

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЛАВ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Практикум

Казань 2017

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2
М33

М33 MATLAB. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамические системы. Практикум / Сост.: В.В. Андреев, И.К. Насыров. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2017. – 97 с.

Рассмотрены основные теоретические и прикладные вопросы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Рассмотрены основные понятия динамических систем на примере логистического отображения и системы Лоренца. В качестве инструмента численного анализа использовалась система компьютерной математики MATLAB. Приведены примеры, а также задания для самостоятельной работы.

Практикум предназначен для студентов, изучающих дисциплины «Компьютерная математика», «Математические пакеты программ», «Нелинейные динамические системы» по образовательной программе «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем» направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», а также для магистрантов, изучающих дисциплину «Методы математического моделирования и прогнозирования» при освоении образовательной программы по направлениям подготовки 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», 27.04.01 «Управление в технических системах», 20.04.01 «Техносферная безопасность», 13.04.03 «Энергетическое машиностроение».

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26-018.2

ВВЕДЕНИЕ

Современные системы компьютерной математики (СКМ) предлагают целый набор интегрированных программных систем и пакетов программ для автоматизации математических расчетов: Eureka, Gauss, TK Solver!, Derive, Mathcad, Mathematica, Maple и др. Возникает вопрос: «А какое место занимает среди них система MATLAB?»

MATLAB – одна из наиболее известных, тщательно проработанных и проверенных временем систем автоматизации математических расчетов, построенная на расширенном представлении и применении матричных операций. Это нашло отражение в названии системы **matrix laboratory** – матричная лаборатория. Однако синтаксис языка программирования системы продуман настолько тщательно, что эта ориентация почти не ощущается теми пользователями, которых не интересуют непосредственно матричные вычисления.

Матрицы широко применяются в сложных математических расчетах, например при решении задач линейной алгебры и математического моделирования статических и динамических систем и объектов. Они являются основой автоматического составления и решения уравнений состояния динамических объектов и систем.

В настоящее время СКМ MATLAB далеко вышла за пределы специализированной матричной системы и стала одной из наиболее мощных универсальных интегрированных систем. Слово «интегрированная» указывает на то, что в этой системе объединены удобная оболочка, редактор выражений и текстовых комментариев, вычислитель и графический программный процессор. В новой версии MATLAB используются такие мощные типы данных, как многомерные массивы, массивы ячеек, массивы структур, массивы Java и разреженные матрицы, что открывает возможности применения системы при создании и отладке новых алгоритмов матричных и основанных на них параллельных вычислений и крупных баз данных.

В целом MATLAB – это уникальная коллекция реализаций современных численных методов компьютерной математики, созданных за последние три десятка лет. Она вобрала в себя и опыт, и правила, и методы математических вычислений, накопленные за тысячи лет развития математики. Это сочетается с мощными средствами графической визуализации и даже анимационной графики. Систему с прилагаемой к ней обширной документацией вполне можно рассматривать как фундаментальный многотомный электронный справочник по математическому обеспечению ЭВМ – от массовых персональных компьютеров до супер-ЭВМ.

Возможности MATLAB весьма обширны, а по скорости выполнения задач система нередко превосходит своих конкурентов. Она применима для расчетов практически в любой области науки и техники. Например, очень широко используется при математическом моделировании механических устройств и систем, в частности в динамике, гидродинамике, аэродинамике, акустике, энергетике и т.д. Этому способствует расширенный набор матричных и иных операций и функций.

Настоящая работа содержит методические указания по выполнению лабораторных работ.

Для начального ознакомления с СКМ MATLAB предназначено учебное пособие [1]. Для более подробного ознакомления можно порекомендовать книги [2–9].

В лабораторных работах №№ 1–3 рассматриваются вопросы решения обыкновенных дифференциальных уравнений в СКМ MATLAB с использованием соответствующих решателей как первого порядка, так и систем ОДУ и высших порядков.

Лабораторные работы №№ 4–5 посвящены рассмотрению основных понятий динамических систем (ДС), их классификации, фазового пространства, кинематической интерпретации системы ДУ, эволюции ДС. Рассмотрены также уравнение движения маятника и динамика осциллятора Ван дер Поля.

В лабораторных работах №№ 6–7 рассматриваются вопросы качественного анализа систем линейных ОДУ.

Вопросы качественного анализа систем нелинейных ОДУ, а также одномерное логистическое отображение, системы Энона и Лоренца рассматриваются в лабораторных работах №№ 8–9.

Студент, освоивший программу по направлению подготовки бакалавров 01.03.04 «Прикладная математика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», должен обладать:

- готовностью к самостоятельной работе (ОПК-1);
- способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования (ОПК-2);
- способностью использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на электронных вычислительных машинах, отлаживать, тестировать прикладное программное обеспечение (ПК-1).

Студент, освоивший программу по направлению подготовки магистров 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.04.03 «Энергетическое машиностроение» должен обладать:

- способностью формулировать цели и задачи исследования, выявлять приоритеты решения задач, выбирать и создавать критерии оценки (ОПК-1);
- способностью применять современные методы исследования, оценивать и представлять результаты выполнения работ (ОПК-2).

Студент, освоивший программу по направлению подготовки магистров 27.04.01 «Управление в технических системах», должен обладать следующими общепрофессиональными компетенциями:

- способностью использовать результаты освоения программы магистратуры (ОПК-2);
- готовностью оформлять, представлять, докладывать и аргументировано защищать результаты выполненной работы (ОПК-5).

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: сформировать у студентов представление об области применения дифференциальных уравнений (ДУ); привить умение решать задачу Коши для ДУ $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = f(x_0)$.

Теоретические сведения

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Анализ поведения многих систем и устройств в динамике, а также решение многих задач в теории колебаний обычно базируется на решении систем ОДУ. Их, как правило, представляют в виде системы из дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка в форме Коши:

$$dy/dt = y' = f(y, t) \quad (1.1)$$

с граничными условиями $y(t_0, t_{end}, p) = y$, где t_{end}, t_0 – начальные и конечные точки интервалов. Параметр t (независимая переменная) не обязательно означает время, хотя чаще всего решение ДУ ищется во временной области. Система ДУ в форме Коши записывается аналогично (1.1), но под y в этом случае подразумевается вектор-столбец зависимых переменных. Вектор p задает начальные условия.

Для решения ДУ второго и высшего порядка их нужно свести к системе ДУ первого порядка.

Возможны ДУ, не разрешенные относительно производной:

$$F(t, y, dy/dt) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) аналитически к форме (1.1) обычно привести не удастся. Однако численное решение особых трудностей не вызывает: достаточно для определения $f(y, t)$ решить (1.2) численно относительно производной при заданных y и t .

Решатели ОДУ

Для решения систем ОДУ в MATLAB реализованы различные численные методы. Их реализации названы *решателями* ОДУ.

В этом разделе обобщенное название solver (решатель) означает один из возможных численных методов решения ОДУ: ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, bvp4c или pdepe.

Решатели реализуют следующие методы решения систем ДУ:

- ode45 – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядков в модификации Дорманда и Принца. Это классический метод, рекомендуемый для начальной пробы решения. Во многих случаях он дает хорошие результаты, если система решаемых уравнений не жесткая;

- ode23 – одношаговые явные методы Рунге-Кутты 2-го и 4-го порядков в модификации Богацки и Шампина. При умеренной жесткости системы ОДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения;

- ode113 – многошаговый метод Адамса-Башворта-Мултона переменного порядка класса предиктор-корректор. Это адаптивный метод, который может обеспечить высокую точность решения;

- ode15s – многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5, по умолчанию 5), использующий формулы численного «дифференцирования назад». Это адаптивный метод, его стоит применять, если решатель ode45 не обеспечивает решения и система ДУ жесткая;

- ode23s – одношаговый метод, использующий модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка. Может обеспечить высокую скорость вычислений при низкой точности решения жесткой системы ДУ;

- ode23t – неявный метод трапеций с интерполяцией. Этот метод дает хорошие результаты при решении задач, описывающих колебательные системы с почти гармоническим выходным сигналом. При умеренно жестких системах ДУ может дать высокую точность решения;

- ode23tb – неявный метод Рунге-Кутты в начале решения и метод, использующий формулы «дифференцирования назад» 2-го порядка в последующем. Несмотря на сравнительно низкую точность, этот метод может оказаться более эффективным, чем ode15s;

- bvp4c – служит для проблемы граничных значений систем ДУ вида $y' = f(t, y)$, $F(y(a), y(b), p) = 0$ (полная форма системы уравнений Коши). Решаемые им задачи называют двухточечными краевыми задачами, поскольку решение ищется при задании граничных условий как в начале, так и в конце интервала решения.

Все решатели могут решать системы уравнений, представленных в явном виде $y' = F(t, y)$, причем для решения жестких систем уравнений рекомендуется использовать только специальные решатели `ode15s`, `ode23s`, `ode23t`, `ode23tb`.

Использование решателей систем ОДУ

В описанных далее функциях для решения систем ДУ приняты следующие обозначения и правила:

- $tspan$ – вектор, определяющий интервал интегрирования $[t_0 \ t_{final}]$: для получения решений в конкретные моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_{final}$ (расположенные в порядке уменьшения или увеличения) нужно использовать $tspan = [t_0 \ t_1 \ \dots \ t_{final}]$;
- y_0 – вектор начальных условий;
- $options$ – аргумент, создаваемый функцией `odeset` (еще одна функция, `odeget`, или `bvpget` (только для `bvp4c`), позволяет вывести параметры, установленные по умолчанию или с помощью функции `odeset/bvpset`);
- p_1, p_2, \dots – произвольные параметры, передаваемые в функцию F ;
- T, Y – матрица решений Y , где каждая строка соответствует времени, возвращенному в векторе-столбце T .

Перейдем к описанию синтаксиса функций для решения систем ДУ (под именем `solver` подразумевается любая из представленных выше функций):

1. $[T, Y] = \text{solver}(@F, tspan, y_0)$ интегрирует систему ДУ вида $y' = F(t, y)$ на интервале $tspan$ с начальными условиями y_0 . Параметр $@F$ – дескриптор ОДУ-функции (можно также задавать функцию в виде $'F'$). Каждая строка в массиве решений Y соответствует значению времени, возвращаемому в векторе-столбце T .

2. $[T, Y] = \text{solver}(@F, tspan, y_0, options)$ дает решение, подобное описанному выше, но с параметрами, определяемыми значениями аргумента `options`, созданного функцией `odeset`. Обычно используемые параметры включают допустимое значение относительной погрешности `RelTol` (по умолчанию $1e3$) и вектор допустимых значений абсолютной погрешности `AbsTol` (все компоненты по умолчанию равны $1e6$).

3. $[T, Y] = \text{solver}(@F, tspan, y_0, options, p_1, p_2, \dots)$ дает решение, подобное описанному выше, передавая дополнительные параметры p_1, p_2, \dots в m -файл F всякий раз, когда он вызывается. Используйте `options=[]`, если никакие параметры не задаются.

Задание на выполнение лабораторной работы [10]

1. Найдите решения ДУ первого порядка $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на промежутке $[a, b]$.
2. Постройте графики функции.

Методические рекомендации по выполнению задания

Пример

Найдите решение дифференциального уравнения $y' = x - \cos(y/\pi)$ на отрезке $[1,7; 2,7]$, для которого $y(1,7) = 5,3$.

Решение

Создайте в Command Window функцию пользователя

```
g=@(x,y)[x-cos(y/pi)];
```

В синтаксисе функции $@(x,y)$ x – независимая переменная, y – зависимая переменная, $x - \cos(y/\pi)$ – правая часть ДУ.

Процесс решения осуществляется обращением в Command Window к решателю (солверу) следующим оператором:

```
[x,ya]=ode23(g,[1.7,2.7],[5.3]);
```

Построение графика с сеткой осуществляется следующими операторами:

```
plot(x,ya)
grid on
```

Результат представлен на рис. 1.1

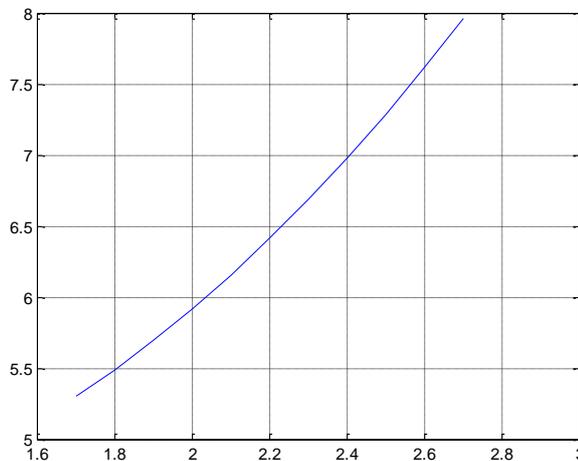


Рис. 1.1. Визуализация численного решения

Варианты заданий представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Варианты заданий

Номер варианта	$y' = F(x, y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a, b]$
1	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8)=2,6$	$[1,8; 2,8]$
2	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6)=0,8$	$[0,6; 1,6]$
3	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1)=2,5$	$[2,1; 3,1]$
4	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5)=0,6$	$[0,5; 1,5]$
5	$y' = x + \cos \frac{y}{2,25}$	$y_0(1,4)=2,2$	$[1,4; 2,4]$
6	$y' = x + \sin \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7)=5,3$	$[1,7; 2,7]$
7	$y' = x + \cos \frac{y}{e}$	$y_0(1,4)=2,5$	$[1,4; 2,4]$
8	$y' = x + \cos \frac{y}{3}$	$y_0(1,6)=4,6$	$[1,6; 2,6]$
9	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8)=2,6$	$[1,8; 2,8]$
10	$y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7)=5,3$	$[1,7; 2,7]$
11	$y' = x + \cos \frac{y}{1,25}$	$y_0(0,4)=0,8$	$[0,4; 1,4]$
12	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(1,2)=1,4$	$[1,2; 2,2]$

Порядок выполнения работы

1. Изучите теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

Контрольные вопросы

1. Каков вид ОДУ в форме Коши?
2. Каков вид системы ОДУ в форме Коши?
3. Что такое решатели ОДУ?
4. Какие методы решения ОДУ реализуют решатели ДУ?

Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: сформировать у студентов представление о применении систем ДУ в различных областях; привить умения решать задачу Коши для систем ДУ.

Задание на лабораторную работу

1. Найдите решение системы ДУ

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -aP_1(t) + mP_2(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = aP_1(t) - (a-m)P_2(t) + 2mP_3(t), \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = aP_2(t) - (a-m)P_3(t) + 3mP_4(t), \\ \frac{dP_4(t)}{dt} = aP_3(t) - 3mP_4(t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $P_1(0) = 1, P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$ на промежутке $[0, 1]$;

2. Постройте графики функций.

Методические рекомендации по выполнению задания

Пример 1

Решите систему $\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$ при данных начальных условиях

$t_0 = 0, x_0 = -\frac{3}{17}, y_0 = \frac{4}{17}$ с использованием решателя ode23().

Решение:

1. Создайте в редакторе m-файл функции вычисления правых частей ДУ. Пусть имя в редакторе файла `sisdu.m`, тогда функция может иметь следующий вид:

```
function z=sisdu(t,y)
z1=-3*y(2)+cos(t)-exp(t);
```

```
z2=4*y(2)-cos(t)+2*exp(t);
z=[z1;z2];
```

Следует иметь в виду, что для того, чтобы MATLAB работал корректно, необходимо придерживаться следующих правил.

Исполняемая функция и обращающаяся к ней программа (m-файл) должны находиться в папке пользователя. Эту папку следует предварительно создать и указать путь к ней.

Данное действие осуществляется в несколько шагов.

На первом шаге в папке «Мои документы» создайте папку с названием группы.

Затем в Command Window MATLAB через пиктограмму обозревателя (сразу справа от окна указателя рабочего каталога) найдите созданную папку и нажмите ОК. В окне указателя рабочего каталога должен появиться адрес этой рабочей папки.

Сохраните созданную функцию в этой папке.

2. В Command Window введите следующие операторы:

```
>> t0=0; tf=5;y0=[-3/17,4/17];
>> [t,y]=ode23('sisdu',[t0,tf],y0);
>> plot(t,y)
>> grid on
```

Результат показан на рис. 2.1.

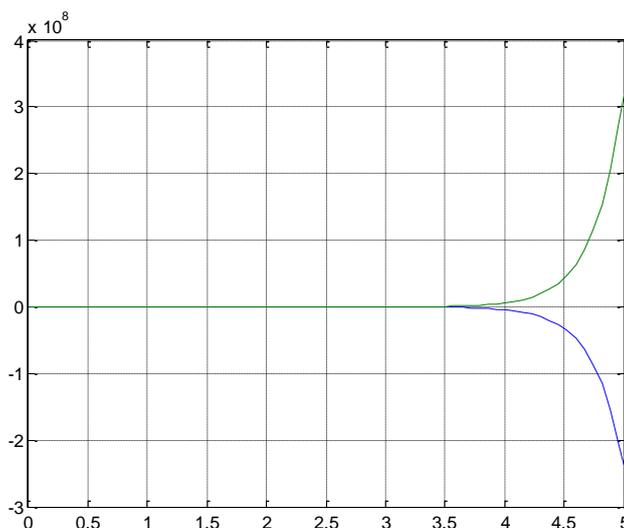


Рис. 2.1. Визуализация численного решения, полученного с помощью функции ode23

Пример 2

Приводится пример решения системы ОДУ 8-го варианта (см. табл. 2.1). Для этого следует создать следующую функцию:

```
function z=ssisdu(t,y)
% вариант 8
a=0.8;m=2.7;
z1=-a*y(1)+a*y(2);
z2=a*y(1)-(a-m)*y(2)+2*m*y(3);
z3=a*y(2)-(a-m)*y(3)+3*m*y(4);
z4=a*y(3)-3*m*y(4);
z=[z1;z2;z3;z4];
```

В Command Window введите следующие операторы:

```
>> [t,y]=ode23('ssisdu',[0 1],[1 0 0 0]);
>> plot(t,100*y)
>>grid on
```

Результат приведен на рис. 2.2.

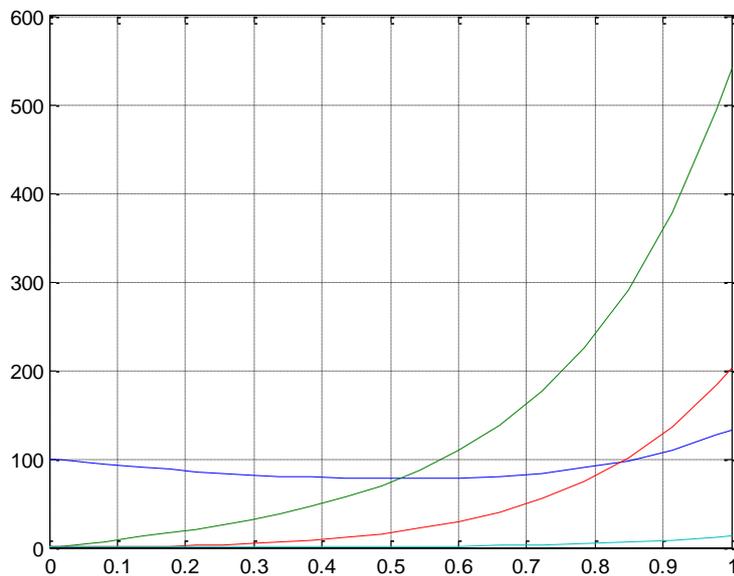


Рис. 2.2. Визуализация численного решения, полученного с помощью функции ode23

Варианты заданий

Номер варианта	Параметры	
	a	m
1	0,1	1,2
2	0,2	1,5
3	0,3	1,7
4	0,4	1,9
5	0,5	2
6	0,6	1,9
7	0,7	2,3
8	0,8	2,7
9	0,9	3
10	0,1	1,5
11	0,2	1,1
12	0,3	2

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть (см. Лабораторную работу № 1). Выполните задания, соответствующие номеру варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что значит решить задачу Коши для системы ДУ?
2. Какие существуют методы решения систем ДУ?
3. Как следует организовать работу с функциями, создаваемыми пользователем?

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Цель работы: сформировать у студентов представление о применении ДУ высших порядков в различных областях; привить умение решать задачу Коши для ДУ высших порядков с помощью прикладных программ; развить навыки проверки полученных результатов.

Решение ОДУ n -го порядка [10]

Методические рекомендации по выполнению задания

Пример 1

Решите ДУ второго порядка $y'' - 2y' - y = 6xe^x$ при данных начальных условиях: $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение:

Сначала приведите ДУ к системе уравнений:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = 6xe^x + 2y_1 + y. \end{cases}$$

1. Создайте m-файл функции вычисления правых частей ДУ.

Пусть имя файла `sisdu_3.m`, тогда функция может иметь следующий вид:

```
function z=sisdu_3(x,y)
z1=y(2);
z2=6*x*exp(x)+2*y(2)+y(1);
z=[z1;z2];
```

2. В Command Window выполните следующие действия:

```
>> x0=0;xf=10;y0=[0,1];
>> [x,y]=ode23('sisdu_3',[x0,xf],y0);
>> plot(x,y(:,1))
>>grid on
```

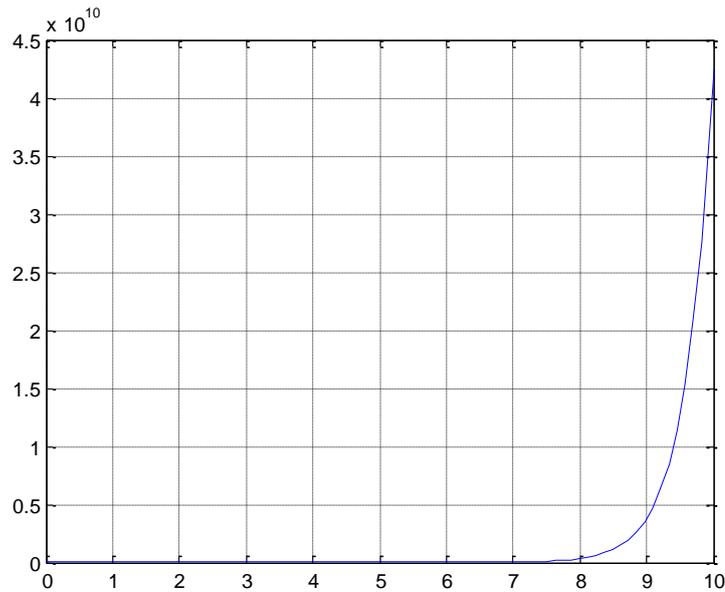


Рис. 3.1. Визуализация численного решения, полученного с помощью функции ode23

Задание на лабораторную работу

1. Найдите решение ДУ, приведенного в табл. 3.1 и удовлетворяющего начальным условиям на промежутке $[0, 10]$.
2. Постройте графики функций.

Таблица 3.1

Варианты заданий

Номер варианта	Уравнения	Начальные условия
1	$y'' + y = 4xe^x$	$y(0) = -2, y'(0) = 0$
2	$y'' + y = 4\sin x$	$y(0) = 1, y'(0) = 2$
3	$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$	$y(0) = \frac{26}{5}, y'(0) = \frac{39}{5}$
4	$y'' - 2y' - 3y = 48x^2e^x$	$y(0) = 1, y'(0) = -\frac{3}{2}$
5	$y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$	$y(0) = -1, y'(0) = 1$
6	$y'' - y = 2e^x - x^2$	$y(0) = 2, y'(0) = 1$
7	$y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$	$y(0) = y'(0) = 0$

Номер варианта	Уравнения	Начальные условия
8	$y'' + 9y = 6\cos 3x$	$y(0) = 1, y'(0) = 3$
9	$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$	$y(0) = 1, y'(0) = 2$
10	$4y'' + y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$	$y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2}$
11	$y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$	$y(0) = 2, y'(0) = 3$
12	$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$	$y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучите теоретическую часть (см. Лабораторную работу № 1). Выполните задания соответствующего варианта (см. табл. 3.1) и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
- титульный лист;
 - исходные данные варианта;
 - решение задачи;
 - результаты решения задачи.

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что значит решить задачу Коши для ДУ высших порядков?
2. Как привести ДУ m -го порядка к системе ДУ?

Лабораторные работы № 4–5

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Цель работ: познакомить студентов с основными понятиями динамических систем (ДС), их классификацией, фазовым пространством ДС, кинематической интерпретаций системы ДУ, эволюцией ДС. Рассмотреть уравнение движения маятника, динамику осциллятора Ван дер Поля.

Краткие теоретические сведения

Динамическая система (ДС) – математический объект, соответствующий реальным системам (физическим, химическим, биологическим и др.), эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием. ДС определяется системой уравнений (дифференциальных, разностных, интегральных и т.д.), допускающих существование на бесконечном интервале времени единственности решения для каждого начального условия.

Состояние ДС описывают набором переменных, выбираемых из соображений естественности их интерпретации, простоты описания, симметрии и т.п. Множество состояний ДС образует фазовое пространство, каждому состоянию ДС отвечает точка в нем, а эволюция изображается (фазовыми) траекториями. Чтобы определить близость состояний, в фазовом пространстве ДС вводят понятие расстояния. Совокупность состояний в фиксированный момент времени характеризуется фазовым объемом.

Описание ДС в смысле задания закона эволюции также допускает большое разнообразие: оно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей ДС.

Математическая модель ДС считается заданной, если введены динамические переменные (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции состояния во времени.

В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследование реальных систем идет по пути изучения соответствующих математических моделей, совершенствование и развитие которых определяется анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем

понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же ДС (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели [11].

Определение ДС, классификация

ДС формально определена, если заданы три следующих элемента:

1) множество состояний X , образующее полное метрическое пространство (фазовое пространство);

2) множество моментов времени Θ ;

3) оператор эволюции T_0^τ – некоторое отображение $T_0^\tau: X \rightarrow X$, которое каждому состоянию $x_0 \in X$ в начальный момент времени $t_0 \in \Theta$ однозначно ставит в соответствие некоторое состояние $x_t \in X$ в любой другой момент времени $t = t_0 + \tau \in \Theta$; таким образом, можно записать:

$$\bar{x}_t = T_{t_0}^\tau \bar{x}_0, \quad t = t_0 + \tau. \quad (4.1)$$

Оператор эволюции является непрерывным во множестве X и обладает следующими свойствами:

$$T_{t_0}^0 \bar{x}_0 = \bar{x}_0; \quad (4.2)$$

$$T_{t_0}^{\tau+s} \bar{x}_0 = T_{t_0+s}^\tau \circ T_{t_0}^s \bar{x}_0 = T_{t_0+\tau}^s \circ T_{t_0}^\tau \bar{x}_0, \quad (4.3)$$

где « \circ » означает суперпозицию операторов.

Исходя из характера множеств X , Θ и свойств оператора эволюции, можно дать наиболее общую классификацию динамических систем. Если $\Theta = R^1$, т.е. время принимает непрерывное множество значений, то оператор эволюции непрерывен по τ и соответствующую динамическую систему называют *системой с непрерывным временем* или *поток*, по аналогии с течением жидкости. Если множество Θ является счетным, то динамическую систему называют системой с дискретным временем, или *каскадом*.

Множество состояний X , так же как и множество моментов времени, может быть различно. Это может быть конечное или счетное множество, что характерно для класса ДС, называемых *клеточными автоматами*. Множество X может представлять собой арифметическое пространство с конечной размерностью N (вещественное R^N или комплексное Z^N).

Таким является фазовое пространство ДС, задаваемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Наконец, X может быть функциональным пространством. В этом случае ДС задается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями или обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими задержку во времени. В дальнейшем мы в основном сосредоточимся на потоковых системах с пространством состояний $X = R^N$.

Оператор эволюции может обладать теми или иными характерными свойствами, позволяющими выделить особые классы динамических систем. Например, можно выделить класс *линейных* ДС, для которых оператор эволюции является линейным, т.е. удовлетворяет правилу суперпозиции:

$$T_{t_0}^\tau(\bar{x} + \bar{y}) = T_{t_0}^\tau \bar{x}_0 + T_{t_0}^\tau \bar{y}. \quad (4.4)$$

Если оператор нелинейный (не удовлетворяет правилу (4.4)), то и соответствующая динамическая система называется *нелинейной*.

Если оператор эволюции T_0^τ определен для всех значений сдвига во времени τ , как для $\tau \geq 0$, так и для $\tau \leq 0$, то он является обратимым, т.е. существует обратный к нему оператор $T_{t_0+\tau}^{-\tau}$ позволяющий, зная состояние системы в момент $t = t_0 + \tau$, найти состояние системы в предшествующий момент t_0 . ДС также называется *обратимой во времени*. Если оператор эволюции определен только для $\tau \geq 0$, то он необратим и предшествующее состояние системы однозначно определить нельзя. Система в этом случае называется *необратимой во времени*.

Если оператор эволюции $T_{t_0}^\tau$ не зависит от момента времени t_0 , а определяется только начальным состоянием \bar{x}_0 и интервалом τ , то соответствующая динамическая система называется *автономной*, в противном случае система называется *неавтономной*. В обозначении оператора эволюции автономной системы не нужно указывать начальный момент времени, т.е. $T_{t_0}^\tau = T^\tau$, а свойство (4.3) принимает вид

$$T^{\tau+s} \bar{x}_0 = T^\tau \circ T^s \bar{x}_0 = T^s \circ T^\tau \bar{x}_0.$$

С физической точки зрения автономность системы означает, что на систему не действуют никакие внешние силы, и параметры системы

постоянны во времени. В дальнейшем мы будем рассматривать автономные системы или системы, которые можно свести к автономным, добавив некоторые дополнительные переменные состояния. Важно при этом, чтобы характерные траектории ДС оставались ограниченными. Например, к автономному виду легко сводятся системы с гармоническим внешним воздействием. Роль дополнительной переменной играет фаза внешнего воздействия, задаваемая в ограниченном интервале (например, в интервале $[-\pi; +\pi]$).

Если оператор эволюции сохраняет фазовый объем, то динамическая система называется *консервативной*. Полная энергия консервативной системы остается постоянной. Если оператор эволюции сжимает фазовый объем, то система называется *диссипативной*. В такой системе происходит рассеяние (диссипация) энергии.

Способы задания оператора эволюции могут быть различными. Как уже отмечалось, оператор $T_{t_0}^{\tau}$ часто задается в неявной форме в виде дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений. Возможно представление оператора эволюции в виде интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д. [11].

Фазовое пространство (ФП) в теории ДС, многомерное пространство, осями которого служат все обобщенные координаты q_i и скорости v_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ДС с N степенями свободы. Таким образом, ФП имеет размерность $2N$. Состояние системы изображается в ФП точкой с координатами $q_1, v_1, \dots, q_N, v_N$, а изменение состояния системы во времени – движением точки вдоль линии, называемой фазовой траекторией. Точки, соответствующие определенному значению энергии E системы, образуют в ФП $(2N-1)$ мерную поверхность, делящую пространство на две части более высоких и более низких значений энергии. Поверхности различных значений энергии не пересекаются. Траектории замкнутой системы (с постоянным значением E) лежат на этих поверхностях. В принципе траектория может быть рассчитана на основе законов механики, такой расчет можно осуществить практически, если число частиц системы не слишком велико. Для статистического описания состояния системы из многих частиц вводится понятие фазового объема (элемента объема ФП) и функции распределения системы вероятности пребывания точки, изображающей состояние системы, в любом элементе фазового объема [15].

Кинематическая интерпретация системы ДУ

Рассмотрим ДС, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. В рассматриваемом случае для определения ДС необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин x_1, x_2, \dots, x_n в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_i и x_i' отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени описывается системой ОДУ:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Если рассматривать величины x_1, x_2, \dots, x_N как координаты точки x в N -мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния ДС в виде этой точки. Последнюю называют изображающей, а чаще – фазовой точкой, а пространство состояний – фазовым пространством ДС. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой фазовой траекторией. В фазовом пространстве системы уравнениями (4.5) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке x выходящий из нее вектор скорости $F(x)$, компоненты которого даются правыми частями уравнений (4.5):

$$[f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, f_N(x_1, x_2, \dots, x_N)].$$

ДС (4.5) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (4.6)$$

где $\vec{F}(\vec{x})$ – вектор-функция размерности N . Необходимо уточнить взаимосвязь понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы. Под числом степеней свободы понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаиморасположение тел и объектов. В то же время для однозначного

решения соответствующих уравнений движения необходимо, помимо координат, задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством размерности, в два раза большей ($N = 2n$).

Эволюция ДС. Качественные особенности эволюции ДС проявляются в характере фазовых траекторий. Например, состоянию равновесия отвечает вырожденная траектория точки в ФП, периодическому движению – замкнутая траектория. Траектория квазипериодического движения с m несоизмеримыми частотами ω_i (т.е. такими, что не существует отличных от нуля целых чисел k_i , удовлетворяющих равенству $\sum_{i=1}^m k_i \omega_i = 0$) сколь угодно близко проходит около любой точки m -мерного тора (всюду плотна на нем). Вообще, для стационарного режима (установившегося движения системы) характерны траектории, плотные в некотором подмножестве фазового пространства, а для переходного процесса – траектории, не возвращающиеся в окрестность своих начальных точек [11].

Уравнения движения маятника [6]

Рассмотрим движение маятника без трения. Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = -\sin \theta(t),$$

здесь θ – угол отклонения маятника от вертикали.

Определив $y_1(t) = \theta(t)$ и $y_2(t) = d\theta(t)/dt$, можно ОДУ 2-го порядка записать как систему из двух ОДУ первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1(t) &= y_2(t), \\ \frac{d}{dt} y_2(t) &= -\sin y_1(t). \end{aligned}$$

Эта система уравнений может быть запрограммирована следующей m -функцией:

```
function yprime=pendd(t,y)
yprime=[y(2); -sin(y(1))];
```

Следующий *m*-файл дает возможность вычислить движение маятника на временном интервале $0 \leq t \leq 8$ для трех различных начальных условий $y_{\text{azero}}=[1;1]$, $y_{\text{bzero}}=[-5;2]$, $y_{\text{czero}}=[5;-2]$.

Первая строка это название *m*-файла. Третий оператор снизу дает возможность поместить на график с помощью мыши название соответствующим графикам. Оператор `xlim([-5 5])` ограничивает отображение интервала колебаний маятника:

```
%ppend
tspan=[0 8];
yazero=[1;1];
ybzero=[-5;2];
yczero=[5;-2];
[ta,ya]=ode45(@pendd,tspan,yazero);
[tb,yb]=ode45(@pendd,tspan,ybzero);
[tc,yc]=ode45(@pendd,tspan,yczero);
hold on
plot(ya(:,1),ya(:,2))
plot(yb(:,1),yb(:,2))
plot(yc(:,1),yc(:,2))
xlim([-5 5])
xlabel('угол'); ylabel('скорость');
gtext('колебание');gtext('вращение');
hold off
grid on
```

Результат вычислений можно видеть на рис. 4.1.

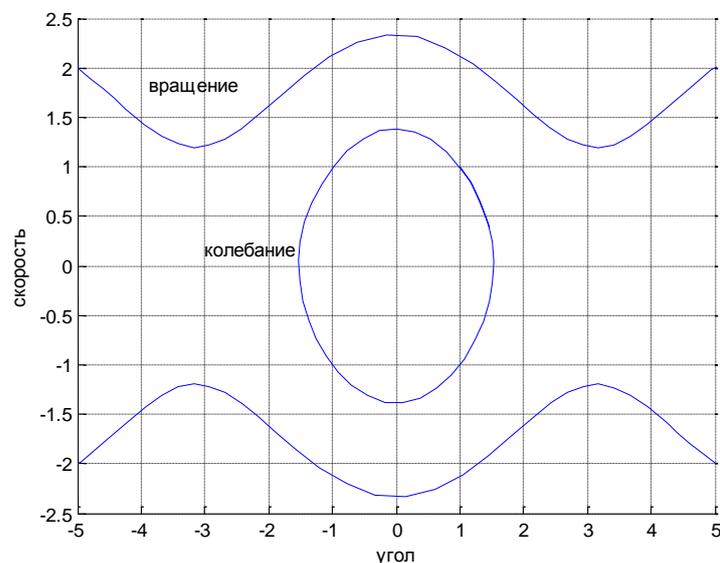


Рис. 4.1. Фазовые траектории колебания маятника

Предположим, что величина сил трения, которые, в конечном счете, приводят к остановке маятника, пропорциональна скорости маятника. Предположим также, что длина маятника равна 1 м, масса на конце маятника составляет 1 кг, а коэффициент трения примем равным 0,5. В таком случае уравнения движения для маятника будут следующими:

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = -0,5y(t) - 9,81 \sin x(t), \quad (4.7)$$

где t представляет время в секундах, x обозначает угол отклонения маятника от вертикальной линии в радианах (т.е. $x = 0$ – это исходное положение), y выражает угловую скорость маятника в радианах в секунду, а постоянная 9,81 – это приблизительное ускорение, вызванное действием силы тяжести, в метрах в секунду в квадрате.

На переменную g в Command Window (CW) запрограммирована система уравнений (4.7):

```
g = @(t, x) [x(2); -0.5*x(2) - 9.81*sin(x(1))];
```

Возьмем в качестве начального положения $x(0) = 0$ и начальной скорости $y(0) = 5$ и введем в CW следующую последовательность операторов:

```
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 5]);
plot(xa(:, 1), xa(:, 2))
grid on
```

На рис. 4.2 показан график x и y как функции от t на промежутке времени $0 < t < 20$ для этих начальных данных (чтобы использовать инструмент среды MATLAB для численного решения дифференциальных уравнений ode45, мы объединим x и y в один вектор x – смотрите оперативную справку для команды ode45).

Начав в точке $(0; 5)$, по мере увеличения t мы следуем за кривой, в то время как она закручивается по часовой стрелке к точке $(0; 0)$. Маятник колеблется назад и вперед, но с каждым колебанием угол отклонения становится меньше, пока маятник совсем не вернется в состояние покоя ко времени $t = 20$. Одновременно скорость также периодически изменяется, достигая своих наибольших значений в течение каждого колебания, когда маятник находится в середине своего колебания (угол близок к нулю), и достигает нуля, когда маятник находится в конце своего колебания.

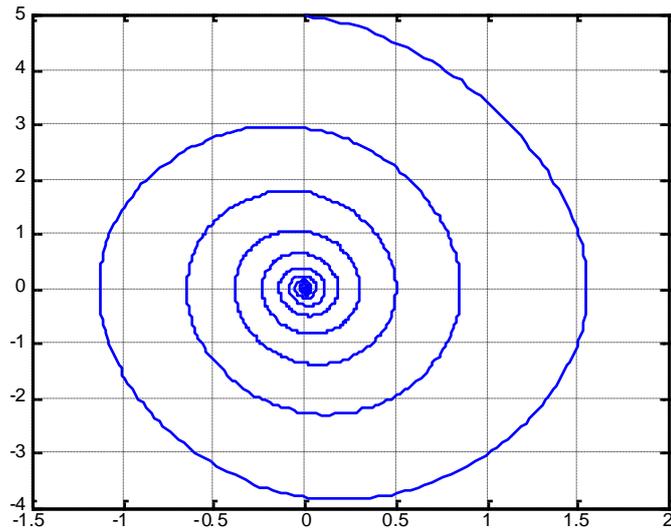


Рис. 4.2. График x и y как функции от t на промежутке времени $0 < t < 20$ для начального положения $x(0) = 0$ и начальной скорости $y(0) = 5$

Увеличим начальную скорость до 10.

```
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 10]);
```

На этот раз (рис. 4.3) угол увеличивается до значения, превышающего 14 рад., перед тем как кривая подходит к точке примерно (12,5; 0).

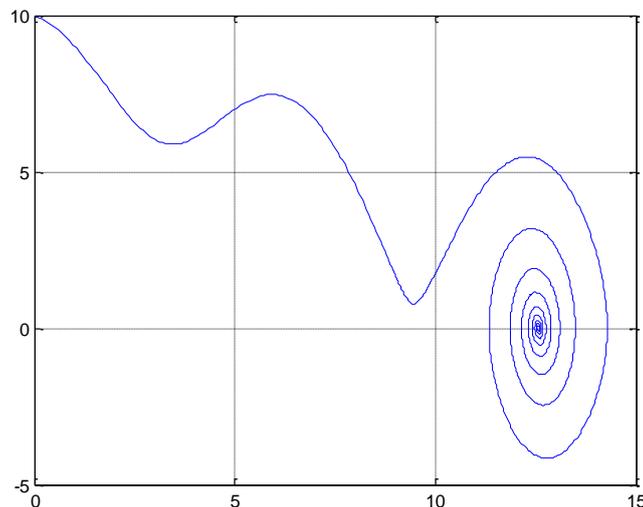


Рис. 4.3. График x и y как функции от t на промежутке времени $0 < t < 20$ для начального положения $x(0) = 0$ и начальной скорости $y(0) = 10$

Если быть более точными, кривая закручивается к точке $(4\pi; 0)$, потому что 4π рад. представляет то же самое положение маятника, что и 0 рад. Маятник выполнил два полных оборота перед началом своих затухающих

колебаний. Скорость сначала уменьшается, но затем повышается, после того как угол проходит через π , поскольку маятник проходит вертикальное положение и получает импульс. Импульса маятника будет достаточно только чтобы еще раз пройти через вертикальное положение в угле 3π .

Нахождение начальной скорости, которая заставляет маятник совершать полные вращения

Предположим, что мы хотим с точностью до 0,001 найти наименьшее значение начальной скорости, которая требуется, чтобы заставить маятник, начинающий движение из своего исходного положения, выполнить полное вращение один раз. Будет полезно показать решения, которые соответствуют нескольким различным начальным скоростям на одном графике.

Сначала мы рассмотрим целые значения скорости в промежутке от 5 до 10:

```
>> hold on
>> for a = 5:10
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 a]);
plot(xa(:, 1), xa(:, 2))
end
>> hold off
```

Начальные скорости 5, 6 и 7 не являются достаточно большими (рис. 4.4), чтобы увеличить угол более π , но начальные скорости 8, 9 и 10 достаточны, чтобы заставить маятник совершать полный оборот.

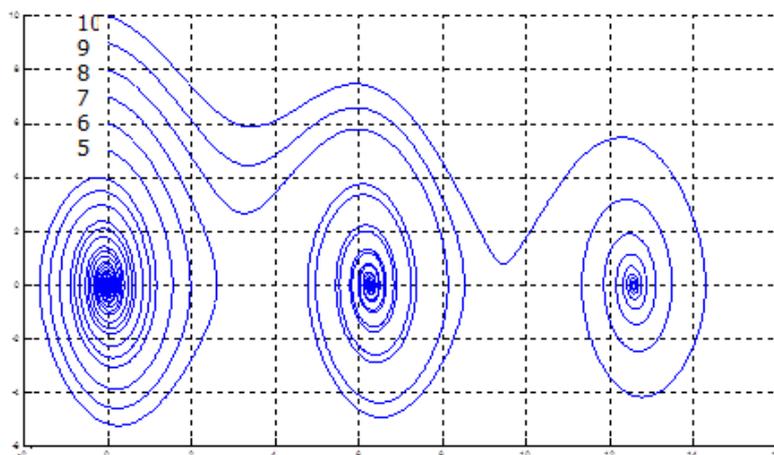


Рис. 4.4. Фазовые траектории маятника для набора скоростей 5–10 с шагом 1

Посмотрим, что происходит на промежутке между 7 и 8 (рис. 4.5).

```
>> hold on
>> for a = 7.0:0.2:8.0
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 a]);
plot(xa(:, 1), xa(:, 2))
end
>> hold off
```

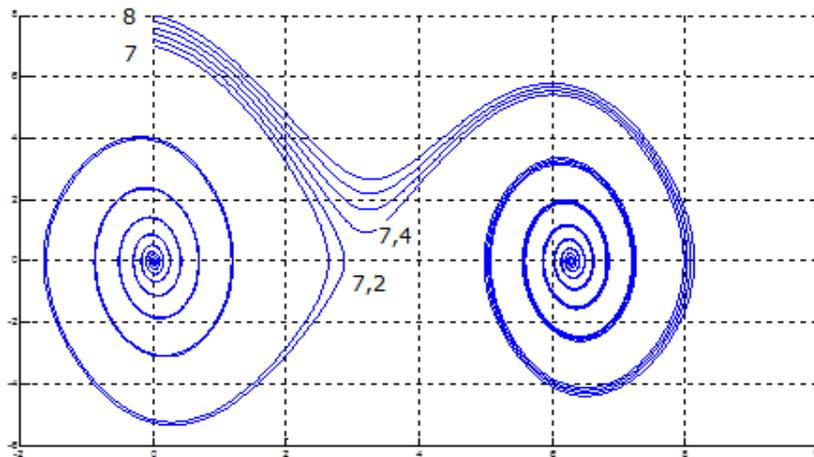


Рис. 4.5. Фазовые траектории маятника для набора скоростей 7 – 8 с шагом 0,2

Можно заметить (рис. 4.5), что ответ находится где-то между 7.2 и 7.4. Давайте выполним еще одно уточнение, возьмем шаг – 0,05 (рис. 4.6).

```
>> hold on
>> for a = 7.2:0.05:7.4
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 a]);
plot(xa(:, 1), xa(:, 2))
end
» hold off
```

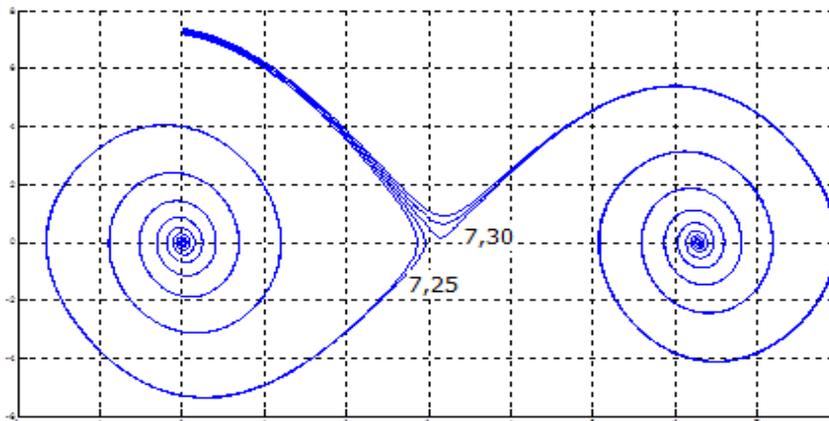


Рис. 4.6. Фазовые траектории маятника для набора скоростей 7,2 – 7,4 с шагом 0,05

Следует сделать вывод, что наименьшая необходимая скорость с точностью 0,01 находится где-то между 7,25 и 7,3 (рис. 4.7).

```
for a = 7.25:0.01:7.3
[t, xa] = ode45(g, [0:0.01:20], [0 a]);
plot(xa(:, 1), xa(:, 2))
end
```

Для более точного анализа увеличим область графика, где происходит смена режима колебания (рис. 4.7).

Видно, что наименьшая необходимая скорость находится где-то между 7,29 и 7,3.

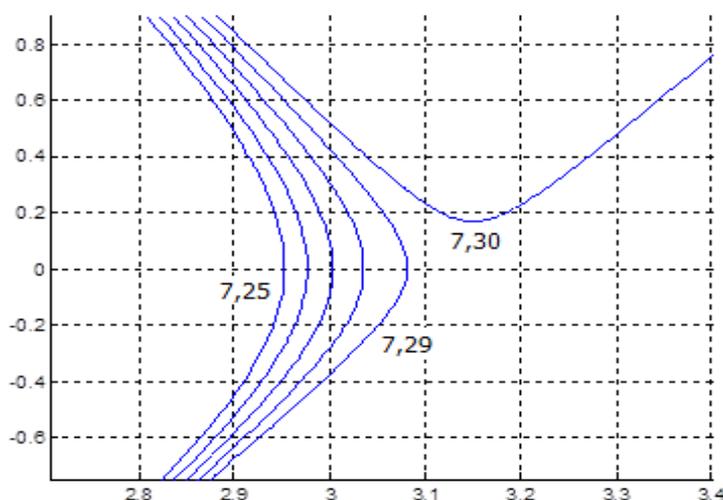


Рис. 4.8. Область фазовых траекторий маятника для набора скоростей 7,25 – 7,3 с шагом 0,01

Следует продолжить нахождение более точного значения скорости смены режима колебания.

Динамика осциллятора Ван дер Поля при $\omega^2 = 2$ и $c = 1$

Предельный цикл – устойчивый режим периодических колебаний в нелинейных системах после завершения переходных процессов.

Уравнение Ван дер Поля имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\omega^2 X - c (X^2 - 1) \frac{dX}{dt}.$$

Нелинейность обусловлена наличием коэффициента сопротивления – функции смещения – $c (X^2 - 1)$.

Перейдем от ОДУ 2-го порядка к системе двух уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = V, \\ \frac{dV}{dt} = -\omega^2 X - c(X^2 - 1)V. \end{cases}$$

Файл-функция для этих параметров, имеет следующий вид:

```
function dydt = vdp1(t,y)
dydt = zeros(2,1); dydt(1) = y(2);
dydt(2) = 1*(1-y(1).^2).*y(2)-2*y(1);
```

При начальном положении на предельном цикле ($x_0 = 2$, $v_0 = 0$) вызов файл-функции имеет следующий вид:

```
[t,y] = ode23(@vdp1,[0 25],[2;0]);
```

Следующий оператор дает возможность получить зависимость x и v от времени:

```
plot(t,y(:,1),t,y(:,2)), grid on
```

Результат представлен на рис. 4.9.

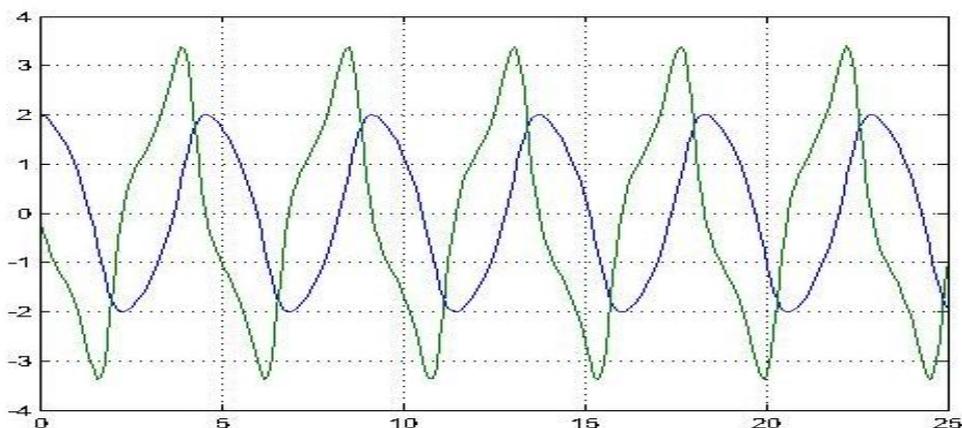


Рис. 4.9. Зависимость фазовых координат x и v от времени осциллятора Ван дер Поля при $\omega^2 = 2$ и $c = 1$

Следующий оператор дает возможность получить фазовый портрет системы (рис. 4.10):

`plot(y(:,1),y(:,2)), grid on`

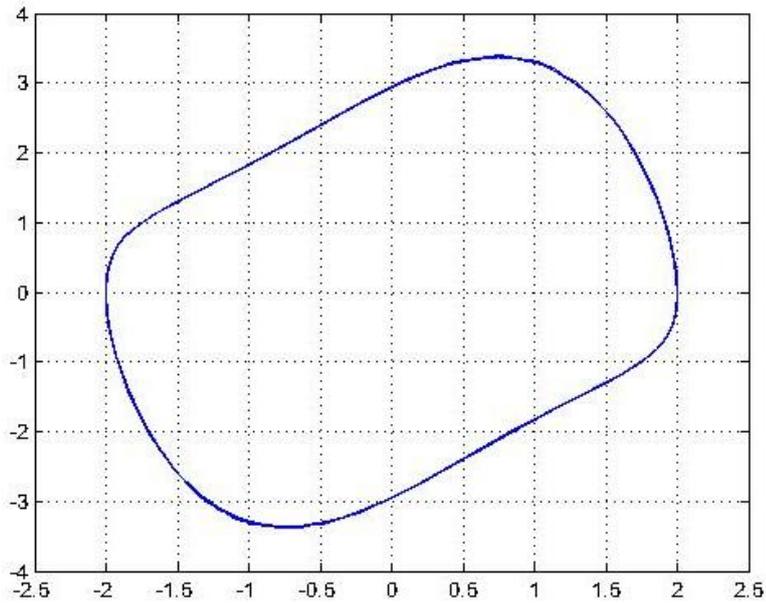


Рис. 4.10. Фазовые траектории осциллятора Ван дер Поля при $\omega^2 = 2$ и $c = 1$

Если взять начальные данные вне цикла ($x_0 = -0,5; v_0 = 5$), вызов файловой функции имеет следующий вид:

```
[t,y] = ode23(@vdp1,[0 25],[-0.5;5]);
```

Результат представлен на рис. 4.11.

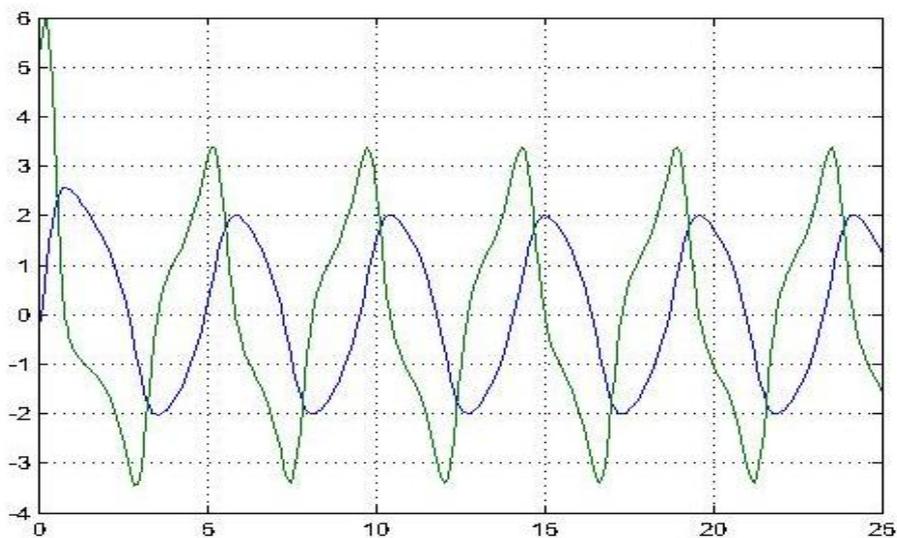


Рис. 4.11. Зависимость фазовых координат x и v от времени осциллятора Ван дер Поля при $x_0 = -0,5; v_0 = 5$

Фазовый портрет представлен на рис. 4.12.

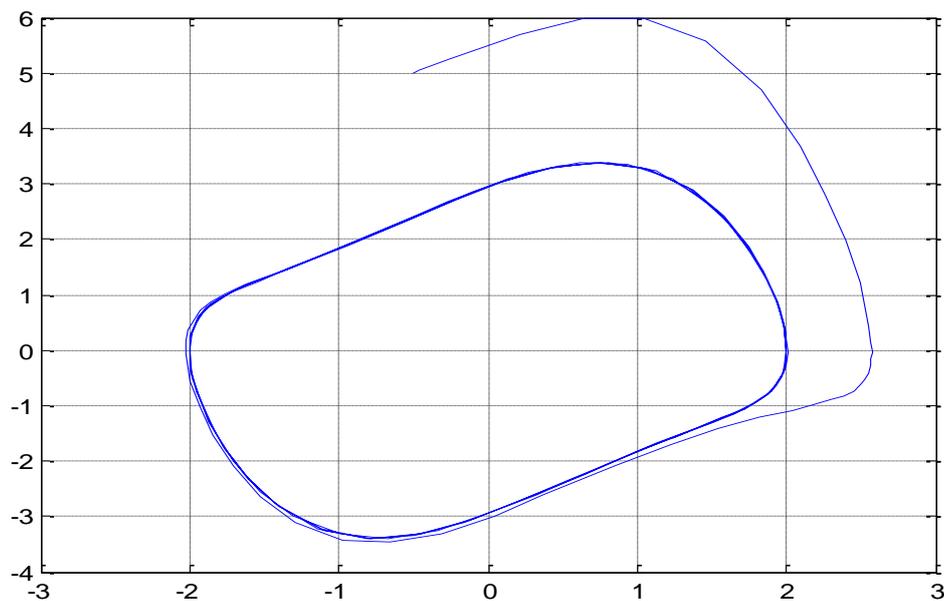


Рис. 4.12. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $x_0 = -0,5$; $v_0 = 5$

Если взять начальные данные внутри цикла ($x_0 = -0,05$; $v_0 = -0,05$) вызов файл-функции имеет следующий вид:

```
[t,y] = ode23(@vdp1,[0 50],[-0.05; -0.05]);
```

Результат представлен на рис. 4.13.

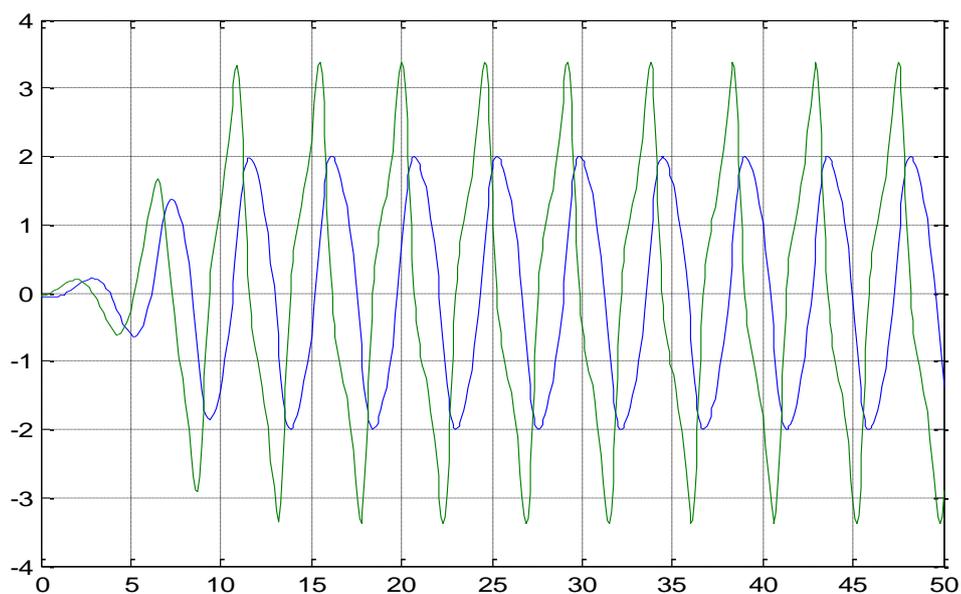


Рис. 4.13. Зависимость фазовых координат x и v от времени осциллятора Ван дер Поля при $x_0 = -0,05$; $v_0 = -0,05$

Фазовый портрет представлен на рис. 4.14.

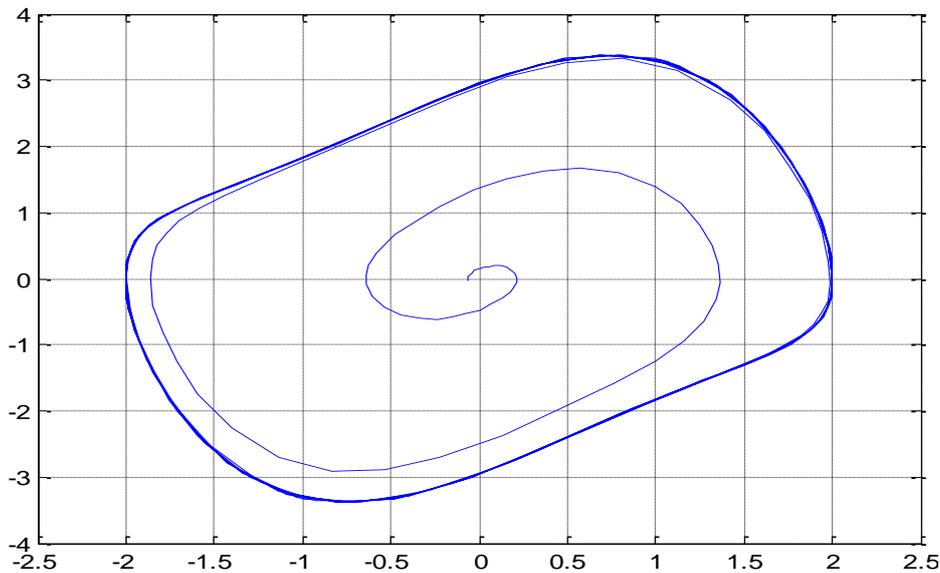


Рис. 4.14. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при $x_0 = -0,05$; $v_0 = -0,05$

Система Ван дер Поля с периодическим возмущением

В случае периодических возмущений уравнение Ван дер Поля имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X + c(X^2 - 1) \frac{dX}{dt} = A_0 \sin \Omega t.$$

Файл-функция для этой системы при значениях $A_0 = 2$ и $\Omega = 2$ имеет следующий вид:

```
function dydt = vdp1s(t,y)
dydt = zeros(2,1); dydt(1) = y(2);
dydt(2) = 1*(1-y(1).^2).*y(2)-2*y(1)+2*sin(2*t);
```

Фазовый портрет представлен на рис. 4.15.

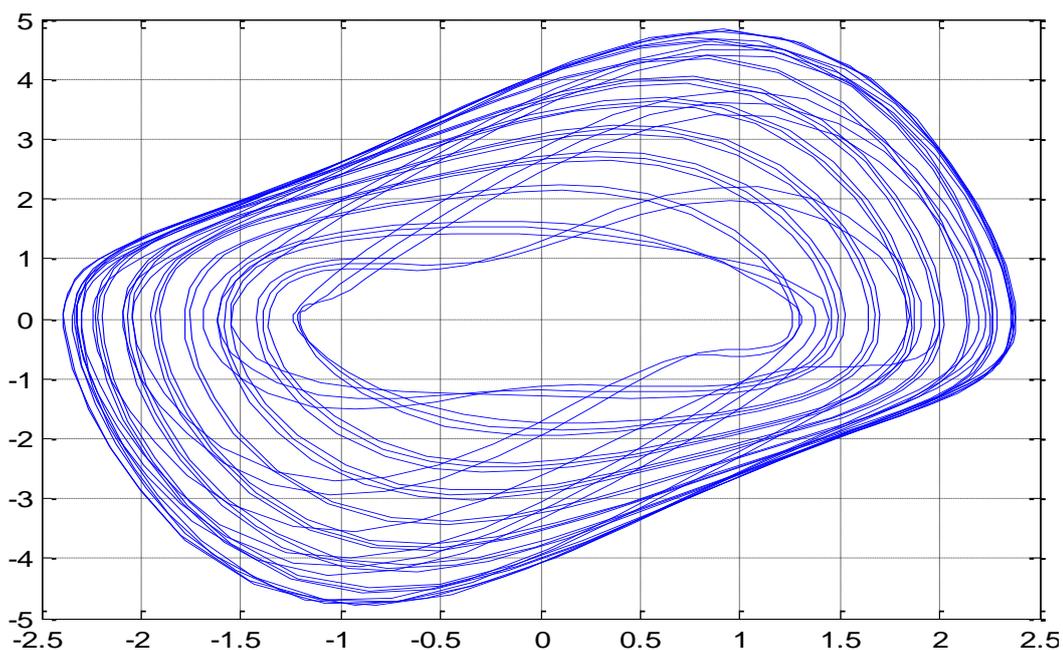


Рис. 4.15. Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля при периодических возмущениях с значениями параметров $A_0 = 2$ и $\Omega = 2$

Задание для самостоятельной работы

1. Уточните значение скорости, при которой маятник совершает полный оборот вокруг точки подвеса.
2. Проанализируйте поведение осциллятора Ван дер Поля при периодических возмущениях с различными значениями параметров A_0 и Ω .
3. Постройте графики зависимости координат от времени и фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля при периодических возмущениях с различными значениями параметров A_0 и Ω .

Порядок выполнения работы

1. Изучите теоретическую часть. Выполните задания и продемонстрируйте их преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
 - титульный лист;
 - исходные данные варианта;
 - решение задачи;
 - результаты решения задачи.

Контрольные вопросы

1. Что такое динамическая система (ДС)?
2. Какова классификация ДС?
3. Что такое фазовое пространство?
4. Что такое фазовая траектория?
5. В чем заключается кинематическая интерпретация системы ДУ?
6. Что такое математический маятник?
7. Что такое предельный цикл?

Лабораторные работы № 6–7

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работ: ознакомить студентов с методами качественного анализа динамических систем, представленных системой линейных ОДУ.

Теоретические сведения

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами, которая представляет собой линейную динамическую систему (ЛДС):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (6.1)$$

Координатную плоскость xOy называют **фазовой плоскостью** (ФП) ДС. Через любую точку плоскости проходит одна и только одна **фазовая кривая (траектория)** (ФТ). В системе (6.1) возможны три типа ФТ:

- точка,
- замкнутая кривая,
- незамкнутая кривая.

Точка на ФП соответствует стационарному решению (положению равновесия, точке покоя) системы (6.1), замкнутая кривая периодическому решению, а незамкнутая непериодическому.

Положения равновесия ДС

Положения равновесия системы (6.1) найдем, решая систему:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Система (6.1) имеет единственное нулевое положение равновесия, если определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \neq 0.$$

Если же $\det A = 0$, то, кроме нулевого положения равновесия, есть и другие, так как в этом случае система (6.2) имеет бесконечное множество решений.

Качественное поведение ФТ (тип положения равновесия) определяется собственными числами матрицы системы.

Классификация точек покоя

Собственные числа матрицы системы найдем, решая уравнение:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (6.3)$$

Заметим, что $a + d = \text{tr } A$ (след матрицы) и $ad - bc = \det A$.

В СКМ MATLAB определять собственные числа и собственные вектора системы ОДУ удобно с помощью функции $\text{eig}(A)$ [2, 3].

Собственные числа λ_i и собственные векторы $u_i \neq 0$ квадратной матрицы A удовлетворяют равенствам $A u_i = \lambda_i u_i$. Функция eig , вызванная с входным аргументом матрицей, находит все собственные числа матрицы и записывает их в выходной аргумент – вектор:

```
>> A = [2 3;3 5];
>> lam = eig(A)
lam =
    0.1459
    6.8541
>>
```

Для одновременного вычисления всех собственных векторов и чисел следует вызвать eig с двумя выходными аргументами.

```
>> [U, Lam] = eig(A);
```

Первый выходной аргумент и представляет собой матрицу, столбцы которой являются собственными векторами. Для доступа, например, к первому собственному вектору следует использовать индексацию при помощи двоеточия.

```
>> u1=U(:,1)
u1 =
-0.8507
0.5257
```

Вторым выходным аргументом Lam возвращается диагональная матрица, содержащая собственные числа исходной матрицы.

```
>> Lam
Lam =
0.1459    0
0    6.8541
```

Проверьте, правильно ли найдены, например, второе собственное число и соответствующий ему собственный вектор. Воспользуйтесь определением:

```
>> A*U(:, 2) - Lam(2, 2)*U(:, 2)
ans =
1.0e-015 *
0.4441
-0.8882
```

Классификация точек покоя в случае, когда $\det A \neq 0$, приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Классификация точек покоя

Корни уравнения (6.3)	Тип точки покоя
λ_1, λ_2 – вещественные, одного знака ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$)	Узел
λ_1, λ_2 – вещественные, разного знака ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$)	Седло
λ_1, λ_2 – комплексные, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 – комплексные, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$	Центр

Устойчивость точек покоя

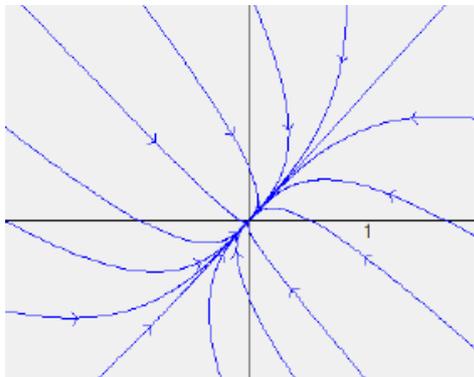
Собственные значения матрицы системы (6.1) однозначно определяют характер устойчивости положений равновесия (см. табл. 6.2).

Характер устойчивости положений равновесия

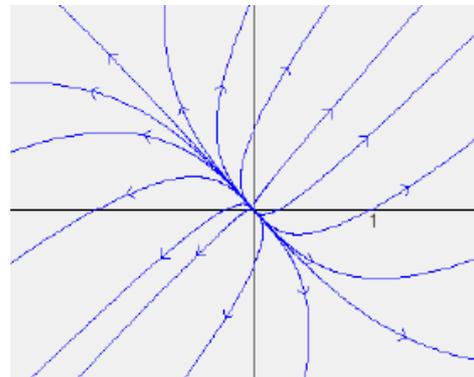
Условия на вещественную часть корней уравнения (6.3)	Тип точки и характер устойчивости
1. Если вещественные части всех корней уравнения (6.3) отрицательны, то точка покоя системы (6.1) асимптотически устойчива	Устойчивый узел, устойчивый фокус
2. Если вещественная часть хотя бы одного из корней уравнения (6.3) положительна, то точка покоя системы (6.1) неустойчива	Седло, неустойчивый узел, неустойчивый фокус
3. Если уравнение (6.3) имеет чисто мнимые корни, то точка покоя системы (6.1) устойчива, но не асимптотически.	Центр

Фазовые портреты ЛДС

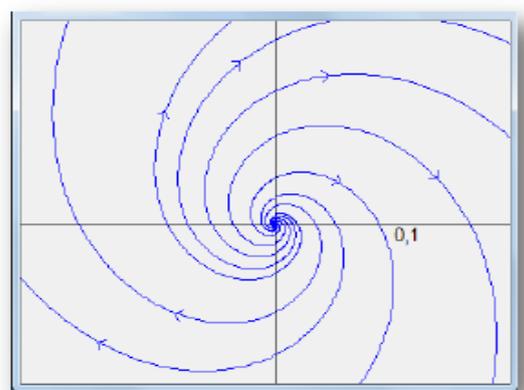
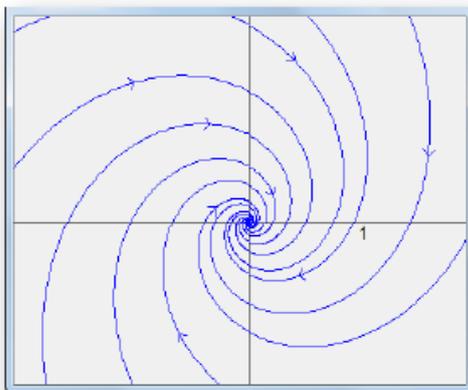
Устойчивый узел $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



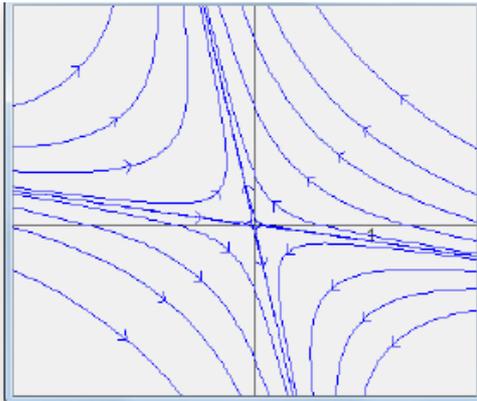
Неустойчивый узел $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



Устойчивый фокус $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0, \beta \neq 0$ Неустойчивый фокус $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta \neq 0$

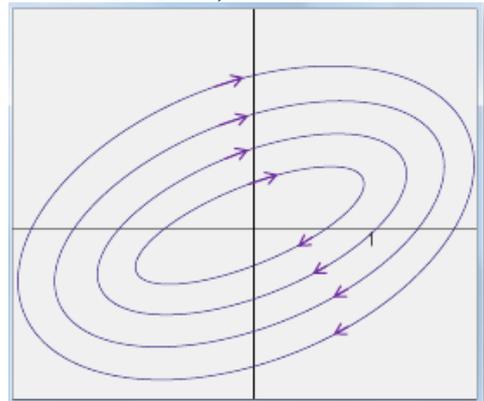


Седло $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



Дикритический узел

Центр $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \beta \neq 0$



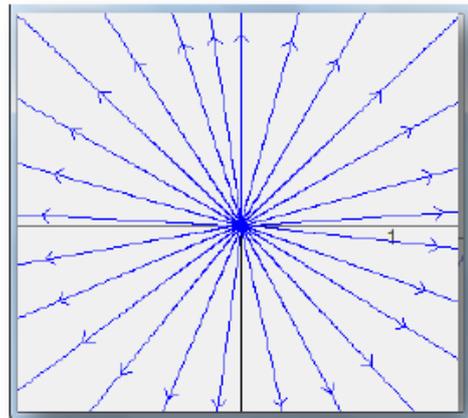
Неустойчивый дикритический узел

Имеет место для систем вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax, \\ \frac{dy}{dt} = ay, \end{cases}$$

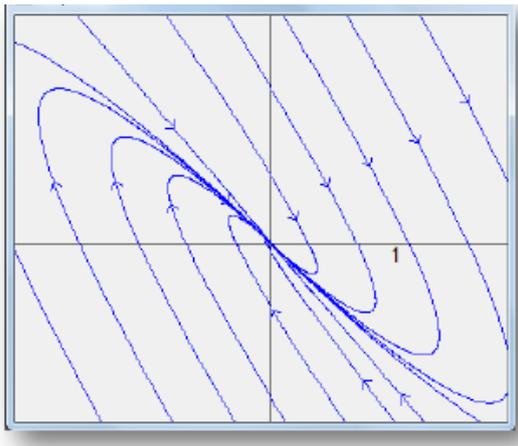
когда $a \neq 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 = a$.

Если $a < 0$, то узел асимптотически устойчив, если $a > 0$, то – неустойчив.

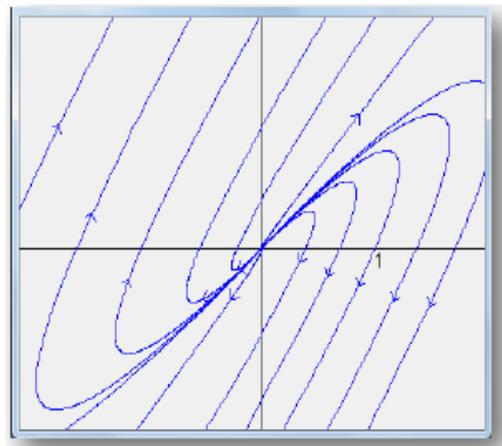


Вырожденный узел, если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ и в системе (6.1) $b^2 + c^2 \neq 0$.

Если $\lambda_1 < 0$, то устойчивый



Если $\lambda_1 > 0$, то неустойчивый



Бесконечное множество точек покоя

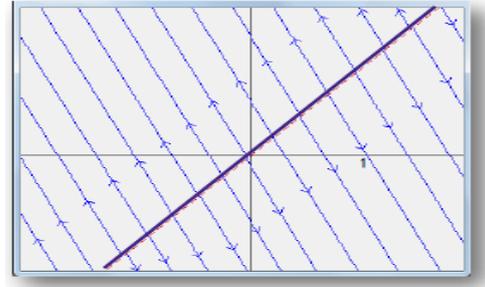
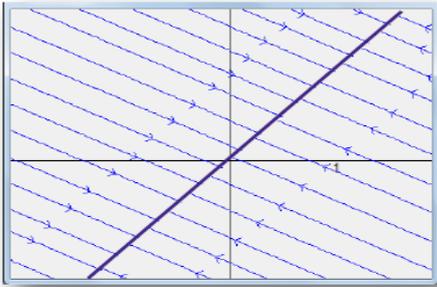
Если $\det A = 0$, то система (6.1) имеет бесконечное множество положений равновесия. При этом возможны три случая (см. табл. 6.3).

Множество положений равновесия

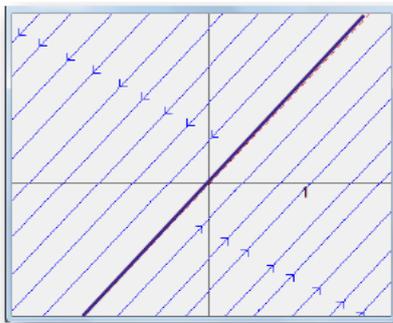
	Корни уравнения (6.3)	Определение точек покоя	Геометрическое место точек покоя
1	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (6.2) равносильна одному уравнению вида $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая на фазовой плоскости: $\alpha x + \beta y = 0$
2	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (6.2) равносильна числовому равенству $0 = 0$	Вся фазовая плоскость
3	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Система (6.2) равносильна уравнению $\alpha x + \beta y = 0$	Прямая $\alpha x + \beta y = 0$

Во втором случае любая точка покоя устойчива по Ляпунову. В первом же случае только, если $\lambda_2 < 0$.

Прямая устойчивых точек покоя $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ Прямая неустойчивых точек покоя $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$



Прямая неустойчивых точек покоя $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$



Фазовые прямые будут параллельны прямой точек покоя ($\alpha x + \beta y = 0$), если первый интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

имеет вид $\alpha x + \beta y = C$, где C – произвольная постоянная.

Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t .

Правила определения типа точки покоя

Можно определить тип точки покоя и характер ее устойчивости, не находя собственных значений матрицы системы (6.1), а зная только ее след $\text{tr} A$ и определитель $\det A$ (см. табл. 6.4 и рис. 6.1).

Таблица 6.4

Определение типа точки покоя и характера ее устойчивости

Определитель матрицы	След матрицы	Тип точки покоя
$\det A < 0$		Седло
$0 < \det A < \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Устойчивый узел (УУ)
	$\text{tr} A > 0$	Неустойчивый узел (НУ)
$\det A = \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Дикритический или вырожденный УУ
	$\text{tr} A > 0$	Дикритический или вырожденный НУ
$\det A > \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2$	$\text{tr} A < 0$	Устойчивый фокус (УФ)
	$\text{tr} A = 0$	Центр
	$\text{tr} A > 0$	Неустойчивый фокус (НФ)

Классификация особых точек линейных двумерных систем

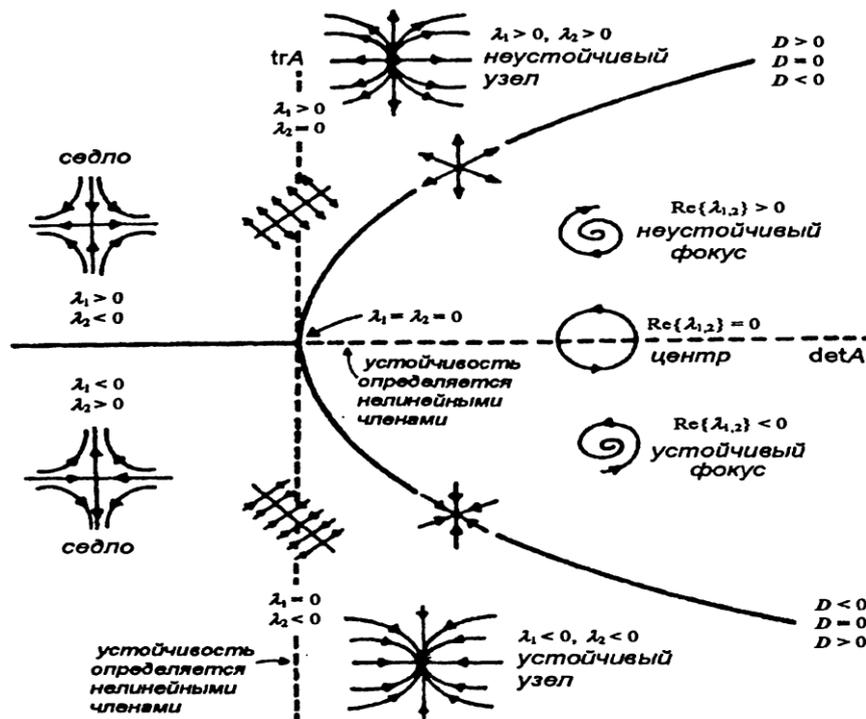


Рис. 6.1. Определение типа точки покоя и ее устойчивости по следу $\text{tr} A$ и определителю $\det A$

Алгоритм построения фазового портрета ЛДС

1. Определить положения равновесия, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения матрицы системы, решив характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

3. Определить тип точки покоя и сделать вывод об устойчивости.

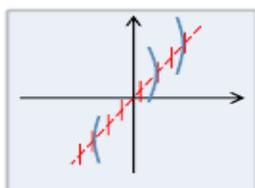
4. Найти уравнения главных изоклин горизонтальной и вертикальной, и построить их на фазовой плоскости.

5. Если положение равновесия является седлом или узлом, найти те фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.

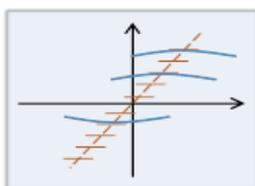
6. Нарисовать фазовые траектории.

7. Определить направление движения по фазовым траекториям, указав его стрелками на фазовом портрете.

Главные изоклины (рис. 6.2):



Вертикальная изоклина (ВИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная, проведенная к фазовой траектории, параллельна вертикальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $x'(t) = 0$, то для ЛДС (6.1) уравнение ВИ имеет вид: $ax + by = 0$.



Горизонтальная изоклина (ГИ) – совокупность точек фазовой плоскости, в которых касательная к фазовой траектории, параллельна горизонтальной оси. Так как в этих точках фазовых траекторий $y'(t) = 0$, то для ЛДС (6.1) уравнение ГИ имеет вид: $cx + dy = 0$.

Рис. 6.2. Главные изоклины

Заметим, что точка покоя на фазовой плоскости это пересечение главных изоклин. Вертикальную изоклину на фазовой плоскости будем помечать вертикальными штрихами, а горизонтальную горизонтальными.

Фазовые траектории

Если положение равновесия является **седлом** или **узлом**, то существуют фазовые траектории, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат.

Уравнения таких прямых можно искать в виде $y = kx$. Подставляя $y = kx$ в уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by},$$

для определения k получим:

$$k = \frac{c + kd}{a + bk} \Leftrightarrow bk^2 + (a - d)k - c = 0. \quad (6.4)$$

(Уравнения прямых, содержащих фазовые траектории, можно искать и в виде $x = ky$. Тогда для нахождения коэффициентов следует решить уравнение

$$k = \frac{ak + b}{ck + d}.$$

Дадим описание фазовых траекторий в зависимости от количества и кратности корней уравнения (6.4) (см. табл. 6.5).

Таблица 6.5.

Фазовые траектории

Корни уравнения (6.4)	Тип точки покоя	Описание фазовых траекторий
1	2	3
$k_1 \neq k_2$	Седло	Прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$ называются сепаратрисами . Остальные фазовые траектории – это гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами. Прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых.
	Узел	Фазовые траектории касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине 1 (корень уравнения (6.3)).

1	2	3
$k_1 = k_2$	Вырожденный узел	Прямая $y = k_1x$. Остальные фазовые траектории – это ветви парабол, которые касаются в начале координат этой прямой.
$\exists!k_1$	Седло	Прямые* $y = k_1x$ и $x = 0$ – это <i>сепаратрисы</i> . Остальные фазовые траектории – гиперболы, для которых найденные прямые являются асимптотами.
	Узел	Прямые* $y = k_1x$ и $x = 0$. Остальные фазовые траектории образуют параболы, которые касаются в начале координат одной из найденных прямых.
$\forall k \in R$	Дикритический узел	Все фазовые траектории лежат на прямых $y = kx$, $\forall k \in R$.
* Если уравнения прямых ищутся в виде $x = ky$, тогда это будут прямые $x = k_1y$ и $y = 0$.		

Если положение равновесия является **центром**, то фазовые траектории являются эллипсами.

Если положение равновесия является **фокусом**, то фазовые траектории являются спиралями.

В случае, когда ЛДС имеет **точек покоя**, то можно найти уравнения всех фазовых траекторий, решив уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}.$$

Его первый интеграл $\alpha x + \beta y = C$ и определяет семейство фазовых прямых.

Направление движения

Если положение равновесия является **узлом** или **фокусом**, то направление движения по фазовым траекториям определяется однозначно его устойчивостью (к началу координат) или неустойчивостью (от начала координат).

Правда, в случае **фокуса** требуется установить еще и направление закручивания (раскручивания), спирали по часовой или против часовой стрелки. Это можно сделать, например, так. Определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината движущейся точки

по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси» возрастает.

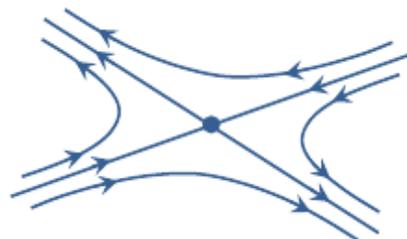
Значит «закручивание (раскручивание)» траекторий происходит против часовой стрелки.

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx < 0$, если $x > 0$, то «закручивание (раскручивание)»

траекторий происходит по часовой стрелке.

Если положение равновесия является **центром**, то направление движения по фазовым траекториям (по часовой стрелке или против) можно определить так же, как устанавливается направление «закручивания (раскручивания)» траектории в случае фокуса.

В случае «седла» движение по одной из его сепаратрис происходит в направлении начала координат, по – другой от начала координат. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит в соответствии с движением по сепаратрисам.



Следовательно, если положение равновесия **седло**, то достаточно установить направление движения по какой-нибудь траектории. И далее можно однозначно установить направление движения по всем остальным траекториям.

Направление движения (седло)

Чтобы установить направление движения по фазовым траекториям в случае **седла**, можно воспользоваться одним из следующих способов:

1 способ

Определить, какая из двух сепаратрис соответствует отрицательному собственному значению. Движение по ней происходит к точке покоя.

2 способ

Определить, как изменяется абсцисса движущейся точки по любой из сепаратрис. Например, для $y = k_1x$ имеем:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=k_1x} = ax + bk_1x = (a + bk_1)x, \quad x(t) = x(0)e^{(a+bk_1)t}.$$

Если $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение по сепаратрисе $y = k_1x$ происходит к точке покоя.

Если $x(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то движение происходит от точки покоя.

3 способ

Если ось x не является сепаратрисой, определить как изменяется ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении оси x .

Когда $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = cx > 0$, если $x > 0$, то ордината точки возрастает и,

значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит снизу вверх. Если же ордината убывает, то движение будет происходить сверху вниз.

Если определять направление движение по фазовой траектории, пересекающей ось y , то лучше анализировать изменение абсциссы движущейся точки.

4 способ

Построить в произвольной точке (x_0, y_0) фазовой плоскости (отличной от положения равновесия) вектор скорости:

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)_{(x_0, y_0)} = (ax_0 + by_0, cx_0 + dy_0).$$

Его направление и укажет направление движения по фазовой траектории, проходящей через точку (x_0, y_0) (рис. 6.3):

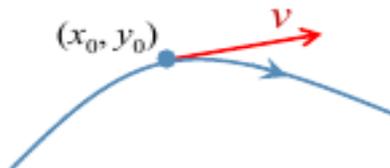


Рис. 6.3. Направление движения по фазовой траектории

5 способ

Определить области «знакопостоянства» производных:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy.$$

Границами этих областей будут главные изоклины. Знак производной укажет на то, как изменяется ордината и абсцисса движущейся точки по фазовой траектории в различных областях (рис. 6.4).

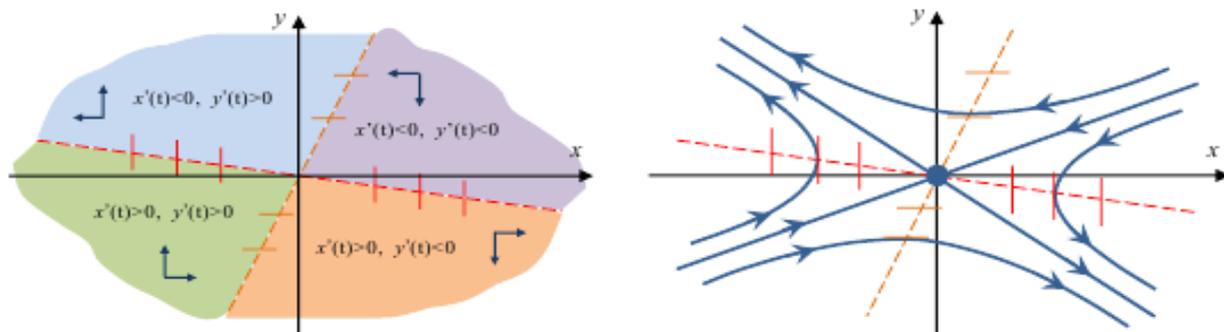


Рис. 6.4. Области главных изоклины

Способы 4 и 5 могут быть использованы при определении направления движения по фазовым траекториям для любого типа точки покоя.

Практические занятия

Пример 1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 6 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{6}$. Корни вещественные и разного знака. Следовательно, положение равновесия **седло**.

Найдем корни характеристического уравнения, или собственные значения, системы уравнений с помощью функции eig.

```
>> a=[-2 -2;-1 2];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
-2.4495
```

```
2.4495
```

3. Сепаратрисы седла ищем в виде $y = kx$.

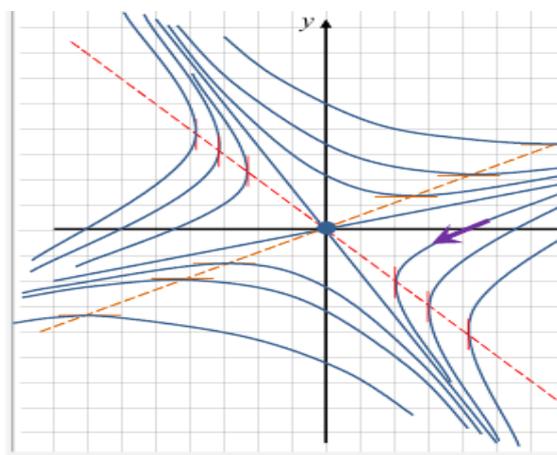
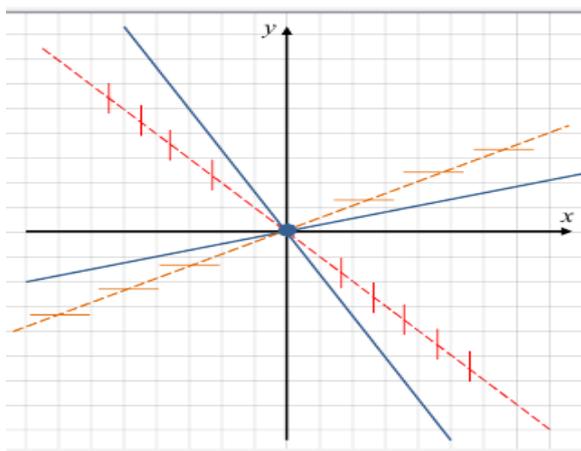
$$k = \frac{-1+2k}{-2-2k} \Leftrightarrow 2k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}, k_1 \approx -2,22, k_2 \approx 0,22.$$

4. Вертикальная изоклина: $x + y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $x + 2y = 0$.

Нарисуем на фазовой плоскости сепаратрисы $y = k_1x$ и $y = k_2x$ и главные изоклины.

Остальную часть плоскости заполняют траектории – гиперболы, для которых сепаратрисы являются асимптотами.

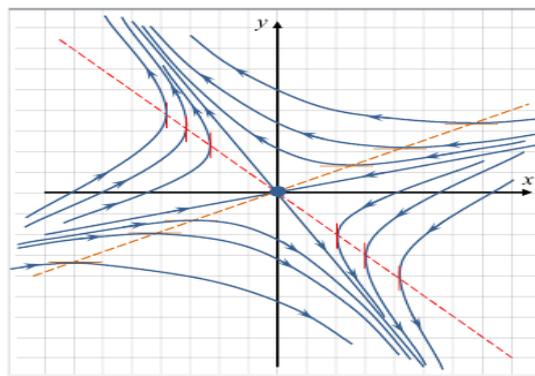


Найдем направление движения по траекториям. Для этого можно определить знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = -x < 0, \text{ если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » убывает. Значит, движение по фазовым траекториям, пересекающим положительную часть оси x , происходит сверху вниз.

Теперь легко установить направление движения по другим траекториям.



Пример 2

Исследуем:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 10 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$,

найдем его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Следовательно, положение равновесия **неустойчивый узел**.

```
>> a=[4 2;1 3];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
5
```

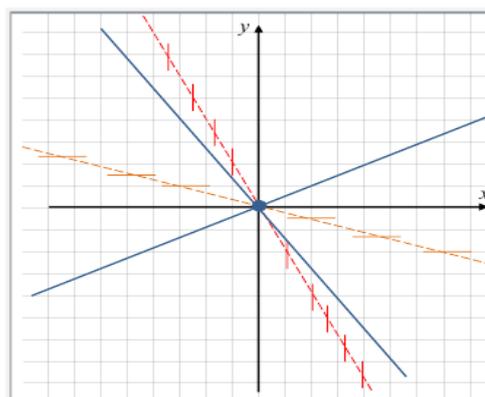
```
2
```

3. Прямые: $y = kx$.

$$k = \frac{1+3k}{4+2k} \Leftrightarrow 2k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1/2, k_2 = -1.$$

4. Вертикальная изоклина: $2x + y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $x + 3y = 0$.



Найдем собственные вектора матрицы A:

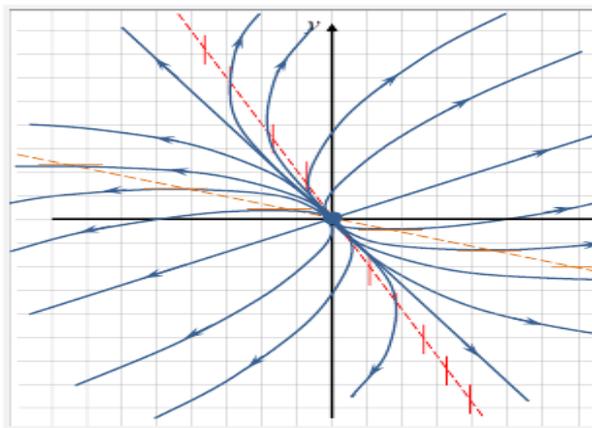
```
>> A=[4 2;1 3];
>> [U,L]=eig(A)
U =
    0.8944 -0.7071
    0.4472  0.7071
L =
     5     0
     0     2
```

Т.е., собственные значения $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 2$.

Так как $\lambda_2 = 2$ является меньшим по абсолютной величине собственным значением, найдем соответствующий ему собственный вектор:

```
>> U(:,2)/0.7071
ans =
 -1.0000
  1.0000
```

Следовательно, остальные фазовые траектории, образующие параболы, касаются в начале координат прямой $y = -x$.



Неустойчивость положения равновесия однозначно направление движения – от точки покоя.

Пример 3

Исследуем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 18 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda + 18 = 0$,

найдем его дискриминант $D = 63$. Так как $D < 0$, то корни уравнения комплексные, причем $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 3/2$. Следовательно, положение равновесия **устойчивый фокус**.

```
>> a=[-1 -4;4 -2];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
-1.5000 + 3.9686i
```

```
-1.5000 - 3.9686i
```

3. Вертикальная изоклина: $x + 4y = 0$.

Горизонтальная изоклина: $2x - y = 0$.

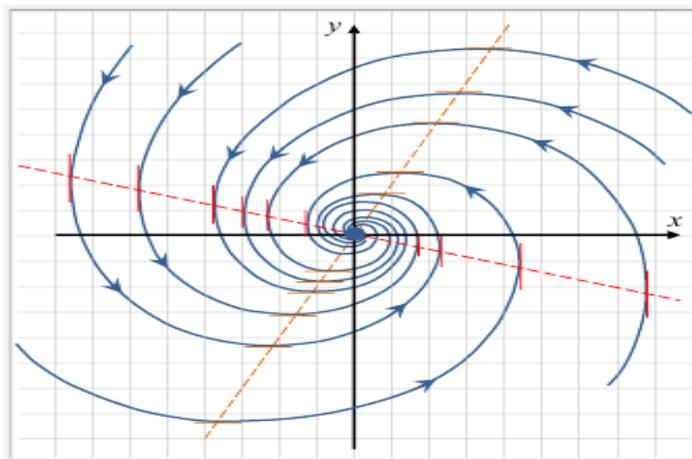
Фазовые траектории являются спиралями, движение по которым происходит к началу координат. Направления «закручивания траекторий» можно определить следующим образом.

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = 4x > 0, \quad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.

Значит, «закручивание» траектории происходит против часовой стрелки.



Пример 4

Исследуем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное нулевое положение равновесия, так как $\det A = 3 \neq 0$.

2. Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3 = 0$, найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$. Следовательно, положение равновесия **центр**.

```
>> a=[1 -4;1 -1];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
-0.0000 + 1.7321i
```

```
-0.0000 - 1.7321i
```

3. Вертикальная изоклина: $x - 4y = 0$.

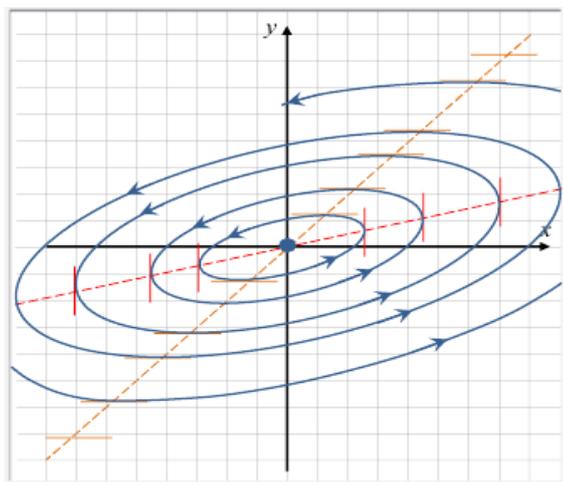
Горизонтальная изоклина: $x - y = 0$.

Фазовые траектории системы эллипсы.

Направление движения по ним можно установить, например, так. Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . При $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = x > 0, \quad \text{если } x > 0.$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает.



Значит, движение по эллипсам происходит против часовой стрелки.

Пример 5

Иследуем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

Построив соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 5\lambda = 0$, найдем его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$.

```
>> a=[-4 2;2 -1];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
-5
```

```
0
```

Следовательно, все положения равновесия устойчивы по Ляпунову.

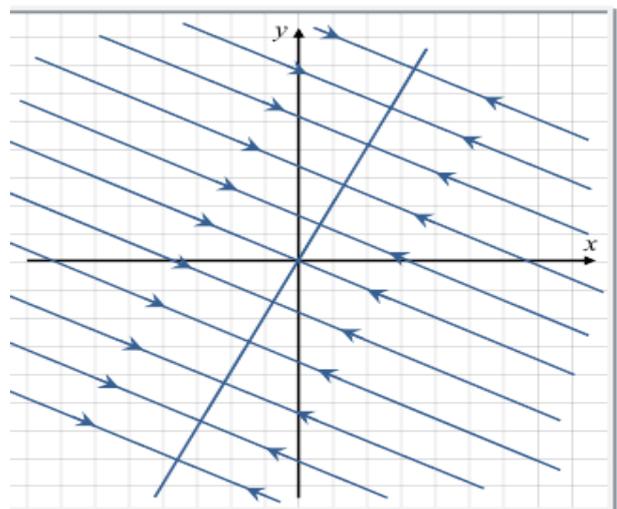
Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых

$$y = -\frac{1}{2}x + C, \quad C = \forall \text{const.}$$

Направление движения однозначно определяется устойчивостью точек прямой $y = 2x$.



Пример 6

Исследуем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много положений равновесия. Все они лежат на прямой $y = 2x$.

Так как и след матрицы системы $\text{tr}A = 0$, то корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

```
>> a=[2 -1;4 -2];
```

```
>> eig(a)
```

```
ans =
```

```
1.0e-015 *
```

```
0.0650 + 0.3140i
```

```
0.0650 - 0.3140i
```

Следовательно, все положения равновесия неустойчивы.

Построим уравнения остальных фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 2y}{2x - y}, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad y = 2x + C.$$

Таким образом, фазовые траектории лежат на прямых $y = 2x + C$, $C = \text{const}$, и параллельны прямой точек покоя.

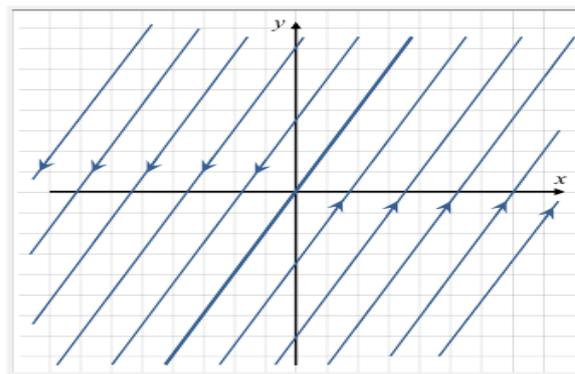
Установим направление движения по траекториям следующим образом.

Определим знак производной $y'(t)$ в точках оси x . при $y = 0$ имеем:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = 4x \quad \begin{cases} > 0, & \text{если } x > 0, \\ < 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ордината движущейся точки по фазовой траектории при пересечении «положительного луча оси x » возрастает, а «отрицательного» – убывает.

Значит, движение по фазовым траекториям правее прямой точек покоя будет снизу вверх, а левее – сверху вниз.



Задания для самостоятельной работы

Постройте фазовые портреты для следующих систем:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y - 1; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2, \\ \frac{dy}{dt} = 4; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2, \\ \frac{dy}{dt} = 2. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы

1. Изучите теоретическую часть. Выполните задания и продемонстрируйте результаты преподавателю.
2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
 - титульный лист;
 - исходные данные варианта;
 - решение задачи;
 - результаты решения задачи.

Контрольные вопросы

1. Что такое линейная динамическая система (ЛДС)?
2. Какие существуют типы фазовых траекторий?
3. Как определяется положение равновесия?
4. Как определяются собственные числа матрицы ДС?
5. Какие существуют точки покоя (равновесия)?
6. Как определяется устойчивость положения равновесия?
7. Каков алгоритм построения фазового портрета ДС?

Лабораторные работы № 8–9

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работ: ознакомить студентов с методами исследования нелинейных динамических систем и свойствами логистического отображения, а также системами Энона и Лоренца.

Теоретические сведения

Исследование нелинейных ДС в MATLAB

Рассмотрим ДС представленную системой ОДУ

$$\begin{aligned} dx/dt &= x^2 + y^2 - 17, \\ dy/dt &= xy + 4. \end{aligned}$$

Для нахождения точек равновесия этой ДС следует решить систему нелинейных уравнений:

$$x^2 + y^2 - 17 = 0, \quad xy + 4 = 0. \quad (8.1)$$

Графическое решение системы (8.1) осуществляется следующей программой:

```
x=[-sqrt(17):0.001:sqrt(17)];
y1=sqrt(17-x.^2);
y2=-sqrt(17-x.^2);
plot(x,y1,x,y2)
hold on
grid on
x1=[-4.5:0.01:-0.7];
z1=-4./x1;
plot(x1,z1,'.')
x1=[0.7:0.01:4.5];
z1=-4./x1;
plot(x1,z1,'.')
hold off
```

Результат представлен на рис. 8.1.

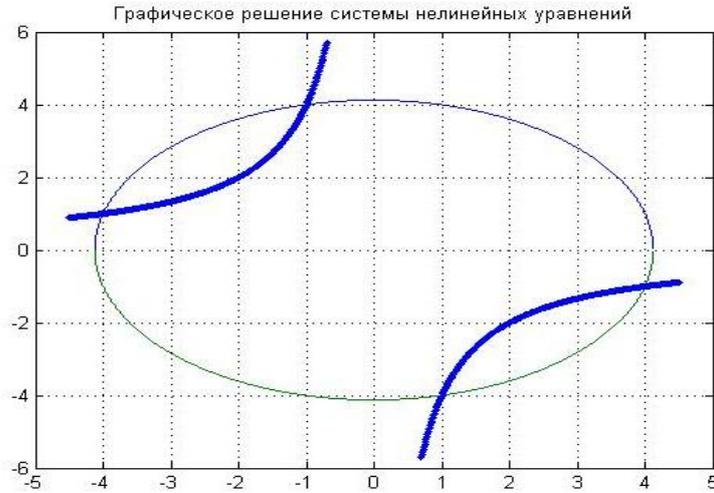


Рис. 8.1. Графическое решение системы (8.1)

Из анализа графика следует, что имеется четыре значения x , при которых функция имеет нулевые значения, это x равные -4 , -1 , 1 и 4 .

Следующая последовательность операторов дает возможность определить соответствующие значения y -ов:

```
>> x=[-4 -1 1 4];
```

```
>> y=-4./x
```

```
y =
```

```
1 4 -4 -1
```

Таким образом, имеем следующий набор особых точек:

x	-4	-1	1	4
y	1	4	-4	-1

После определения координат точки положения равновесия нужно определить характер точки. Для определения характера точки, разложим функции $F_1(x, y) = x^2 + y^2 - 17$ и $F_2(x, y) = xy + 4$ в окрестности точек положения равновесия x_0, y_0 , и ограничиваемся первыми тремя членами разложения:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_1(x_0, y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(y - y_0) + \dots, \\ F_2(x, y) = F_2(x_0, y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(y - y_0) + \dots \end{cases}$$

Выписываем коэффициенты при линейных членах и получаем *матрицу Якоби* или *Якобиан*:

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы Якоби $a_{i,j}$ являются постоянными величинами.

Для определения матрицы Якоби в MATLAB существует функция `jacobian`, входящая в Symbolic Math Toolbox.

Синтаксис функции: `jacobian(f,v)`

Чтобы определить характер точек равновесия следует найти собственные числа матрицы Якоби λ , решая характеристическое уравнение:

$$|I - \lambda A| = 0,$$

где I – единичная матрица или же воспользоваться функцией MATLAB `eig`.

Для функций $F_1 = x^2 + y^2 - 17$ и $F_2 = xy + 4$ Якобиан вычисляется следующим образом:

```
>> syms x y
f=[x^2+y^2-17;x*y+4];
v=[x,y];
r=jacobian(f,v)
r =
[ 2*x, 2*y]
[ y, x].
```

Результат определения Якобиана в особых точках с использованием функции MATLAB `subs`, собственных значений Якобиана с использованием функции `eig(a)`, а также характер особых точек показан в табл. 8.1:

Результат определения Якобиана в особых точках

<pre>>> x=-4; >> y=1; >> a=subs(r) a = -8 2 1 -4 >> eig(a) ans = -8.4495 -3.5505</pre>	<pre>>> x=-1; >> y=4; >> a=subs(r) a = -2 8 4 -1 >> eig(a) ans = -7.1789 4.1789</pre>	<pre>>> x=1; >> y=-4; >> a=subs(r) a = 2 -8 -4 1 >> eig(a) ans = 7.1789 -4.1789</pre>	<pre>>> x=4; >> y=-1; >> a=subs(r) a = 8 -2 -1 4 >> eig(a) ans = 8.4495 3.5505</pre>
Устойчивый узел	Седло	Седло	Неустойчивый узел

Логистическое отображение (отображение Ферхюльста) [11, 12]

Краткие теоретические сведения

Хаотическое движение динамических систем

Рассмотрим простые детерминированные нелинейные модели ДС, обнаруживающие сложную структуру поведения. Понятия, которые будут обсуждаться в этой главе, основываются на применении компьютера в качестве инструмента для проведения эмпирических наблюдений. Исследования с помощью компьютера привели к значительному прогрессу в понимании нелинейных явлений.

Большинство явлений природы по сути своей нелинейны. Модели погоды и турбулентный режим движения жидкостей являются общеизвестными примерами нелинейных процессов. Несмотря на то, что мы отдаем себе отчет в значимости нелинейных эффектов во многих физических явлениях, некоторые основные понятия легче объяснить, если рассмотреть задачи теоретической экологии. В дальнейшем анализируется разностное уравнение с одной переменной:

$$x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n), \quad (8.2)$$

где x является отношением численности популяции n -го поколения к численности предыдущего. Мы обнаружим, что динамические свойства уравнения (8.2) чрезвычайно сложны и играют важную роль в разработке более общей теории нелинейных явлений. Важность последних результатов выражается нижеследующей цитатой эколога Роберта Мэя, относящейся к исследованию разностного уравнения (8.2):

«Исследование этого уравнения не требует познаний, выходящих за рамки элементарного анализа. Такое исследование развивает интуицию студента, касающуюся нелинейных систем. Не только в науке, но и в повседневной политической и экономической жизни мы делали бы меньше ошибок, если бы большинство людей осознало тот факт, что простые нелинейные системы необязательно обладают простыми динамическими свойствами».

Простое одномерное отображение

Многие биологические популяции состоят из одного поколения, которое не перекрывается ни с предыдущим, ни с последующим. Поскольку процесс развития популяции дискретен, то более уместно описывать развитие популяции разностными, а не дифференциальными уравнениями. Простая модель развития популяции, не зависящая от плотности, связывающая численность популяции в $(n + 1)$ -поколении с предыдущим n -м поколением, записывается в виде

$$P_{n+1} = aP_n, \quad (8.3)$$

где a – некоторая постоянная. Из разностного уравнения следует что, если $a > 1$, то численность каждого поколения будет в a раз больше предыдущего. Это приводит к геометрическому росту и, в конце концов, к неограниченной численности популяции. Представляется естественным сформулировать более реалистичную модель, в которой численность популяции ограничивается пропускной способностью окружающей среды. Простая дискретная модель прироста популяции, зависящая от плотности, записывается в виде:

$$P_{n+1} = P_n(a - bP_n). \quad (8.4)$$

Заметим, что выражение (8.4), иногда называемое «логистическим» разностным уравнением, нелинейно из-за наличия квадратичного члена P_n . Первый член представляет естественный прирост численности популяции; квадратичный член представляет уменьшение естественного прироста, например, за счет перенаселения или распространения болезней.

Для удобства «перемасштабируем» численность популяции, положив $P_n = (a/b)x_n$ и переписав уравнение (8.4) в виде:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (8.5)$$

Переход от переменной P_n к x_n изменяет систему единиц, используемую для определения различных параметров. Чтобы записать уравнение (8.5) в стандартном виде (8.2), введем параметр «роста» $r = a/4$ и получим

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (8.6)$$

где функция $f(x_n)$ записывается в виде:

$$f(x) = 4rx(1 - x). \quad (8.7)$$

Функция, записанная в новых переменных (8.7), обладает желательным свойством, которое заключается в том, что ее поведение определяется единственным параметром r , который можно менять. Заметим, что если $x_n > 1$, то значение x_{n+1} будет отрицательным. Чтобы избежать этой нефизической ситуации, наложим условия, которые ограничивают изменение переменной x и параметра r отрезками $0 \leq x, r \leq 1$.

Поскольку функция $f(x)$ переводит любую точку отрезка в некоторую другую точку того же самого отрезка, функция $f(x)$ называется *одномерным отображением*. В дальнейшем мы будем ссылаться на уравнение (8.7) для функции $f(x)$ как на «стандартное» отображение.

Дискретное логистическое отображение

Используя приведенную ниже программу можно получить логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ для различных значений параметра λ , здесь $\lambda = 4r$ (см. рис. 8.2).

```
%logistic_guld
clear all
close all
l=[2 3.2 3.5];
for i=1:3
    clear x
    x(1)=0.75;
for n=2:30 %150
    x(n)=l(i)*x(n-1)*(1-x(n-1));
end
%
```

```

figure
plot(x)
ss=num2str(l(i));
ssl=num2str(l(i));
title(['    lambda = ',ssl])
xlabel('n');
ylabel('x');
grid on
end

```

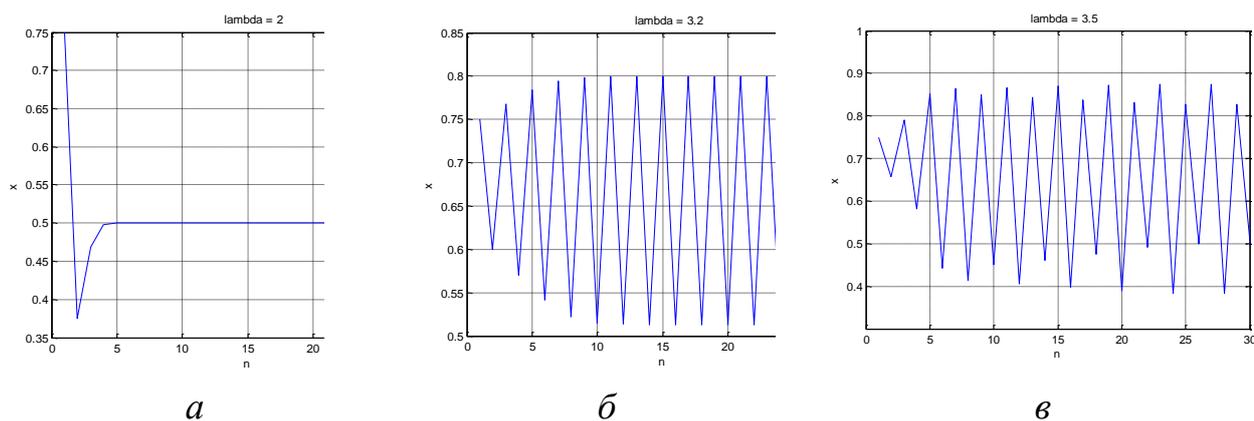


Рис. 8.2. Зависимость динамики логистического отображения x_n от номера параметра λ .

a – устойчивая неподвижная точка (период 1), $\lambda = 2$;

б – предельный цикл периода 2, $\lambda = 3,2$;

в – предельный цикл периода 4, $\lambda = 3,5$

На рис. 8.3 представлено логистическое отображение для значения параметра $\lambda = 3,6$. В этом случае можно отметить отсутствие четко определяемого периода.

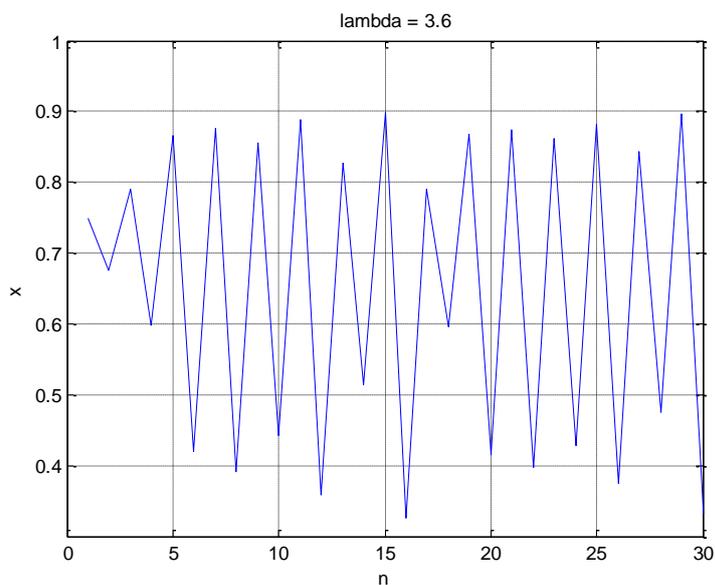


Рис. 8.3. Зависимость динамики логистического отображения x_n от номера параметра λ

Много интересных свойств стандартного отображения были открыты Фейгенбаумом в 1978г. с помощью программируемого калькулятора.

Заметим, что несколько начальных итераций отображения $f(x)$ ведут себя странным образом, но, тем не менее, за исключением случая $r = 0.9$ (рис. 8.3), проявляется некая закономерность. Начальный отрезок последовательности называется переходным режимом, а остальная часть является установившимся режимом. Последовательность значений x_n называется *орбитой отображения*.

Практические задания [12]

Задача 1. Исследование удвоения периода

1. Изучите динамическое поведение стандартного отображения (8.7) для значений параметра $r = 0,2$ и $r = 0,24$ и для различных значений источника x_0 . Покажите, что $x = 0$ является *устойчивой неподвижной точкой*. Иначе говоря, для достаточно малого значения параметра r итерации x сходятся к $x = 0$ независимо от начального условия x_0 . В том случае, когда переменная представляет собой численность популяции насекомых, качественно охарактеризуйте динамику этой популяции.

2. Исследуйте динамическое поведение стандартного отображения (8.7) для значений параметра $r = 0,26; 0,5; 0,7; 0,72; 0,74$ и $0,748$. (В случае $r = 0,748$ для сходимости итерационного процесса необходимо приблизительно 1000 итераций). Сходится ли процесс к значению $x = 0$? Неподвижная точка называется *неустойчивой*, если для почти всех значений x_0 итерационный процесс расходится.

Свидетельствуют ли полученные результаты о том, что $x = 0$ – неустойчивая неподвижная точка? Покажите, что через много поколений итерированные значения переменной x постоянны, т.е. динамический режим является стационарным или имеет период, равный 1. Каковы устойчивые неподвижные точки для различных значений параметра r ?

Последовательность итераций x_0, x_1, \dots, x_n называется *орбитой*, или траекторией x . Покажите, что для любого из предложенных значений параметра r орбиты x по прошествии начального переходного периода не зависят от начального значения.

3. Исследуйте динамическое поведение стандартного отображения (8.7) для значений параметра $r = 0,752; 0,76; 0,8$ и $0,862$. (В случае $r = 0,752$ для сходимости итерационного процесса необходимо приблизительно 1000 итераций.) Покажите, что если параметр становится чуть больше $0,75$, то после переходного режима x осциллирует между двумя значениями, т.е. вместо устойчивого цикла с периодом, равным 1, соответствующего одной неподвижной точке, у системы имеется устойчивый цикл с периодом 2.

Значение параметра r , при котором единственная неподвижная точка x^* расщепляется, или происходит *бифуркация* на два осциллирующих значения x_1^* и x_2^* равно $r = 3/4$. Пара величин $(x_1^*$ и $x_2^*)$ образует устойчивый аттрактор с периодом 2.

Задача 2. Хаотический режим

1. Область значений параметра $r > r_c = 0,892486417967\dots$ называется *хаотическим режимом*, в котором две близлежащие начальные точки разбегаются по различным траекториям после небольшого числа итераций. В качестве примера выберите такие источники $x_0 = 0,500$ и $0,501$. Сколько итераций необходимо для того, чтобы последующие значения различались между собой более чем на 10%?

2. Известно, что точность представления чисел с плавающей запятой в компьютере конечна. Для проверки влияния конечной точности вашего компьютера выберите сначала значения $r = 0,91$ и $x_0 = 0,5$ и получите численное значение x после приблизительно 200 итераций. Затем модифицируйте свою программу так, чтобы последовательно выполнялись операции $x = x/10$ и $x = 10x$. Эта комбинация действий обрезает последнюю десятичную цифру, которую хранит компьютер. Получите итерированное значение x при тех же условиях и сравните результаты. Будет ли такое же несовпадение и в случае $r < r_c$?

3. Каковы динамические свойства системы для значения параметра $r = 0,958$. Можете ли вы найти другие «окна» в этом хаотическом режиме?

Другой способ представить поведение отображения (8.7) заключается в построении графика зависимости x от управляющего параметра r (рис. (8.4)). На рис. 8.4 нанесены итерированные значения x , полученные только после завершения переходного периода.

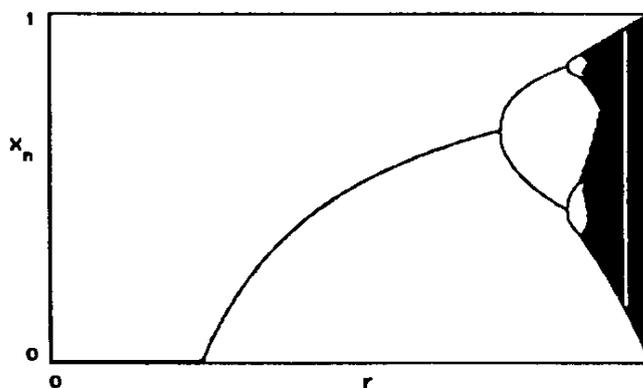


Рис. 8.4. График итерированных значений x в зависимости от параметра роста r .

Обратите внимание на переход от периодического движения к хаотическому. Обратите также внимание на узкие окна периодического движения внутри областей хаоса

Задача 3. Качественные особенности квадратичного отображения

1. Модифицируйте программу так, чтобы итерации x_n строились в виде графика, зависящего от r . Не нужно наносить на график первые n итераций. Начните с диапазона $0.8 \leq r \leq 0.9$. Сколько удвоений периода вы можете различить?

2. Измените масштаб так, чтобы вы могли наблюдать итерации x от периода 4 до периода 32. Как выглядит график в этом масштабе по сравнению с графиком для отображения с периодом 4 в исходном масштабе?

3. Дайте краткое качественное описание поведения кривой вблизи точек бифуркации.

Построим ряд бифуркационных диаграмм логического отображения в зависимости от параметра λ . Для этих целей служит следующая программа.

```
% logistic
clear all
for r=0.5:0.001:1
lambda=4*r;
x(1)=0.5;
for n=2:1000
x(n)=lambda*x(n-1)*(1-x(n-1));
if n>150
plot(lambda,x(n)),hold on
end
end
end
title('Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра \lambda')
xlabel('\lambda');
ylabel('x');
```

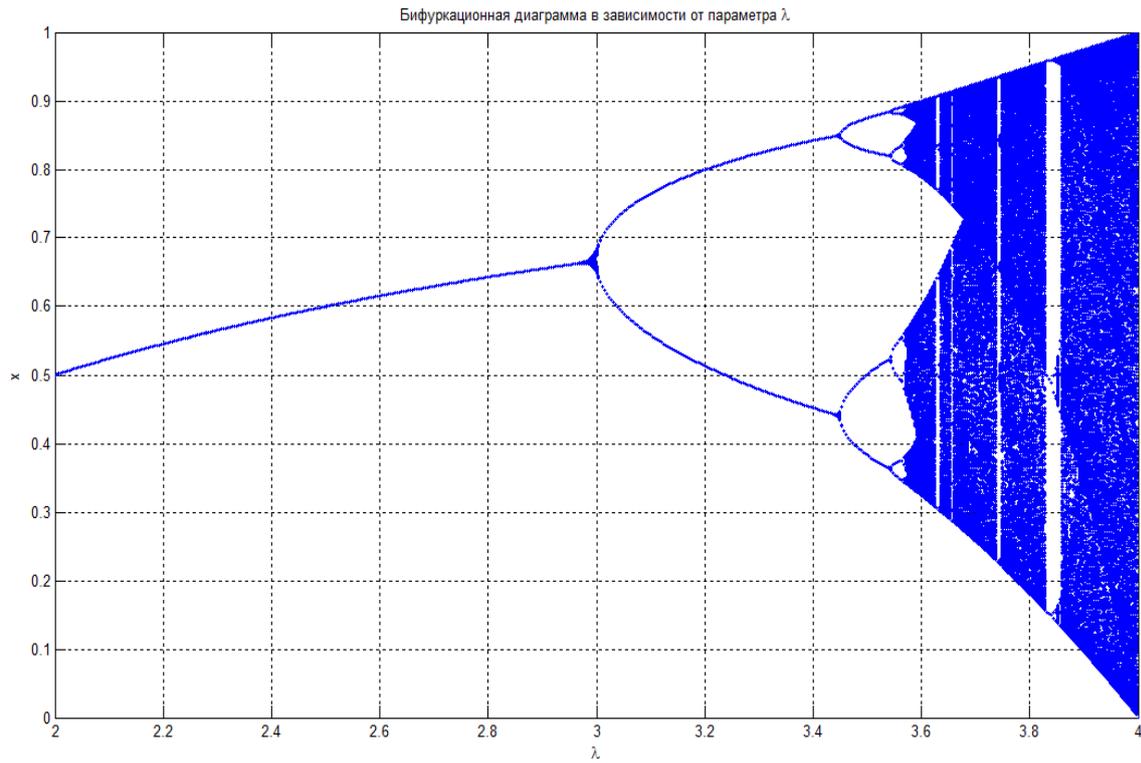


Рис. 8.5. Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра λ в интервале от 2 до 4'

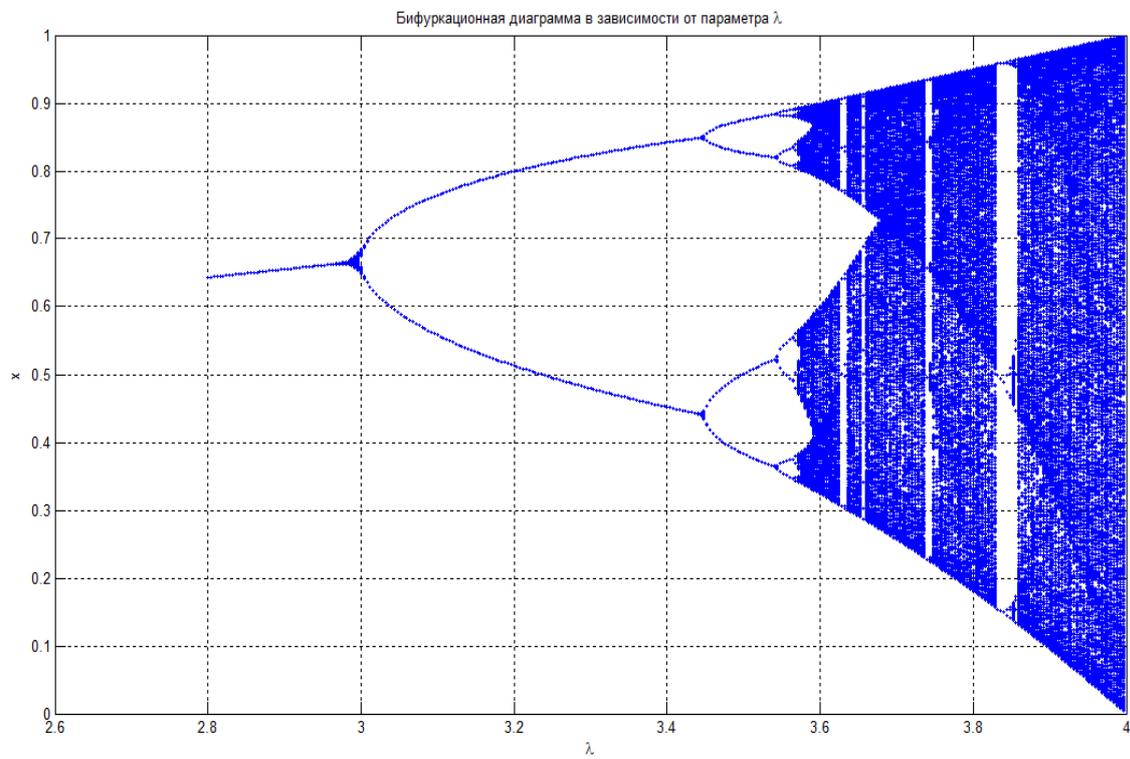


Рис. 8.6. Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра λ в интервале от 2,92 до 4'

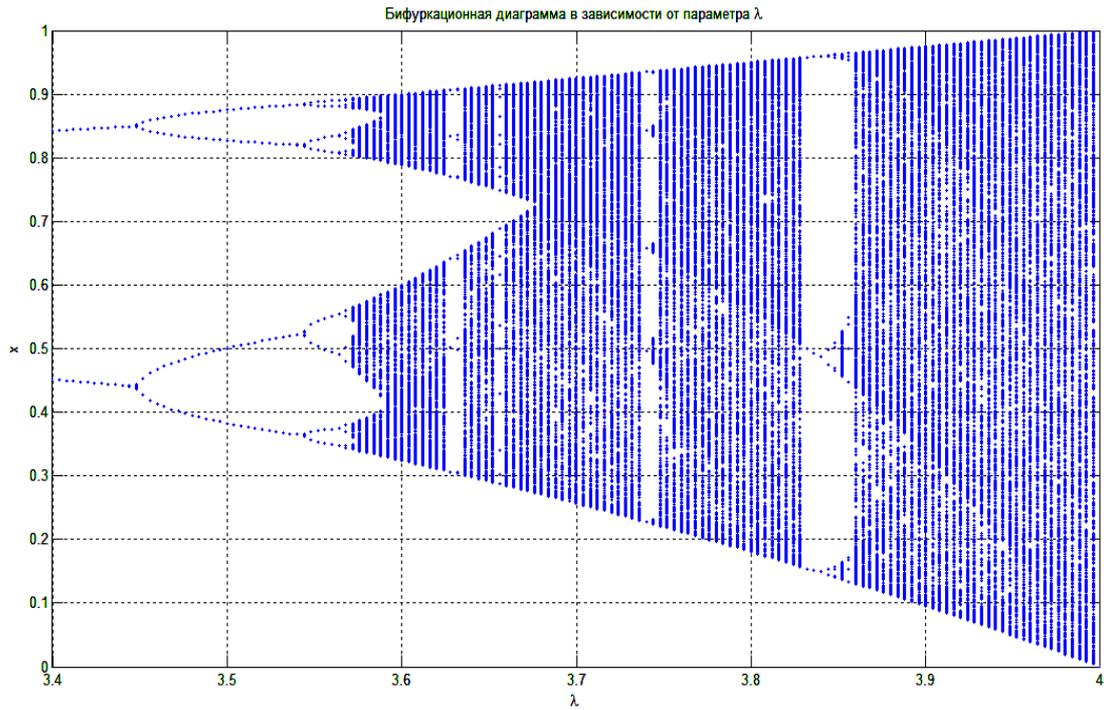


Рис. 8.7. Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра λ в интервале от 3,4 до 4'

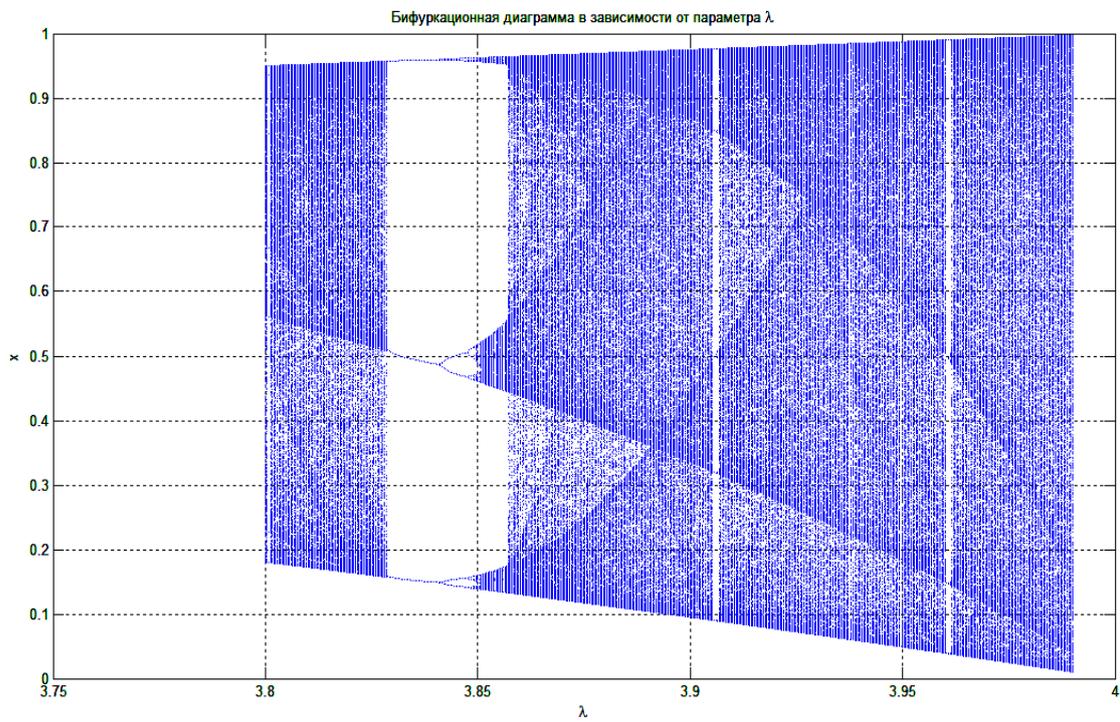


Рис. 8.8. Бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра λ в интервале от 3,8 до 3,99'

Краткие теоретические сведения

Удвоение периода

Приведенные выше «машинные эксперименты», касающиеся поведения стандартного отображения, привели к созданию нового словаря для описания наших наблюдений и это показывает, что свойства простых динамических систем могут быть очень сложными!

Для понимания зависимости динамического поведения от параметра r представим простой и элегантный графический метод итерирования $f(x)$. На рис. 8.9 приведен график $f(x)$ для значения параметра $r = 0,6$. Наклонная прямая, соответствующая функции $y = x$, пересекает кривую $y = f(x)$ в двух неподвижных точках $x^* = 0$ и $x^* = 0,58333$, т.е. повторение итераций функции $f(x)$ для значений $x^* = 0$ и $x^* = 0,58333$ дает постоянную последовательность. Если x_0 не является одной из неподвижных точек, мы можем найти орбиту следующим образом. Сначала проводим вертикальную прямую из точки $\{x = x_0, y = 0\}$ до пересечения с кривой $y = f(x)$ в точке $\{x_0, y_0 = f(x_0)\}$. Затем проводим горизонтальную прямую из точки $\{x_0, y_0\}$ до пересечения с наклонной прямой в точке $\{y_0, y_0\}$. Поскольку на этой наклонной прямой значение y равно значению x , то значение x в точке пересечения является первой итерацией $x_1 = y_0$. Аналогично можно найти вторую итерацию x_2 . Из точки $\{x_1, y_0\}$ проводим вертикальную прямую до пересечения с кривой $y = f(x)$. Фиксируем точку $y = y_1 = f(x_1)$ и проводим горизонтальную прямую до пересечения с наклонной; значение x в точке пересечения дает x_2 .

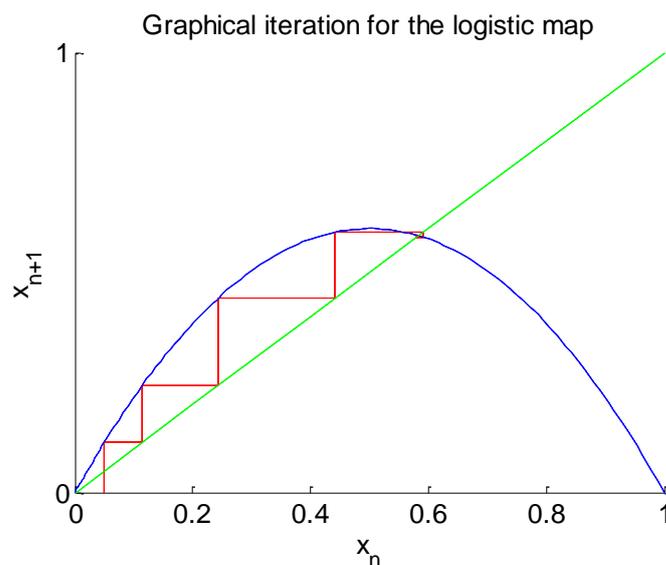


Рис. 8.9. Итерации отображения $x_{n+1} = 4rx_n(1 - x_n)$ с $r = 0.6$ и начальным значением $x_0 = 0.05$. Неподвижная точка $x = 0$ – неустойчива, а неподвижная точка $x = 0.58333$ является устойчивой

Дальнейшие итерации можно найти, повторяя следующую процедуру:

- 1) двигаемся по вертикали до пересечения с кривой $y = f(x)$;
- 2) двигаемся по горизонтали до пересечения с наклонной прямой $y = x$;
- 3) повторяем шаги 1 и 2 бесконечное число раз.

Этот графический метод иллюстрируется на рис. 8.5 для $x_0 = 0,05$ и $r = 0,6$. Заметим, что если начинать итерации из любой точки x_0 ($x \neq 0$ и $x \neq 1$), то итерационный процесс будет сходиться к неподвижной точке $x^* = 7/12 \approx 0,58333$. Такие неподвижные точки называются устойчивыми (аттрактор с периодом 1). По сравнению с этим независимо от близости x_0 к неподвижной точке $x = 0$ итерационный процесс будет расходиться. Такая неподвижная точка называется неустойчивой.

Как можно объяснить качественное различие между неподвижными точками $x^* = 0$ и $x^* = 0,58333$ для $r = 0,6$? Локальная кривизна кривой $y = f(x)$ определяет горизонтальное смещение при каждой итерации f . Крутой наклон (более 45°) приводит к удалению x от начального значения. Следовательно, критерий устойчивости неподвижной точки заключается в том, что величина наклона в неподвижной точке должна быть менее 45° , т.е. если $|df(x)/dx|_{x=x^*} < 1$, то точка x^* является устойчивой, и, наоборот, если $|df(x)/dx|_{x=x^*} > 1$, тогда точка x^* неустойчива. Внимательное изучение функции $f(x)$, изображенной на рис. 8.9, показывает, что $x = 0$ – неустойчивая точка, поскольку тангенс угла наклона кривой $f(x)$ в точке $x = 0$ больше единицы. В противоположность этому значение производной $f(x)$ в точке $x = 0,58333$ меньше единицы.

Таким образом, для значений $0 < r < 3/4$ конечное поведение известно.

Что происходит, если r лежит в интервале $3/4 < r < 1$? Нам известно из наблюдений, что по мере роста r неподвижная точка функции f становится неустойчивой и приводит к рождению (бифуркации) цикла с периодом 2. Теперь только после каждой второй итерации x принимает то же самое значение, т.е.

$$x_i = f(f(x_i)), \quad i = 1, 2 \quad (8.8)$$

и аттракторы функции $f(x)$ являются неподвижными точками функции $g(x) = f(f(x))$. Что произойдет, если дальше увеличивать значение параметра r ? В конце концов, величина наклона неподвижных точек $g(x)$ достигнет единичного значения и неподвижные точки удвоятся. Теперь период f равен 4 и можно изучать устойчивость неподвижных точек четырежды итерированной функции $h(x) = g(g(x)) = f(f(f(f(x))))$. Эти неподвижные точки

также, в конце концов, удваиваются и наблюдается явление *удвоения периода*, т.е. период $1 \rightarrow$ период $2 \rightarrow$ период $4 \rightarrow$ период $8 \rightarrow$ период $16 \rightarrow$ период $32 \rightarrow \dots$ что мы и видели в задаче 3.

Практические задания

Задача 4. Качественные свойства неподвижных точек

1. Используйте программу зависимость x_n от r и покажите графически, что при $r < 3/4$ у функции $f(x)$ существует единственная устойчивая неподвижная точка. Функция $f(x)$ четна относительно точки $x = 1/2$, в которой $f(x)$ имеет максимум. Каковы качественные особенности второй итерации этой функции $g(x) = f(f(x))$? Четна ли функция $g(x)$ относительно точки $x = 1/2$? Является ли точка x^* также неподвижной точкой функции $g(x)$? При каком значении x функция $g(x)$ имеет минимум? Пусть r_1 – значение r , при котором неподвижная точка функции $f(x)$ становится неустойчивой. Убедитесь в том, что $r_1 = -0,75$.

2. Охарактеризуйте орбиту функции $f(x)$ для значения параметра $r = 0,785$. Чему равен период $f(x)$? Чему равны численные значения неустойчивых аттракторов? Проитерируйте $g(x)$ и найдите две неподвижные точки x_1^* и x_2^* этого отображения. (Попробуйте два начальных значения $x_0 = 0,1$ и $x_0 = 0,3$.) Являются ли неподвижные точки отображения $g(x)$ устойчивыми или неустойчивыми? Как соотносятся значения x_1^* и x_2^* со значениями неустойчивых аттракторов отображения $f(x)$? Убедитесь в том, что наклоны функции $g(x)$ в точках x_1^* и x_2^* одинаковы.

3. Проверьте следующие свойства неподвижных точек отображения $g(x)$. По мере увеличения параметра r неподвижные точки $g(x)$ расходятся и наклон $g(x)$ в неподвижных точках уменьшается. При каком значении $r = r^{(1)}$ одна из неподвижных точек g равна $1/2$? Чему равно значение другой неподвижной точки? При этом значении параметра r наклон в обеих неподвижных точках равен нулю. При дальнейшем увеличении r наклоны в неподвижных точках становятся отрицательными. Наконец, при $r = r_2 = 0,8623$ наклоны в обеих неподвижных точках функции $g(x)$ становятся равными -1 и эти две неподвижные точки превращаются в неустойчивые.

4. Покажите, что для значений r , чуть больших r_2 , например $r \approx 0,87$, у функции $h(x) = g(g(x))$ имеются четыре неподвижные точки. Чему равно значение $r = r^{(2)}$, при котором одна из неподвижных точек равна $1/2$?

Чему равны значения трех остальных неподвижных точек при $r = r^{(2)}$. При каком значении $r = r_3$ четыре неподвижные точки отображения h становятся неустойчивыми?

Краткие теоретические сведения

Универсальные свойства нелинейных отображений

До сих пор мы изучали простое отображение (8.7). Для выяснения общих закономерностей удвоения периода рассмотрим в задаче 5 два других одномерных отображения.

Задача 5.

Проведите численные эксперименты для определения качественных свойств отображений

$$f(x) = xe^{r(1-x)}, \quad (8.9)$$

$$f(x) = [1 - (2x - 1)^4]. \quad (8.10)$$

Как ведет себя (8.9) для $r \sim 2$ и $r \sim 2,7$? Заметим, что для отображения (8.10) r и начальное значение x должны лежать между 0 и 1. Проявляют ли эти отображения сходные качественные свойства, например удвоение периода и существование хаотической области? Отображение (8.9) использовалось экологами (Мэй) для изучения популяции, ограниченной при больших плотностях эпидемиями. Несмотря на то, что данное отображение является более сложным по сравнению с (8.7), у него имеется одно важное преимущество, состоящее в том, что численность популяции всегда положительна независимо от выбираемого начального значения. Не существует никаких ограничений на максимальное значение r , но если величина r становится достаточно большой, то x в итоге будет фактически равняться нулю, следовательно, популяция вымирает.

В дальнейшем мы убедимся в том, что удобно определять «порядок» отображения. Пусть x_{\max} – значение, при котором $f(x)$ достигает максимума, т.е. $df/dx = 0$ при $x = x_{\max}$. Если при $x = x_{\max}$ производные $d^m f/dx^m = 0$ для $m < n$, а $d^n f/dx^n < 0$, то $f(x)$ является отображением n -го порядка. Покажите, что этот критерий означает, что отображения (8.7) и (8.9) являются отображениями второго порядка или квадратичными. Покажите, что по сравнению с этим отображение (8.10) имеет четвертый порядок, т.е. $d^2 f/dx^2 = d^3 f/dx^3 = 0$, а $d^4 f/dx^4 < 0$ при $x = 1/2$.

Приведем качественные соображения, свидетельствующие о том, что некоторые количественные свойства стандартного квадратичного отображения (8.7) в режиме удвоения периода присущи также всем квадратичным отображениям. Рассмотрим $f(x, r)$ при таком значении r , что период $f(x, r)$ равен 4 (рис. 8.10).

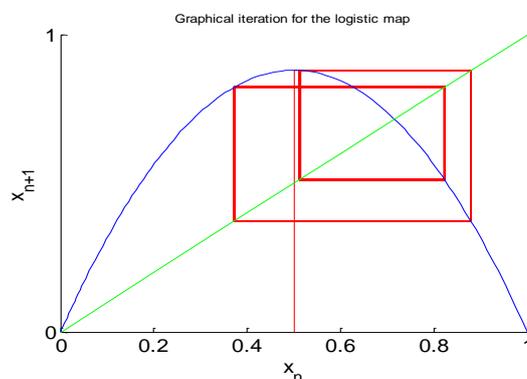


Рис. 8.10. Итерации $f(x)$ для $r = 0,88$. Заметьте, что для этого значения r функция $f(x)$ имеет период, равный 4

Теперь рассмотрим вторую итерацию $g(x, r) = f(f(x, r))$ для того же самого значения r (рис. 8.11).

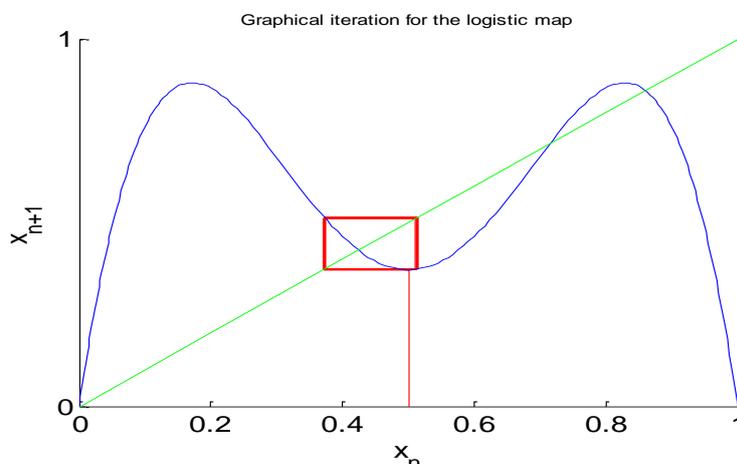


Рис. 8.11. Итерации $g(x)$ для $r = 0,88$, стартующие из $x_0 = 0,5$. Обратите внимание на форму $g(x)$ внутри «циркуляционного прямоугольника», ограниченного значениями $x_1^* = 0,373$ и $x_2^* = 0,512$

Ясно, что $g(x, r)$ имеет период 2 и при начальном значении $x_0 = 0,5$ осциллирует между обеими неподвижными точками $x_1^* = 0,373$ и $x_2^* = 0,512$. Можно видеть, что $g(x, r)$ качественно ведет себя подобно $f(x, r')$, где r' – меньшее значение r , для которого $f(x, r')$ имеет период 2. На рис. 8.12 показана $f(x, r')$ для произвольно выбранного значения $r' = 0,8$. Заметим, что

$f(x, r = 0,8)$ колеблется между значениями 0,513 и 0,799. Теперь сравним форму $g(x, r = 0,88)$ внутри циркуляционного прямоугольника на рис. 8.10 и форму $f(x, r' = 0,8)$ внутри циркуляционного прямоугольника, показанного на рис. 8.11.

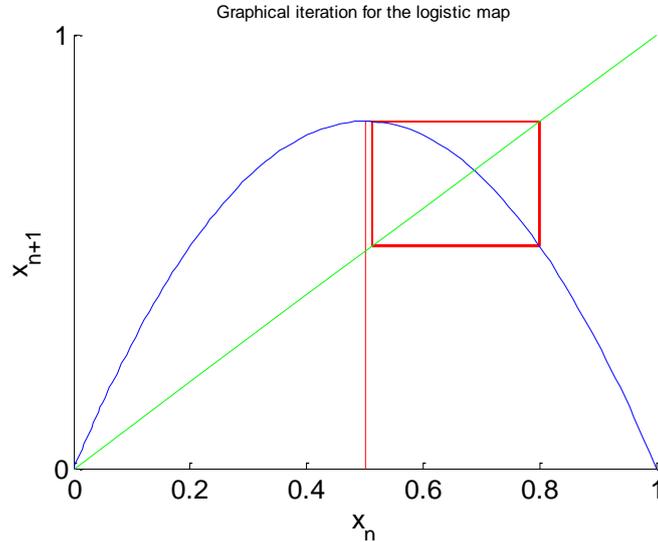


Рис. 8.12. Двухпериодическое поведение функции $f(x)$ для $r = 0,8$. Сравните вид функции $f(x)$ в циркуляционном прямоугольнике, ограниченном значениями $x_1^* = 0,513$ и $x_2^* = 0,799$, с поведением функции $g(x)$ в циркуляционном прямоугольнике, показанном на рис. 8.11

Мы видим, что если повернуть g вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр прямоугольника, а затем увеличить g так, чтобы циркуляционные прямоугольники для f и g имели одинаковые размеры, то обе функции внутри прямоугольников будут качественно одинаковы. Можно определить коэффициент увеличения α , заметив, что диапазон изменения $g(x, r = 0.88)$ равен $0.512 - 0.373 = 0.139$, а диапазон изменения $f(x, r = 0.8)$ равен $0.799 - 0.513 = 0.286$. Следовательно, если выбрать $\alpha = 0.286/0.139 = 2.06$, то обе функции будут вести себя сходным образом. Эта процедура иллюстрируется на рис. 8.13, где наложены циркуляционные прямоугольники функций $f(x, r = 0.8)$ и $g(x, r = 0.88)$.

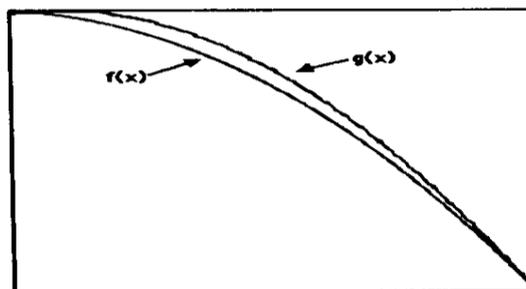


Рис. 8.13. Наложение соответственно увеличенных циркуляционных прямоугольников для функций $f(x, r = 0.8)$ и $g(x, r = 0.88)$.

Рассмотренный выше множитель представляет собой пример масштабного множителя; чтобы сравнить g с f , мы отмасштабировали g и изменили (*перенормировали*) значение r . Наши доводы были наводящими. Например, мы не объяснили выбор $r' = 0.8$. Оказывается, что достаточно сравнить циркуляционные прямоугольники для значений z , соответствующих неподвижной точке $x = 1/2$ и неподвижной точке, ближайшей к $x = 1/2$. Более строгий подход показывает, что если продолжить сравнение итераций более высокого порядка, например $h(x)$ с $g(x)$ и т.д., то для всех отображений одного и того же порядка совмещение функций будет сходиться к некоей универсальной функции, не зависящей от вида начальной функции $f(x)$.

Число α можно определить из родственных соображений. Посмотрите на «камертонные» бифуркации, изображенные на рис. 8.9 и 8.13. Заметим, что каждый камертон порождает «двойню» новых поколений, более плотно упакованных по сравнению с предыдущим поколением. Для количественной характеристики роста плотности неподвижных точек рассмотрим поведение функции $f(x)$ при значениях $r = r^{(n)}$ для которых одна из неподвижных точек равна $1/2$.

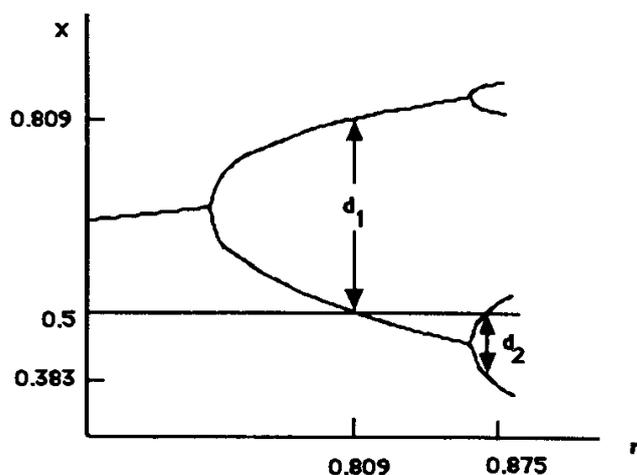


Рис. 8.14. Зависимость x от параметра роста r . Значение d является расстоянием от $x^* = 1/2$ до ближайшего элемента аттрактора с периодом 2^n .

Например, в задаче 5 мы нашли $r^{(1)} \approx 0.809$ и $r^{(2)} \approx 0.875$. Одной из мер плотности может служить величина $d_n = x_n^* - 1/2$, где x_n^* — значение неподвижной точки, ближайшей к неподвижной точке $x^* = 1/2$. Первые два значения d_n показаны на рис. 8.14, где $d_1 \approx 0.309$ и $d_2 \approx 0.117$. Заметим, что неподвижная точка, ближайшая к $x = 1/2$, переходит с одной стороны прямой $x = 1/2$ на другую. Определим величину α с помощью отношения

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}. \quad (8.10)$$

Оценка $\alpha = 0,309/0,117 = 2,64$ согласуется с нашими предыдущими оценками и асимптотическим пределом $\alpha = 2,5029078750958928485\dots$ (Целый ряд десятичных цифр приведен для того, чтобы показать, что это число известно с большой точностью!)

Мы можем количественно описать процесс удвоения периода с последующим переходом к хаосу. Напомним, что r_n является значением r , при котором впервые появляются 2^n циклов. В задаче 4 мы нашли значения $r_1 = 0,75$, $r_2 = 0,862$ и $r_3 = 0,880$. Фейгенбаум показал (с помощью калькулятора), что по мере роста n значение r_n приближается к предельному значению r_c по простому закону:

$$r_n - r_c = A\delta^{-n}. \quad (8.11)$$

Замечательный результат работы Фейгенбаума заключается в том, что постоянная δ , как и α , является *универсальной*, т.е. δ не зависит от детальных свойств $f(x)$, а зависит только от порядка отображения. Напротив, постоянная A зависит от детальной структуры функции $f(x)$. Из формулы (8.11) непосредственно выводится, что δ можно также определить с помощью соотношения

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}}. \quad (8.12)$$

Используя приведенные выше значения r_1 , r_2 и r_3 получим $\delta \approx 6.22$; асимптотическое значение равно $\delta = 4,66920160910299097\dots$

Практические задания

Задача 6. Дальнейшие оценки универсальных постоянных α и δ

1. Пользуясь рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены в тексте, сравните поведение $g(x)$ в циркуляционном прямоугольнике при $x = 1/2$ для $r = r^{(2)} \approx 0.875$ с поведением $f(x)$ в соответствующем циркуляционном прямоугольнике для $r^{(1)} \approx 0.809$. Найдите соответствующий масштабный множитель α и наложите f на перемасштабированную функцию g .

2. Проведите анализ, аналогичный п. «а», и сравните $h(x)$ при $r = r^{(3)} \approx 0,880$ с $g(x)$ при $r = r^{(2)}$. Определите масштабный множитель и наложите эти две функции.

3. Вычислите значения rn для процессов удвоения периода $8 \rightarrow 16$ и $16 \rightarrow 32$. Используйте эти значения rn для улучшения оценки δ .

4. Получите дополнительные значения для $r^{(n)}$, значений r , при которых 2^n итераций функции $f(x)$ имеют неподвижную точку при $x^* = 1/2$. Получите дополнительные оценки δ , воспользовавшись выражением (8.12) с заменой r_n на $r^{(n)}$.

Из приведенных выше рассуждений можно сделать вывод о том, что существуют универсальные постоянные α и δ , не зависящие от конкретного вида $f(x)$. Почему универсальность бифуркаций и существование универсальных постоянных относятся к чрезвычайно редким явлениям? Одна из причин заключается в том, что едва ли популяция будет эволюционировать в точном соответствии с отображением (8.6) или любым другим из ранее рассмотренных нами отображений. Однако если поведение не зависит от деталей функции, описывающей его, то могли бы существовать реальные системы, динамика которых была бы аналогична поведению простых отображений, которые мы рассмотрели. Если бы динамика была аналогичной, то мы бы узнали, что динамику системы со многими степенями свободы можно при определенных условиях упростить.

Конечно, физические системы обычно описываются дифференциальными, а не разностными уравнениями. Может ли происходить в таких системах удвоение периода? Некоторые исследователи сконструировали нелинейную RLC-цепь, присоединенную к генератору гармонического напряжения. Выходное напряжение испытывало бифуркации, а измеренные значения α и δ согласовываются со значениями, предсказанными для простого квадратичного отображения.

Поскольку электрические цепи можно описать с помощью нескольких переменных, то не могло вызвать удивления, что они ведут себя подобным образом. Более интересный случай представляет собой природа турбулентности в жидкости, которая является одной из главных областей исследования учеными различных специальностей. Рассмотрим, например, поток воды, обтекающий несколько препятствий. Из опыта известно, что при малых скоростях поток является регулярным и постоянным во времени и называется ламинарным течением. По мере роста скорости потока (определяемой с помощью безразмерного параметра, который называется числом Рейнольдса) появляются завихрения, но движение все еще постоянно. Если еще более увеличить скорость потока, то вихри опрокидываются

и начинается движение нижних слоев. Поток, который мы наблюдаем, находясь на уступе, становится нестационарным. Если и дальше скорость увеличивается, то поток становится очень сложным и выглядит хаотическим. Мы говорим, что течение воды совершило переход из ламинарного режима в турбулентный.

Это качественное описание перехода к хаосу в гидродинамических системах внешне выглядит аналогично описанию простого квадратичного отображения. Можно ли гидродинамические системы проанализировать с помощью простых моделей такого типа, которые мы здесь обсуждали? В некоторых частных случаях, таких как турбулентная конвекция в подогретом соуснике, удвоение периода и других, наблюдались переходы в турбулентный режим. Вообще такого типа теория и анализ, который мы провели, породили новые концепции и подходы. Тем не менее, истинное представление природы турбулентных потоков остается предметом многих современных исследований.

Система Энона (Henon) [11]

(Отображения с двумя параметрами)

Краткие теоретические сведения

Выше было рассмотрено отображение, являющееся простейшим представителем отображений с единственным квадратичным экстремумом, и обсудили картину бифуркаций и переход к хаосу, которые наблюдаются при вариации единственного управляющего параметра λ . В реальности, однако, часто встречаются ситуации, в которых система характеризуется не одним, а, по крайней мере, двумя параметрами. Пусть, например, мы наблюдаем за динамикой популяции, описываемой дискретной переменной x_n . Можно представить себе ситуацию, когда количество пищи, задающее параметр отображения λ , меняется с периодичностью два года. Это может происходить и по естественным причинам, или, например, за счет периодического искусственного подкармливания. Такая система может быть охарактеризована уже двумя параметрами:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda_1 x_n^2, \quad x_{n+2} = 1 - \lambda_2 x_{n+1}^2. \quad (8.13)$$

Эта задача приводится к одномерному «квадратичному» отображению:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4. \quad (8.14)$$

Как мы видели, возможность сложной динамики и хаоса в отображениях связана с наличием квадратичного экстремума. Поэтому если говорить о некоей общей теории, естественным шагом является переход от отображения с единственным квадратичным экстремумом к отображению с двумя такими экстремумами. Простейшим вариантом функции с двумя экстремумами является кубическая парабола. Таким образом, приходим к отображению:

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3. \quad (8.15)$$

Это отображение естественно назвать кубическим. В отличие от логистического отображения, в этом случае изменение знака перед нелинейным членом существенно меняет свойства отображения, поэтому для полноты картины следует рассмотреть и отображение

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3. \quad (8.16)$$

Переход к кубическому отображению как следующей «естественной» модели теории можно обосновать более строго с использованием разложения в ряд Тейлора. Такой подход позволяет перейти далее к трехпараметрическим моделям и т.д. Заметим, что число существенных параметров, от которых зависит картина динамических режимов и бифуркаций, является важной характеристикой моделей и явлений в нелинейной динамике и поэтому носит специальное название – *корузмерность*.

Рассмотрим пример двумерного отображения, широко используемого в нелинейной динамике.

Как известно, простейшим одномерным отображением со сложной динамикой является логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \text{ или } x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (8.17)$$

которое описывает, например, динамику биологической популяции. Тогда возникает правомерный вопрос: нельзя ли построить двумерное обобщение логистического отображения? Это можно сделать различными способами, наиболее простым из которых является следующий. При введении одномерного отображения мы предполагали, что численность популяции в $(n + 1)$ -ый год зависит лишь от ее численности в n -ый год.

Предположим теперь, что память «глубже», т.е. численность популяции в $(n + 1)$ -ый год зависит как от численности в n -ом году, так и от численности в $(n - 1)$ -ом году. Будет считать, что последняя зависимость должна быть слабой, поэтому будем полагать ее линейной. Тогда отображение запишется в виде:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - bx_{n-1}, \quad (8.18)$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Введем теперь обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда (8.18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Если использовать другой вариант исходного логистического отображения, то можно прийти к записи в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Такое отображение впервые предложил французский астрофизик Мишель Энон, и оно носит его имя. Отметим, что Энон не использовал биологическую интерпретацию, а действовал чисто математическими методами, конструируя простейшие двумерные квадратичные отображения со сложной динамикой.

Отображение Энона допускает аналитический поиск не только неподвижной точки, но и 2-цикла. Сначала найдем неподвижную точку отображения Энона.

Для этого надо решить следующую систему

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 - \lambda x_0^2 - by_0, \\ y_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda x_0^2 + (1 + b)x_0 - 1 = 0 \quad (8.22)$$

и

$$x_0 = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (8.23)$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\lambda = \frac{-(1+b)}{4}$$

в системе рождается пара неподвижных точек, одна из которых будет устойчивой, а вторая – не устойчивой, т.е. происходит уже встречавшаяся нам ранее касательная бифуркация.

Теперь найдем 2-цикл отображения. Для его элементов справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \lambda x_1^2 - b y_1, & x_1 &= 1 - \lambda x_2^2 - b y_2, \\ y_2 &= x_1, & y_1 &= x_2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_2(1+b) &= 1 - \lambda x_1^2, \\ x_1(1+b) &= 1 - \lambda x_2^2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Складывая и вычитая первое и второе уравнения (8.25), легко находим

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(1+b) &= \lambda(x_2^2 - x_1^2), \\ (x_2 + x_1)(1+b) &= 2 - \lambda(x_2^2 + x_1^2). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Из первого уравнения следует, что

$$x_2 + x_1 = \frac{1+b}{\lambda}. \quad (8.27)$$

В свою очередь, подставляя этот результат во второе уравнение (8.26) и используя очевидное соотношение $x_2^2 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2x_2x_1$, получим

$$x_2x_1 = \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2}. \quad (8.28)$$

Отсюда следует, что, согласно теореме Виета, x_1 и x_2 являются корнями следующего квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{1+b}{\lambda}x + \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2} = 0. \quad (8.29)$$

из которого легко находятся элементы цикла:

$$x_{1,2} = \frac{(1+b) \pm 2\sqrt{\lambda - 3(1+b)^2/4}}{2\lambda}. (?) \quad (8.30)$$

Нетрудно видеть, в частности, что корни существуют только при условии

$$\lambda > \frac{3(1+b)^2}{4}.$$

откуда следует, что 2-цикл рождается при условии

$$\lambda = \frac{3(1+b)^2}{4}.$$

На рис. 8.15 показано бифуркационное дерево отображения Энона при $b = 0,3$. Можно видеть, что оно демонстрирует не только рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, но и весь каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе. Новым по сравнению с логистическим отображением является то, что дерево иногда скачком «разбухает», т.е. размер аттрактора резко увеличивается. Такое явление в нелинейной динамике называют кризисом. Оно встречается достаточно часто и обыкновенно возникает, если в системе присутствует мультистабильность: в этом случае при определенных значениях параметров два аттрактора могут слиться в один, и именно этот момент отображается на дереве в виде его резкого расширения. Возможны, однако, и другие варианты кризисов.

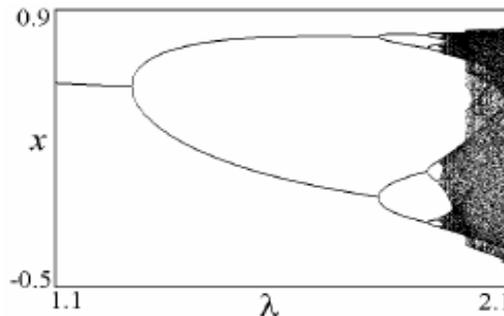


Рис. 8.15. Бифуркационное дерево отображения Энона (8.20) при $b = 0,3$.

Важной характеристикой отображения, позволяющей судить о наличии сжатия фазового пространства, является его *якобиан*.

Пусть имеется двумерное отображение общего вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n).\end{aligned}\tag{8.31}$$

Неподвижная точка этого отображения удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}x_0 &= f(x_0, y_0), \\y_0 &= g(x_0, y_0).\end{aligned}\tag{8.32}$$

Динамика малых возмущений этой неподвижной точки \tilde{x}_n и \tilde{y}_n в линейном приближении будет описываться соотношением:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix},\tag{8.33}$$

где матрица возмущений M составлена из соответствующих производных

$$M = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}.\tag{8.34}$$

Определитель $J = f'_x g'_y - f'_y g'_x$ этой матрицы, вычисленный в неподвижной точке, называется якобианом и определяет, как известно из математического анализа, эволюцию малого элемента площади при действии отображения. При $J < 1$ этот элемент сжимается, так что отображение будет диссипативным. Если $J = 1$, то отображение оказывается консервативным, и фазовый объем по мере эволюции не меняется.

Найдем для примера якобиан отображения Энона. Вычисляя соответствующие частные производные, находим:

$$M = \begin{pmatrix} -2\lambda x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{8.35}$$

В этом случае якобиан $J = b$. Таким образом, параметр b управляет степенью сжатия фазового элемента. При $b = 0$ оно «бесконечно сильное», так что отображение Эно редуцирует к одномерному логистическому отображению. При $b = 1$ реализуется противоположный предельный случай – консервативная система.

Отображение Энона представляет пример систем с постоянным якобианом. В более общем случае якобиан системы может зависеть от значений динамических переменных, так что в отдельных областях фазового пространства наблюдается сжатие, а в других – растяжения фазового элемента. В этом случае могут возникать новые эффекты, которые будут обсуждаться ниже.

Итак, диссипативные динамические системы обладают аттракторами. Это свойство является очень важным и существенно упрощает процесс исследования таких систем. Ведь вследствие притяжения к аттрактору траектории, стартовавшие из различных точек, с течением времени приходят к одной и той же, т.е. со временем система «забывает» начальные условия и ее поведение определяется только значениями параметров. Следовательно, для изучения поведения диссипативной динамической системы достаточно исследовать ее аттракторы. Это, в частности, существенно упрощает компьютерное моделирование: не надо следить за всеми изображающими точками. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка «вышла» на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

Аттракторы динамических систем могут быть как очень простыми (неподвижная точка, цикл определенного периода), так и более сложными. Пример такого сложного аттрактора дает рис. 8.16, демонстрирующий, что изображающие точки притягиваются к некоторой сложной слоистой структуре. Если посмотреть с помощью компьютера как «микроскопа» отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных «нитей» и областей пустого пространства, причем каждая нить в свою очередь имеет аналогичную тонкую структуру (см. рис. 8.17). Как говорят, аттрактор в этом случае обладает фрактальными свойствами. Подобные аттракторы были обнаружены в семидесятые годы нашего века и получили название странных. Обыкновенно (но не всегда) им соответствует режим динамического хаоса.

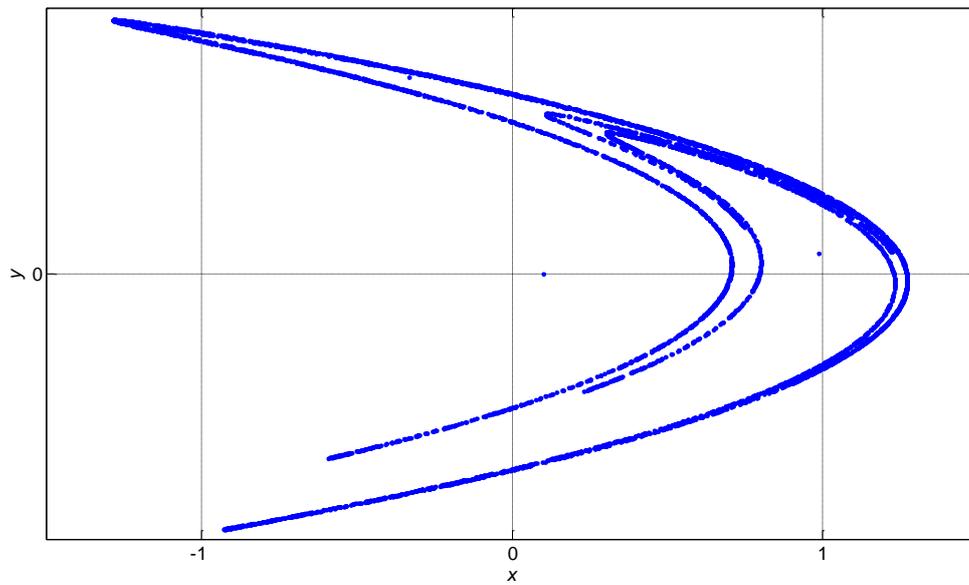


Рис. 8.16. Отображение Энона

```

%Henon_map (a,b)
a=1.4; b=0.3;
N=6000;
x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);
x(1)=0.1;
y(1)=0;
for i=1:N
    x(i+1)=1+y(i)-a*(x(i))^2;
    y(i+1)=b*x(i);
end
axis([-1,2,-1,1])
figure
plot(x,y, '.')
fsize=15;
set (gca,'xtick',[-1:1:1],'FontSize',fsize)
set (gca,'ytick',[-1:1:2],'FontSize',fsize)
xlabel('\itx','FontSize',fsize)
ylabel('\ity','FontSize',fsize)

```

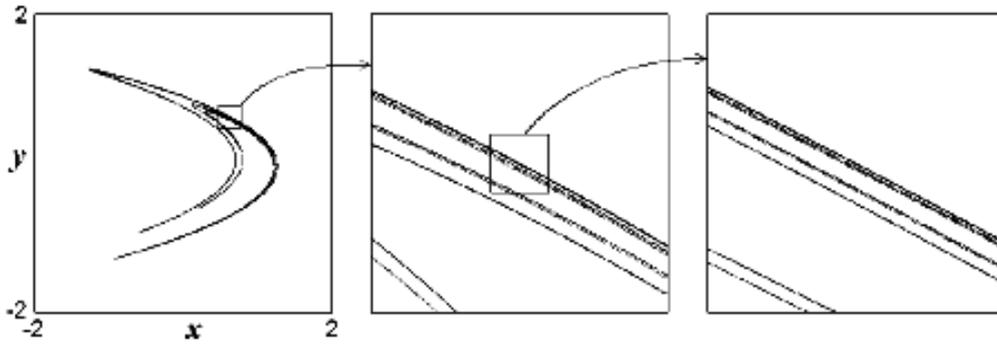


Рис. 8.17. Фрактальная структура аттрактора отображения Энона (8.20).
Значения параметров $\lambda = 1,4$ и $b = 0,3$

Система Лоренца [15]

Система трех нелинейных ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{dt} = X(\rho - Z), \\ \frac{dZ}{dt} = XY - \beta Z \end{cases} \quad (8.36)$$

называется системой Лоренца и была получена американским метеорологом в 1963 г. из уравнений гидродинамики как модель для описания тепловой конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу [16].

В формуле (8.36) β – отношение вертикальных и горизонтальных размеров конвективной ячейки;

σ – безразмерное число Прандтля;

ρ – приведенное число Релея.

Система Лоренца – один из примеров ДС, имеющей простой физ. смысл; она демонстрирует стохастическое поведение системы. В фазовом пространстве этой системы в области параметров, указанных на рис. 9.4., существует странный аттрактор, движение изображающей точки на котором соответствует «случайному» – турбулентному течению жидкости при тепловой конвекции.

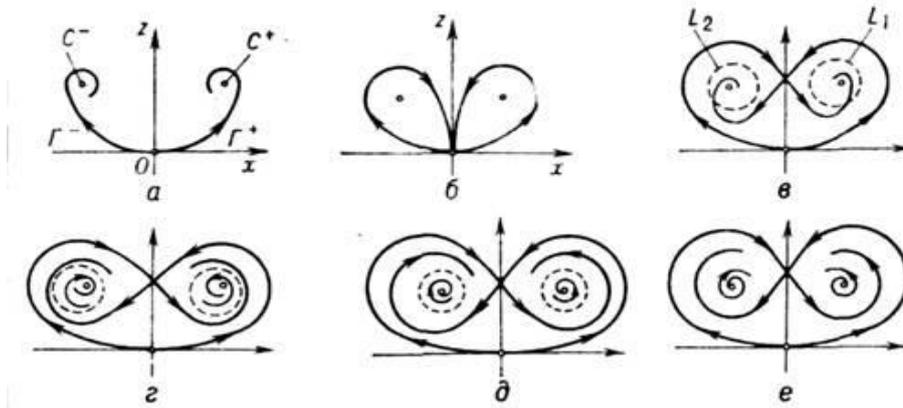


Рис. 8.18. Иллюстрация последовательных бифуркаций в системе Лоренца при увеличении параметра r : а) $1 < r < r_1$, б) $r = r_1$, в) $r_1 < r < r_2$, г) $r = r_2$, д) $r_2 < r < r^*$, е) $r^* < r$

Система Лоренца (при $\beta = 1$) описывает, в частности, движение жидкости в конвективной петле, расположенной в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести тороидальной полости, заполненной жидкостью (рис. 8.19). На стенках полости поддерживается не зависящая от времени (но зависящая от угла φ) температура $T(\varphi)$; нижняя часть петли теплее верхней. Уравнения движения жидкости в конвективной петле сводятся к системе Лоренца, где $x(t)$ – скорость движения жидкости, $y(t)$ – температура в точке N , а $z(t)$ – температура в точке M при больших t . С ростом r характер движения жидкости меняется: сначала (при $r < 1$) жидкость неподвижна, далее (при $1 < r < r_2$) устанавливается циркуляция с постоянной скоростью (либо по часовой стрелке, либо против); при еще больших r все течение становится чувствительным к малым изменениям начальных условий, скорость циркуляции жидкости меняется уже нерегулярно: жидкость вращается иногда по часовой стрелке, иногда – против.



Рис. 8.19. Конвективная петля – физическая модель, для которой выводятся уравнения Лоренца

При обычно используемых значениях $r = 10$, $b = 8/3$ система Лоренца обладает следующими свойствами: уравнения системы Лоренца инварианты относительно преобразования $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$; фазовый объем сокращается с постоянной скоростью

$$\Lambda = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(r+b+1) \approx -13,7,$$

за единицу времени объем сокращается в $e^{-\Lambda} \approx 10^6$ раз. С ростом r в системе Лоренца происходят следующие основные бифуркации. 1) При $0 < r < 1$ единственным состоянием равновесия является устойчивый узел в начале координат $O(0, 0, 0)$. 2) При $1 < r < r_1$, где $r_1 = 13,92$. Система Лоренца кроме упомянутого тривиального (O) имеет еще два состояния равновесия C^+ , C^- . Состояние равновесия O является седлом, имеющим двумерное устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое, состоящее из O и двух сепаратрис Γ^+ и Γ^- , стремящихся к C^+ и C^- (рис. 8.18, а). 3) При $r = r_1$ каждая из сепаратрис становится двоякоасимптотической к седлу O (рис. 8.18, б). При переходе r через r_1 из замкнутых петель сепаратрис рождаются неустойчивые (седловые) периодические движения – предельные циклы L_1 и L_2 . Вместе с этими неустойчивыми циклами рождается и очень сложно организованное предельное множество; оно, однако, не является притягивающим (аттрактором), и при $r_1 < r < r_2$ (рис. 8.18, в), где $r_2 = 24,06$, все траектории по-прежнему стремятся к C^\pm . Эта ситуация отличается от предшествующей тем, что теперь сепаратрисы Γ^+ и Γ^- идут к «не своим» состояниям равновесия C^- и C^+ соответственно. 4) При $r_2 < r < r^*$, где $r^* = 24,74$, в системе Лоренца наряду с устойчивыми состояниями равновесия C^\pm существует еще притягивающее множество, характеризующееся сложным поведением траекторий, – аттрактор Лоренца (рис. 8.18, д и рис. 8.20). 5) При $r \rightarrow r^*$ седловые циклы L_1 и L_2 стягиваются к состояниям равновесия C^+ и C^- , которые при $r = r^*$ теряют устойчивость, и при $r > r^*$ единственным притягивающим множеством системы Лоренца является аттрактор Лоренца. Таким образом, если стремиться r к r^* со стороны меньших значений, то стохастичность в системе Лоренца возникает сразу, скачком, т.е. имеет место жесткое возникновение стохастичности.

К системе Лоренца сводятся не только уравнения, описывающие конвективные движения жидкости, но и другие физические модели (трехуровневый лазер, дисковое динамо и т. д.).

Исследование на неподвижные точки

1. $X = Y = Z = 0$ – точка $O = (0,0,0)$ всегда является неподвижной.
2. Условие стационарности:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 0 = \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{dt} = 0 = X(\rho - Z), \\ \frac{dZ}{dt} = 0 = XY - \beta Z \end{cases}$$

дает еще две неподвижные точки $O_{1,2}$ (но не всегда устойчивые):

$$Z_{ст} = \rho - 1, X_{ст} = Y_{ст} = \pm \sqrt{(\beta Z_{ст})} = \sqrt{[\beta(\rho - 1)]}.$$

Анализ устойчивости неподвижных точек:

– при $\rho < 1$ точка O – устойчивый узел, других устойчивых точек нет. Это означает отсутствие конвекции,

– при $1 < \rho < \rho^* = \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$. Появляются две новые устойчивые точки $O_{1,2}$, если $\sigma > \beta - 1$. Точка при этом O – становится неустойчивой. Два возможных направления вращения в конвективной ячейке, т.е. два устойчивых динамических режима.

– при $\rho > \rho^*$ точки $O, O_{1,2}$ становятся неустойчивыми. Это означает отсутствие регулярных устойчивых режимов в системе и переход к хаотической конвекции.

Результаты численного исследования динамики системы Лоренца

При $\sigma = 10, \beta = 8/3$. ($\rho^* \approx 24.74$) ДС Лоренца имеет следующую зависимость координат от времени (рис. 8.20) и следующий фазовый портрет (рис. 8.21)

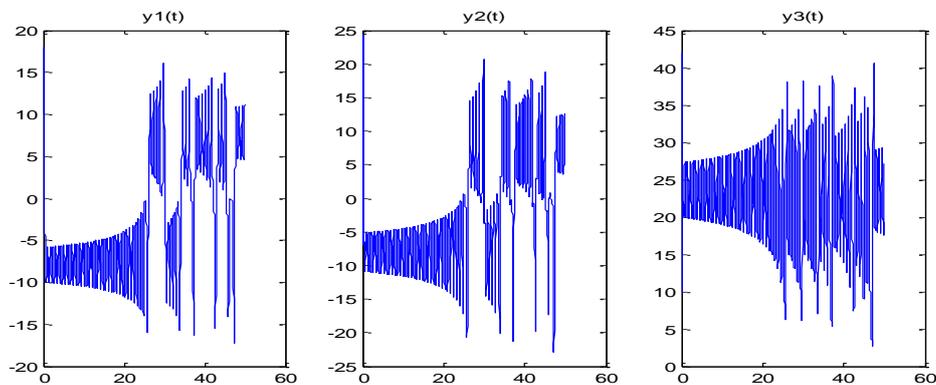


Рис. 8.20. Зависимость координат системы Лоренца от времени

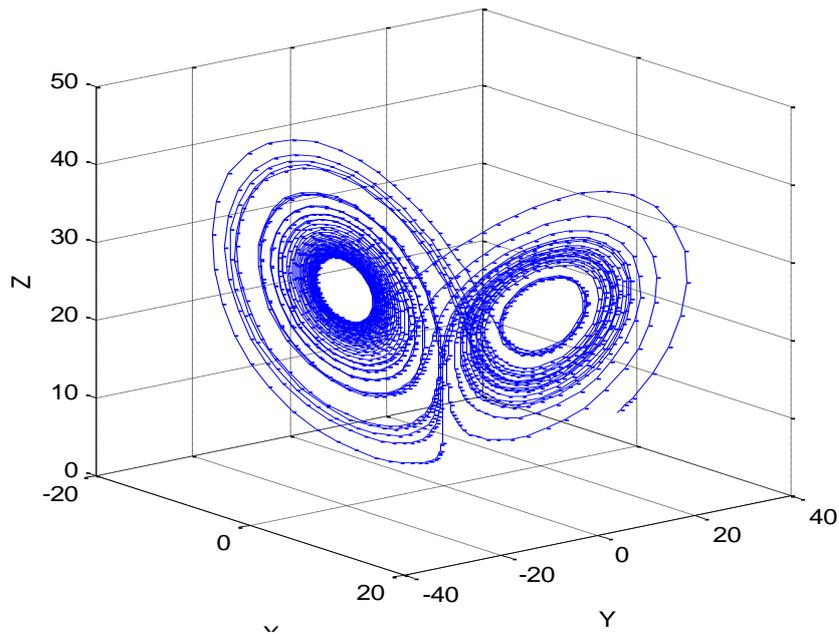


Рис. 8.21. Фазовый портрет системы Лоренца

1) $1 \leq \rho < \rho_1 \approx 13.926$.

– O – неустойчивая,

– точки $O_{1,2}$ – устойчивые (бистабильность). Зависимость от начальных условий. Две ветви сепаратрисы – Γ_1 и Γ_2

При $\rho = 13.926$ ДС Лоренца имеет следующую зависимость координат от времени (рис. 8.22) и следующий фазовый портрет (рис. 8.23)

```
function lor_2
% Задание вектора начальных условий
Y0 = [10;20;10];
% Вызов решателя ODE
[T, Y] = ode45(@oscil, [0 50], Y0);
% Вывод графика решения
subplot(2,2,1); plot(T, Y(:,1));title('y1(t)')
subplot(2,2,2); plot(T, Y(:,2));title('y2(t)')
subplot(2,2,3); plot(T, Y(:,3));title('y3(t)')
subplot(2,2,4);
plot(Y(:,1),Y(:,2));title('y1(t),y2(t)')
% Вывод графика производной от решения (маркеры – точки,
линия – пунктир)
figure
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
axis square
```

```

xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z')
grid on
% Задание правых частей системы ODE
function F = oscil(t, y)
F = [-9*y(1)+9*y(2); 36*y(1)-y(2)-y(1)*y(3); y(1)*y(2) -
(13/7)*y(3)];
%
```

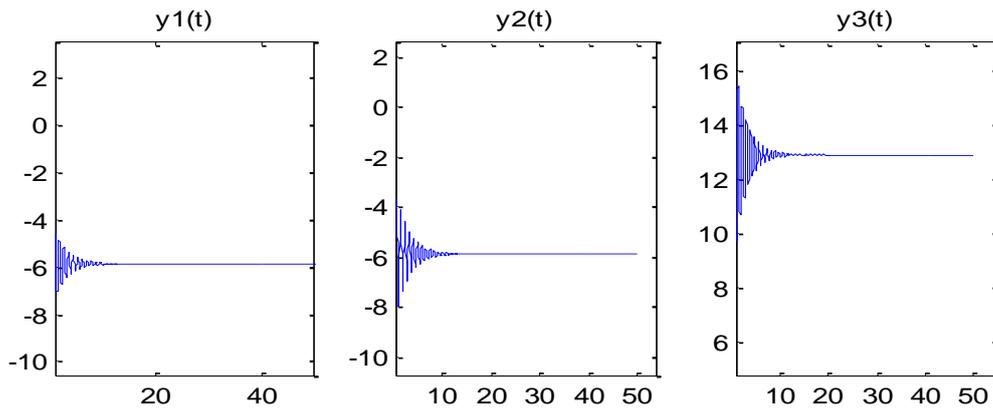


Рис. 8.22. Зависимость координат системы Лоренца от времени при $\rho = 13.926$

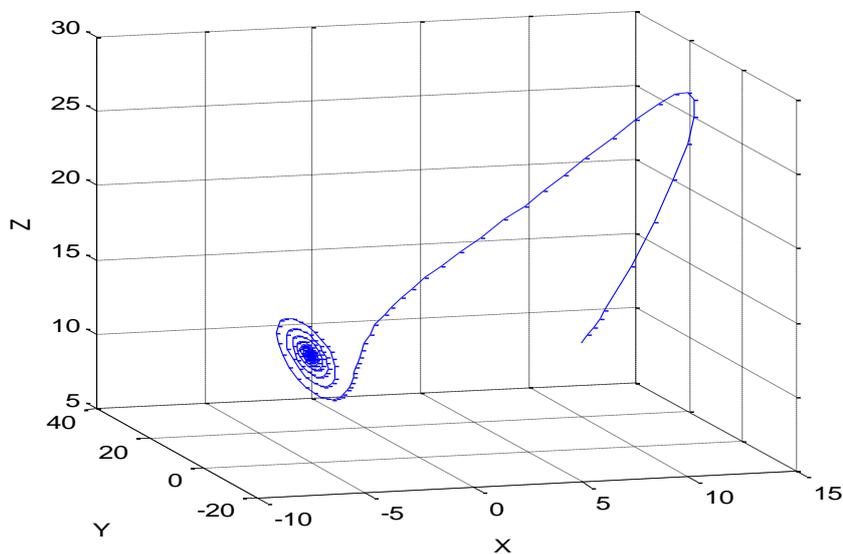


Рис. 8.23. Фазовый портрет системы Лоренца при $\rho = 13.926$

При $\rho > \rho_3 \approx 148.4$

Одно притягивающее множество - предельный цикл (автоколебания).

При уменьшении параметра ρ от ρ_3 к ρ^* переход к хаосу:

– через каскад бифуркаций удвоения периода.

– через перемежаемость

ДС Лоренца имеет следующую зависимость координат от времени (рис. 8.24) и следующий фазовый портрет (рис. 8.25)

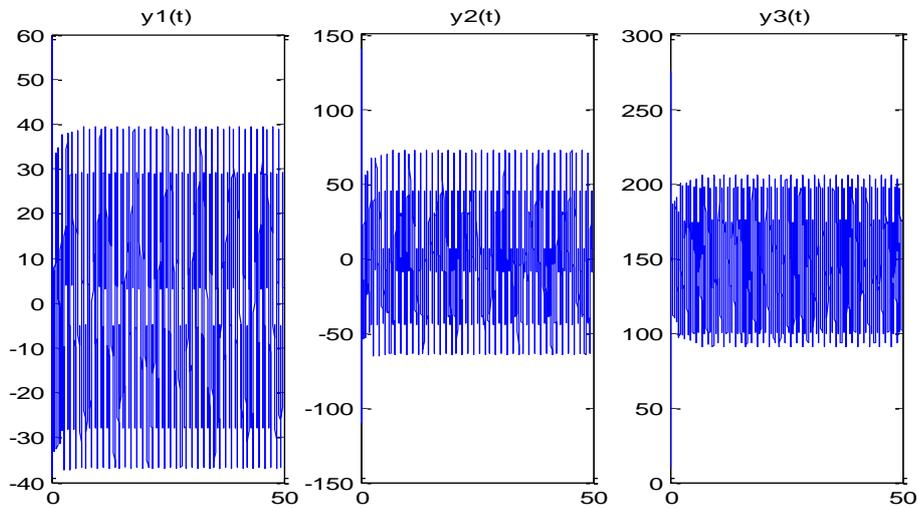


Рис. 8.24. Зависимость координат системы Лоренца от времени при $\rho > \rho_3 \approx 148.4$

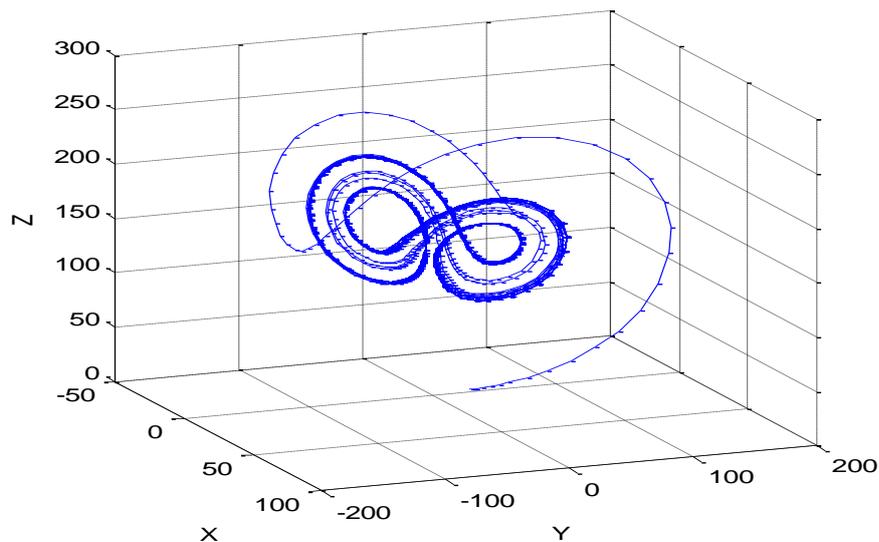


Рис. 8.25. Фазовый портрет системы Лоренца при $\rho > \rho_3 \approx 148.4$

```
function lor
% Задание вектора начальных условий
Y0 = [10;20;10];
% Вызов решателя ODE
[T, Y] = ode45(@oscil, [0 50], Y0);
% Вывод графика решения
subplot(1,3,1); plot(T, Y(:,1));title('y1(t)')
subplot(1,3,2); plot(T, Y(:,2));title('y2(t)')
subplot(1,3,3); plot(T, Y(:,3));title('y3(t)')
```

```

%subplot(2,2,4);
plot(Y(:,1),Y(:,2));title('y1(t),y2(t)')
% Вывод графика производной от решения (маркеры – точки,
линия –пунктир)
figure
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
axis square
xlabel('X'), ylabel('Y'),zlabel('Z')
grid on
% hold on; plot(T, Y(:,2), 'k.:')
% Задание правых частей системы ODE
function F = oscil(t, y)
F = [10*(y(2)-y(1)); y(1)*(150-y(3))-y(2); y(1)*y(2) -
(8/3)*y(3)];

```

Порядок выполнения работы

1. Изучите теоретическую часть.
2. Осуществите численный эксперимент с различными значениями параметров систем Лоренца и Энона.
3. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:
 - титульный лист;
 - решение задачи и результаты решения задачи.

Контрольные вопросы

1. Что такое нелинейная ДС?
2. Как осуществляется анализ нелинейных ДС в СКМ MATLAB?
3. Что такое логистическое отображение?
4. Что такое система Энона?
5. Что такое система Лоренца?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев В.В. MATLAB в научных и экономических расчётах: методические указания по выполнению лабораторных работ / В.В. Андреев.– Казань, КГЭУ, 2013. – 148 с.
2. Анищенко В.С. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов / Анищенко В.С, Вадивасова Т.Е. – М.:– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 516 с.
3. Ануфриев И. MATLAB 5.3/6.x: самоучитель / Ануфриев. И. – СПб.: БХВ Петербург, 2002.
4. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 : монография / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова – СПб.: БХВ Петербург, 2005.
5. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике: Ч. 1. / Х. Гулд, Я. Тобочник. – М.: Мир, 1990. – 350 с.
6. Дьяконов В.П. MATLAB 7*/R2006/R2007 : Самоучитель / В.П. Дьяконов – М.: ДМК Пресс, 2008. – 768 с.
7. Кетков Ю.Л. MATLAB 7: программирование, численные методы : монография / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М. Шульц – М.СПб.: БХВ-Петербург. 2005. – 752 с.
8. Кузнецов А.П. Введение в физику нелинейных отображений : учеб. пособие / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина. – Саратов: изд-во «Научная книга», 2010. – 134 с.
9. Максимова А.П. Лабораторный практикум по вычислительной математике. Методические указания по выполнению лабораторных работ. / Максимова А.П., Малова Н.А. – Чебоксары: Волжский филиал МАДИ (ГТУ), 2008. – 91 с.
10. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы : монография / Шредер М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 528 с.
11. Hunt В.Р. Matlab R2007 с нуля[®]! Книга + Видеокурс.: [пер. с англ.] / Brian R. Hunt и др. – М.: Лучшие книги, 2008. – 352 с.
12. Numerical Computing with MATLAB (text book) The MathWorks, Inc. (www.mathworks.com/moler)
13. Higham D.J. MATLAB Guide. / Higham D.J., Higham N.J. – 2nd ed. SIAM, 2005. – 382 p.
14. www.femto.com.ua
15. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. – 253 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Лабораторная работа № 1 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	6
Лабораторная работа № 2 Решение систем ОДУ	12
Лабораторная работа № 3 Решение ОДУ высших порядков	16
Лабораторные работы № 4–5 Динамические системы (ДС)	19
Лабораторные работы № 6–7. Качественный анализ линейных ДС	37
Лабораторные работы № 8–9. Качественный анализ нелинейных ДС	58
Литература и электронные ресурсы	95

Учебное издание

**МАТЛАВ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

Лабораторный практикум

**Составители: Андреев Владимир Васильевич,
Насыров Ильгиз Кутдусович**

Кафедра инженерной кибернетики КГЭУ

Редактор издательского отдела *Н.А. Мустакимова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 13.12.2017.

Формат 60 × 84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ. Бумага ВХИ.
Усл. печ. л. 5,64. Уч.-изд. л. 2,71. Тираж 200 экз. Заказ № 160/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,
420066, Казань, Красносельская, 51