полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \ge 0).$$

Ответ: $\frac{\pi\ a^4}{2}$.

6. С помощью формулы Остроградского-Гаусса определите поток векторного поля

$$F = x^2 i + y^2 j + z^2 k$$

через внешнюю сторону поверхности куба

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a.$$

Ответ: $3a^4$.

7. Найдите поток векторного поля

$$\mathbf{A} = (\ln y + 7x)\mathbf{i} + (\sin z - 2y)\,\mathbf{j} + \left(e^y - 2z\right)\mathbf{k}$$

через поверхность σ, где σ – наружная сторона сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$$

Ответ: 4π.

8. С помощью формулы Остроградского-Гаусса определите поток векторного поля

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = a.$$

Ответ. $\dfrac{a^3}{2}$.

9. Найдите векторные линии векторного поля $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$.

Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2,\ y - z = C_1$.

10. Найдите векторные линии поля $grad u$, если $u = x + y^2$.

Ответ: $x = \dfrac{1}{2}\ln y + C_1,\ z = C_2$.

Практическое занятие № 15

ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ЦИРКУЛЯЦИЯ

Пусть в некоторой области пространства задано векторное поле

$$\mathbf{F}(M) = P(x, y,z)\mathbf{i} + Q(x, y,z)\mathbf{j} + R(x, y,z)\mathbf{k}$$

и линия Lс указанным на ней направлением.

Линейным интегралом векторного поля **F** вдоль линии L называется криволинейный интеграл

$$w = \int\limits_L \mathbf{F}\boldsymbol{\tau}dl = \int\limits_L \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ –единичный касательный вектор к линии L,dl–дифференциал ее дуги, **r**-радиус-вектор точки, описывающей линию L. Если **F**–поле сил, то линейный интеграл представляет собой работу этого силового поля вдоль линии L.

Если линия L задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

причем в начальной и конечной точках пути параметр t соответственно принимает значения $t = \alpha$ и $t = \beta$, то

$$w = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}\,dt.$$

В случае плоской линии L формула упрощается очевидным образом (полагают везде $z = 0$).

При изменении направления линии L (с концами A и B) линейный интеграл меняет знак:

$$w = \int\limits_{AB} \mathbf{F}d\mathbf{r} = -\int\limits_{BA} \mathbf{F}d\mathbf{r}.$$

Циркуляцией векторного поля **F** называется линейный интеграл этого поля вдоль замкнутого пути L:

$$\text{Ц} = \oint\limits_L \mathbf{F}d\mathbf{r}.$$

Циркуляция, как всякий линейный интеграл, может быть вычислена непосредственно по вышеуказанным формулам.

Если линия L разделена на две части L_1 и L_2, то

$$\int\limits_L \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int\limits_{L_1} \mathbf{F}d\mathbf{r} + \int\limits_{L_2} \mathbf{F}d\mathbf{r}.$$

Векторному полю

$$\mathbf{F}= P(x, y,z)\mathrm{i}+ Q(x, y,z)\mathbf{j} + R(x, y,z)\mathbf{k}$$

может быть поставлено в соответствие другое векторное поле, называемое **ротором поля F** и определяемое равенством

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса. Если в некоторой области пространства содержится двусторонняя кусочно-гладкая поверхность *S*, ограниченная кусочно-гладким контуром *L*, с единичным вектором нормали $\mathbf{n}_0$, выбранным так, чтобы видимый с его конца обход контура *L* совершался против часовой стрелки, то

$$Ц = \oint_L \mathbf{F}d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rotF} \cdot \mathbf{n}_0 ds,$$

т.е. циркуляция равна потоку ротора векторного поля **F** через поверхность *S*, «натянутую» на контур *L*.

Так как

$$\mathbf{n}_0 = \cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k},$$

то на основании определения циркуляция может быть записана так:

$$Ц = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] ds.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Найдите работу силы **F** при перемещении вдоль линии *L* от точки *M* к точке *N*, если

$$\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j};$$

$$L : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \qquad y \ge 0; \qquad M(3, 0);\ N(-3, 0).$$

Решение. Работа выражается криволинейным интегралом второго рода:

$$A=\int\limits_L \mathbf{F}d\mathbf{r}=\int\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy\,.$$

Используя параметрическое представление эллипса L:

$$\begin{cases} x=3\cos t,\\ y=2\sin t,\end{cases}$$

сведём криволинейный интеграл к определённому интегралу:

$$A=\int\limits_0^{\pi}\left[-\left(9\cos^2 t-4\sin^2 t\right)\cdot 3\sin t+\left(9\cos^2 t+4\sin^2 t\right)\cdot 2\cos t\right]dt=-82/3.$$

Задача 2. Найдите циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}=-\omega\, y\mathbf{i}+\omega\, x\mathbf{j}$ по окружности $x = a\cos t$, $y=a\sin t$ в положительном направлении.

Решение. По определению циркуляции получаем

$$Ц=\oint\limits_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=\oint\limits_C -\omega y dx+\omega x dy=\omega\int\limits_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)dt=2\pi a^2\omega.$$

Задача 3. Найдите циркуляцию Ц вектора

$$\mathbf{R} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

(c-постоянная) вдоль окружности $(x-2)^2+y^2=1$, $z = 0$ в положительном направлении.

Решение. Циркуляция Ц поля $\mathbf{R}$ вдоль замкнутого контура C равна, по определению, интегралу

$$Ц=\oint\limits_C \mathrm{R}\tau dl\,.$$

Параметрические уравнения окружности берем в виде

$$x = 2 + \cos\varphi,\quad y = \sin\varphi,\quad z = 0 \quad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

При этом получаем:

$$\boldsymbol{\tau} = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}.$$

Вектор поля **R** выразим через параметр

$$\mathbf{R} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + (\mathbf{2} + \cos\varphi)\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Найдем скалярное произведение

$$\mathbf{R\tau} = 1 + 2\cos\varphi.$$

Учитывая, что $dl = d\varphi$, получим циркуляцию поля **R**:

$$Ц = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi.$$

Задача 4. Найдите циркуляцию векторного поля

$$\boldsymbol{A} = (x - y)\cdot\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

вдоль контура C, который является линией пересечения конуса и плоскости (в положительном направлении):

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = 1/2. \end{cases}$$

Решение. Можно воспользоваться формулой Стокса, если на контур C «натянуть» плоскость z = 1/2 и Вычислите поток ротора векторного поля **A** через эту поверхность:

$$Ц = \int_C \mathbf{A}d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}_0 \mathrm{d}s.$$

Найдём ротор векторного поля **A**:

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - y & x & z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 0 + \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}\cdot 2.$$

Поверхность S является плоскостью z = 1/2, поэтому

$$\mathbf{n}_0 = \{0, 0, 1\}.$$

Элемент площади поверхности ds можно выразить по формуле:

$$ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = dxdy,$$

поскольку $\cos\gamma = 1$.

Поверхностный интеграл сводится к двойному интегралу по проекции поверхности S на плоскость Oxy, которая является кругом радиуса 1:

$$Ц = \iint\limits_S 2 \cdot 1 ds = \iint\limits_{Dxy} 2dxdy = 2\pi.$$

Задача 5. Найдите циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = (x + 3y + 2z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ по контуру треугольника MNP,где $M(2;0;\ 0)$, $N\ (0;3;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ 1)$.

Решение. Согласно формуле Стокса,

$$Ц = \oint\limits_C \mathbf{Fdr} = \iint\limits_S \mathbf{n}_0 \mathbf{rotF} ds.$$

Здесь C– контур треугольника MNP, лежащего в плоскости $3x + 2y + 6z - 6 = 0$, проходящей через три данные точки. Найдем ротор данного векторного поля:

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + 2z & 2x + z & x - y \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial(x - y)}{\partial y} - \frac{\partial(2x + z)}{\partial z}\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial(x - y)}{\partial x} - \frac{\partial(x + 3y + 2z)}{\partial z}\right]\mathbf{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial(2x + z)}{\partial x} - \frac{\partial(x + 3y + 2z)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Формула Стокса в векторной форме имеет вид:

$$\oint\limits_C \mathbf{Fdr} = \iint\limits_S \mathbf{n_0} \cdot \mathbf{rotF} dS,$$

т.е. циркуляция вектора вдоль замкнутого контураC, ограничивающего некоторую поверхность S, равна потоку вихря через эту поверхность (направления обхода контура и нормали должны быть согласованы друг с другом).

Следовательно,

$$Ц = \iint_S \mathbf{n}_0 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{F} dS = \iint_S (\mathrm{rot}\mathbf{F})_x \, dydz + (\mathrm{rot}\mathbf{F})_y \, dzdx + (\mathrm{rot}\mathbf{F})_z \, dxdy =$$

$$= -2 \iint_{D_{yz}} dydz + \iint_{D_{zx}} dzdx - \iint_{D_{xy}} dxdy = -2\int_0^3 dy \int_0^{1-y/3} dz + \int_0^1 dz \int_0^{2-2z} dx - \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} dy =$$

$$= -2\left(y - \frac{y^2}{6} \right)\Bigg|_0^3 + \left(2z - z^2\right)\Big|_0^1 - \left(3x - \frac{3}{4}x^2 \right)\Bigg|_0^2 = -5 .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите работу силы $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ при перемещении вдоль линии $L: \ y = x^3$ от точки $M(0; 0)$ к точке $N(2; 8)$.

Ответ:8.

2. Вычислите циркуляцию плоского векторного поля $F = (2x+x\sqrt{9-x^2+y^2} + 2y)\mathrm{i} + (xy-y\sqrt{9-x^2+y^2})\mathrm{j}$ вдоль замкнутого контура L, если L: $x^2+y^2 = 4$.

Ответ: – 8π.

3. Вычислите циркуляцию плоского векторного поля $F = (e^{x^2} + x\sqrt{5+x^2+y^2} + 2y^2)\mathrm{i} + (x+y\sqrt{5+x^2+y^2})\mathrm{j}$ вдоль замкнутого контура L, если L: $x^2+y^2=2x$.

Ответ: π.

4. Вычислите циркуляцию векторного поля

$F = (2x + z)\,\mathrm{i} + (2xz-3y^2)\mathrm{j} + (x^2 + 2y)\mathrm{k}$

вдоль замкнутого контура $ABCA$, если ABC- треугольник с вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$. (Ответ. $\frac{7}{6}$.)

5. Вычислите циркуляцию векторного поля

$F =(x^2-yz)\mathrm{i} + (y^2-xz)\mathrm{j} + (z^2-xy)\mathrm{k}$

вдоль замкнутого контура $ABCA$, если ABC- треугольник с вершинами $A(3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

Ответ: 0.

Рекомендуемая литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 129 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – 608 с.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч / П.Е. Данко., А.Г. Попов. [и др.] . – М.: Мир и Образование, 2007. Ч. 2. – 416 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб.пособие / А.П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 3-е изд. – Мн.: Выш. Шк., 2005. – 367 с.

5. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу[и др.]; под ред. С.Н. Федина. – 3-е изд., испр. – М.: Айрис – пресс, 2005. – 592 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум
Часть 3

Составители: **Антонова Алина Владимировна,**
Никитин Александр Сергеевич,
Ситдиков Айрат Салимович

Кафедра высшей математики КГЭУ

Редактор издательского отдела *Н.А. Мустакимова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 18.12.2017.
Формат 60×84/16. Бумага ВХИ. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 5,92. Уч.-изд. л. 2,01. Тираж 500 экз. Заказ № 5086

Редакционно-издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51