

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.К. БУДНИКОВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ПРАКТИКУМ
Часть I

Казань 2018

УДК 519.2

ББК 22.17

Б90

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент Казанского национального
исследовательского технического университета им. А.Н.Туполева

Е.С. Белашова,

кандидат физико-математических наук, доцент Казанского
государственного энергетического университета

Н.К. Петрова

Будникова И.К.

Б90 Теория вероятностей и математическая статистика: практикум
(часть 1) / И.К. Будникова. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2018. – 128 с.

Практикум ставит целью развитие у студентов навыков практического применения теоретических знаний для решения задач как учебного характера, так и прикладного значения в процессе формирования компетенций, соответствующих требованиям ФГОС.

В пособии кратко излагается теоретический материал, который сопровождается решением типовых задач. Для самостоятельного решения студентам предлагается порядка 200 задач разного уровня сложности.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.03 «Прикладная информатика».

Практикум может быть рекомендован для студентов, магистрантов и аспирантов, занимающихся обработкой статистических данных, использующих современные компьютерные технологии.

ВВЕДЕНИЕ

Практикум по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» разработан в соответствии с требованиями ФГОС ВО и образовательных программ бакалавриата по направлениям:

– 01.03.04 Прикладная математика, образовательная программа «Математическое и программное обеспечение систем обработки информации и управления»;

– 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, образовательные программы «Автоматизированное управление бизнес-процессами и финансами», «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем», «Технологии разработки программного обеспечения»;

– 09.03.03 Прикладная информатика, образовательная программа «Прикладная информатика в экономике».

Целью практикума является формирование у студентов навыков применения теоретических знаний, полученных в лекционном блоке дисциплины, для решения практических задач во всех сферах профессиональной деятельности.

Задачи:

– научить использовать полученные знания для вероятностного и статистического анализов, а также моделирования стохастических объектов при решении инженерных задач;

– развить логическое мышление;

– выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умения перевести инженерную задачу на математический язык.

В соответствии с требованиями ФГОС по указанным направлениям в процессе освоения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» у студентов формируются следующие результаты образования в области компетенций:

– готовность к самостоятельной работе;

– способность использовать основные задачи естественнонаучных дисциплин и современные информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности;

– способность анализировать социально-экономические задачи и процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования;

– способность использовать математические методы и современные

прикладные программные средства для решения задач профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры.

В практикуме краткое изложение теоретического материала сопровождается решением типовых задач с подробным описанием методики решения. Для самостоятельной работы студентов приводится порядка 200 задач разного уровня сложности.

По каждой теме приводятся контрольные вопросы для самопроверки знаний студентами, а также рекомендуется литература для дополнительного изучения материала.

Занятия проводятся с применением компьютера – разных модулей программы Microsoft Office Excel и программы Statistica.

Продолжительность каждого занятия – 4 часа.

ЗАНЯТИЕ № 1

ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Цель занятия: освоить приемы непосредственного вычисления вероятностей.

Классическая вероятностная модель

Каждый эксперимент заканчивается каким-то определенным результатом, который не всегда можно предугадать заранее. Для того чтобы формально описать некоторый эксперимент, следует указать все возможные варианты результатов, которыми этот эксперимент может закончиться. В теории вероятностей такие результаты называются исходами. Множество Ω всех возможных исходов эксперимента называется пространством элементарных исходов. Предполагается, что эксперимент может закончиться только одним элементарным исходом. В наиболее простом случае все эти исходы можно перечислить:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}.$$

Такое пространство элементарных исходов называется дискретным. Простейшим пространством элементарных исходов является такое пространство, в котором все указанные исходы рассматриваемого эксперимента:

- 1) равновозможны;
- 2) взаимно несовместны (то есть в результате эксперимента может произойти один и только один из указанных исходов);
- 3) все исходы образуют полную группу событий (то есть никакие другие исходы, кроме перечисленных, не могут произойти).

Такое пространство конечно и называется пространством равновозможных исходов или симметричным пространством. Например, в случае бросания игральной кости может выпасть любое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поэтому пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

В дискретном пространстве вероятность каждого элементарного исхода считается заданной и обозначается $P(\omega_i)$ или p_i , причем всегда $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$. Таким образом, сумма (конечная или бесконечная) вероятностей

всех элементарных исходов равна единице. Элементарные исходы называют элементарными событиями.

Вероятностью события A называется сумма вероятностей всех элементарных исходов, входящих в A , то есть $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Из этого определения вероятности события следует, что всегда $0 \leq P(A) \leq 1$.

В случае равновозможных исходов вероятность элементарного события A определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где $n = \Omega$ – число элементов во множестве Ω , которое обычно называется общим числом исходов, $m = A$ – число элементов во множестве A , называется числом благоприятствующих исходов.

Таким образом, формула $P(A) = m/n$ используется лишь для подсчета вероятностей событий в опытах, обладающих симметрией возможных исходов.

Событие $\bar{A}$, состоящее из всех элементарных исходов, не входящих в A , называется противоположным событием событию A . Оно происходит только тогда, когда событие A не произошло. Очевидно, что $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Это равенство используется для вычисления вероятности события A в случае, когда вероятность противоположного события известна или легко может быть найдена, тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Таким образом, для вычисления вероятности в каждой задаче важно определить, в чем состоит эксперимент, затем правильно построить соответствующее пространство элементарных событий и выделить в нем требуемое событие A . Затем, используя методы комбинаторики, подсчитать число элементов в Ω и A .

Элементы комбинаторного анализа

Одной из задач комбинаторики является подсчет числа элементов конечных множеств, заданных каким-либо дескриптивным условием. Рассмотрим типовые ситуации. Пусть имеется m групп $A_1, A_2, \dots, A_m$, причем i -я группа содержит n_i элементов. Тогда справедливы следующие правила.

Основные правила комбинаторики

Правило умножения. Общее число N способов, которыми можно получить упорядоченную совокупность $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, то есть выбрать по одному элементу из каждой группы и расставить их в определенном порядке, равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m.$$

Пример 1. В группе 30 студентов, нужно выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько существует способов такого выбора?

Решение. Старостой может быть выбран любой из 30 студентов, заместителем-любой из оставшихся 29, а профоргом-любой из оставшихся 28 студентов, то есть $n_1 = 30$, $n_2 = 29$, $n_3 = 28$. Согласно правилу умножения, общее число способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Правило сложения. Если один элемент из группы A_i можно выбрать n_i способами и при этом любые две группы A_i и A_j не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из A_1 , или из $A_2, \dots$, или из A_m можно осуществить N способами:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m.$$

Пример 2. В ящике 100 деталей, из них 30 – первого сорта, 50 – второго, остальные – третьего сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика одной детали первого или второго сорта?

Решение. Деталь первого сорта может быть извлечена $n_1 = 30$ способами, второго сорта – $n_2 = 50$ способами.

По правилу суммы существует $N = n_1 + n_2 = 30 + 59 = 80$ способов извлечения одной детали первого или второго сорта.

Упорядоченные совокупности (последовательный выбор)

Если эксперимент состоит в том, что из совокупности объемом n последовательно выбирают m элементов и располагают их в порядке выбора, то возможны две ситуации.

Размещения без повторения. Отобранный элемент перед отбором следующего не возвращается в совокупность. Такой выбор называется размещением m элементов из n , или последовательным выбором без возвращения.

Размещения – это упорядоченные совокупности m элементов из n , отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов. Число возможных способов размещения вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 3. В расписание одного дня включены 5 уроков. Определите число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов как составом, так и их порядком следования, поэтому общее число способов равно:

$$N = A = 11!/(11-5)! = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440.$$

В частном случае, когда выбираются все элементы совокупности, то есть $m = n$, размещения называются перестановками.

Перестановки – это упорядоченные совокупности, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Число всех перестановок множества из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример 4. Порядок выступления семи участников конкурса определяется жребием. Сколько вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение. Каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, то есть является перестановкой из 7 элементов. Их число равно:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Неупорядоченные совокупности (одновременный выбор)

Сочетания без повторений. Если комбинации из n элементов по m отличаются только составом элементов, то их рассматривают как одновременный неупорядоченный выбор m элементов из генеральной совокупности объема n и называют сочетаниями из n элементов по m .

Сочетания – это неупорядоченные совокупности элементов, отличающиеся друг от друга только составом, вычисляются по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Свойства числа сочетаний можно представить следующим образом:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, \\ C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Пример 5. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми участниками должна быть сыграна партия?

Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, то есть представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно:

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{14!2!} = \frac{15 \times 16}{1 \times 2} = 120.$$

Сочетания с повторениями. Если в сочетаниях из n элементов по m некоторые из элементов или все могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются *сочетаниями с повторениями* из n элементов по m и вычисляются по формуле:

$$C_n^{-m} = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 6. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 фильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы?

Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок фильмов в комбинации 5 призов значения не имеет, и число вариантов представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по 5, определяемое по формуле:

$$C_{10}^{-5} = C_{10+5-1}^5 = \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 2002.$$

Геометрическая вероятность

Рассмотрим n – мерное вещественное пространство R^n . Пусть в какую-то ограниченную область $\Omega \subset R^n$ наудачу брошена точка. Слово «наудачу» означает, что в таком эксперименте все точки области Ω «равновозможны». В этом случае вероятность попадания точки в какую-то подобласть $A \subseteq \Omega$ определяется формулой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)},$$

где $V(A)$, $V(\Omega)$ – n – мерные объемы областей A и Ω соответственно. Здесь элементарными исходами называются точки множества Ω (которое играет роль пространства элементарных исходов), а благоприятствующими исходами – точки множества A .

Таким образом, $V(\Omega)$ – геометрическая мера (длина, площадь или объем) всей области, $V(A)$ – геометрическая мера той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

Пример 7. Точка брошена наудачу на отрезок $[0; 2]$. Какова вероятность попадания этой точки на интервал $[0,5; 1,4]$?

Решение. Здесь пространство элементарных исходов весь отрезок $\Omega [0; 2]$, а множество благоприятствующих исходов $A = [0,5; 1,4]$, при этом длины этих интервалов равны $l(\Omega) = 2$ и $l(A) = 0,9$. Поэтому вероятность попадания брошенной точки в указанный интервал равна:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0,9}{2} = 0,45.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 8. В урне находится 5 шаров, из которых 2 белых и 3 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Обозначим A интересующее нас событие:

$A = \{\text{появление белого шара}\}$

Общее число случаев $n = 5$; из них два благоприятны событию A : $m = 2$.
 $P(A) = 2/5$.

Пример 9. В урне 7 шаров: 4 – белых и 3 – черных. Из нее вынимаются (одновременно или последовательно) два шара. Найдите вероятность того, что они будут белыми.

Решение. Общее число случаев равно числу способов, какими можно выбрать 2 шара из 7:

$$n = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21,$$

а число случаев, благоприятных событию B – это число способов, какими можно выбрать 2 белых шара из 4:

$$m_B = C_2^4 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Отсюда

$$P(B) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Пример 10. В партии из K изделий M дефектных. Из партии выбирается для контроля k изделий ($k < K$). Найдите вероятность того, что среди них будет ровно m дефектных ($m < k$).

Решение. Общее число случаев $n = C_K^k$. Найдём m_D – число случаев, благоприятных событию $D = \{\text{ровно } m \text{ дефектных изделий в контрольной партии}\}$.

Найдём число способов, какими из M дефектных изделий можно выбрать m для контрольной партии; оно равно C_M^m . Но это ещё не все: к каждой комбинации дефектных изделий нужно присоединить комбинацию из $(k - m)$ доброкачественных, это можно сделать C_{K-M}^{k-m} способами. Каждая комбинация из m дефектных изделий может сочетаться с каждой комбинацией из $(k - m)$ доброкачественных, число тех и других комбинаций надо перемножить. Поэтому число благоприятных событию D случаев равно:

$$m_D = C_M^m \times C_{K-M}^{k-m}; \quad P(D) = C_M^m \cdot C_{K-M}^{k-m} / C_K^k.$$

Пример 11. Некто выбирает наугад 6 клеток «Спортлото» (6 из 49). Найдите вероятность того, что он правильно угадает из числа выигравших шести номеров:

$A = \{\text{ровно три}\},$

$B = \{\text{ровно четыре}\},$

$C = \{\text{ровно пять}\},$

$D = \{\text{все шесть}\}.$

Решение. Нетрудно убедиться, что задача по структуре полностью совпадает с предыдущей, если считать «дефектными» выигравшие номера, а «доброкачественными» – не выигравшие. Принимая $K = 49$, $M = 6$, а m – последовательно равным 3, 4, 5, 6, получим:

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 1,765 \cdot 10^{-2}, \quad P(B) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 9,686 \cdot 10^{-4},$$

$$P(C) = \frac{C_6^5 \cdot C_{43}^1}{C_{49}^6} \approx 1,845 \cdot 10^{-5}, \quad P(D) = \frac{C_6^6}{C_{49}^6} \approx 7,151 \cdot 10^{-8}.$$

Пример 12. Опыт состоит в одновременном (или последовательном) бросании двух монет. Найдите вероятность события $A = \{\text{хотя бы на одной монете выпадет герб}\}$.

Решение. Составим схему случаев; для этого назовем монеты: первая и вторая (если они бросаются последовательно, первой будет первая по времени, если одновременно, то, например, та, центр которой ляжет севернее). Случаями будут следующие события:

$B_1 = \{\text{на первой монете герб, на второй герб}\},$

$B_2 = \{\text{на первой монете решка, на второй решка}\},$

$B_3 = \{\text{на первой монете герб, на второй решка}\},$

$B_4 = \{\text{на первой монете решка, на второй герб}\}.$

Найдем $P(A)$. Из четырех случаев событию A благоприятны все, кроме B_2 , значит, $m_A = 3$ и $P(A) = 3/4$. Событию $A_3 = \{\text{герб и решка}\}$ благоприятны два последних случая B_3 и B_4 , откуда $P(A_3) = 2/4 = 1/2$, то есть событие A_3 вдвое вероятнее каждого из событий A_1 и A_2 .

Пример 13. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдите вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A) = 1/10$.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под случайным событием?
2. Перечислите виды событий.
3. Чему равно достоверное событие?
4. Как условно обозначается невозможное событие?
5. Как вычисляется вероятность элементарного события?

Задачи для самостоятельного решения

1. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

2. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найдите вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

3. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв – а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово «трос».

4. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найдите вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

5. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найдите вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

6. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

7. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найдите число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

8. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, меньшую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка не зависит от его расположения на числовой оси.

9. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

10. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a брошена монета радиусом r ($r < a/2$). Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата.

11. Преподаватель предлагает каждому из трех студентов задумать любое число от 1 до 10. Считая, что выбор каждым студентом любого числа из заданных равновозможен, найдите вероятность того, что у кого-то из троих задуманные числа совпадут.

12. Найдите вероятность того, что в восьмизначном числе ровно 4 цифры совпадают, а остальные различны.

13. Шестеро клиентов случайным образом обратились в 5 фирм. Найдите вероятность того, что хотя бы в одну фирму никто не обратился.

14. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 «счастливых» и 20 «несчастливых». Студенты подходят за билетами по очереди. У кого больше вероятность вытащить «счастливый» билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

15. Четыре человека вошли в лифт на первом этаже шестизэтажного дома. Найдите вероятности того, что все пассажиры выйдут: а) на шестом этаже; б) на одном и том же этаже; в) на разных этажах.

16. Семь человек вошли в лифт на первом этаже восьми этажного дома. Какова вероятность того, что на одном этаже вышли два человека, а остальные – на разных?

17. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

18. Найдите вероятность того, что в шестизначном номере 3 цифры совпадают, а остальные различны (считаем, что пятизначные номера могут начинаться с нуля).

19. В партии из 8 изделий 3 – высшего качества. Найдите вероятность того, что среди отобранных (без возвращения) четырех изделий ровно одно изделие высшего качества.

20. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность того, что они не будут бить одна другую?

21. Группа из 18 студентов пишет контрольную работу из трех вариантов (каждый – по 6 человек). Найдите вероятность того, что среди случайно выбранных пяти студентов есть писавшие все три варианта.

22. Группе из 10 человек для производственной практики предоставлено 6 мест в лаборатории № 1 и 4 места – в лаборатории № 2. Какова вероятность того, что при случайном распределении мест двое неразлучных друзей из этой группы попадут на практику в одну лабораторию?

23. В трех студенческих группах 72 человека (по 24 человека в группе – 12 юношей и 12 девушек). Наудачу выбраны 5 человек. Какова вероятность того, что среди них окажутся девушки из всех трех групп?

24. Работа каждого из четырех студентов заочного отделения может проверяться одним из четырех преподавателей. Какова вероятность того, что все четыре работы проверены разными преподавателями?

25. Известно, что телефонный звонок должен последовать от 11 часов до 11ч.30 мин. Какова вероятность того, что звонок произойдет в последние 10 минут указанного промежутка, если момент звонка случаен?

26. Найдите вероятность того, что в пятизначном числе имеются 2 четные цифры и 3 нечетные, при условии, что все они различны (считаем, что пятизначное число не может начинаться с нуля).

27. Точка брошена случайным образом на квадрат площадью 100 см^2 . Какова вероятность того, что координаты (x, y) этой точки отличаются одни от другой не более чем на 1 см?

28. Студент может добраться до факультета либо автобусом, интервал движения которого составляет 7 минут, либо троллейбусом, интервал движения которого – 10 минут. Найдите вероятность того, что студенту, пришедшему на остановку в случайный момент времени, придется ждать не более трех минут.

29. На удачу взяты два положительных числа X и Y , каждое из которых не превышает единицы. Найдите вероятность того, что сумма $X + Y$ не превышает 1, а произведение XY не меньше 0,09.

30. В точке C , положение которой на телефонной линии AB длиной 10 км равновозможное, произошел разрыв. Определите вероятность того, что точка C удалена от точки A , в которой находится ремонтная станция, на расстояние, не меньшее 1 км.

ЗАНЯТИЕ № 2

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель: освоить методы практического применения основных правил теории вероятностей

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие, заключающееся в том, что произойдет хотя бы одно из событий A или B (то есть либо событие A , либо событие B , либо A и B одновременно). События A и B называются *несовместными* (непересекающимися), если они не могут произойти одновременно.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности. *Условной вероятностью* события B при условии, что произошло событие A , называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A , причем $P(A) \neq 0$, обозначается символом $P(B|A)$. Таким образом, по определению

$$P(BA) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, P(A) \neq 0.$$

Вероятность $P(B)$, в отличие от условной, называется безусловной вероятностью.

Пример 1. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Решение. Введем события: A – появление шестерки на первой кости, B – на второй кости. Тогда $A + B$ – появление хотя бы одной шестерки

при бросании костей. События A и B совместные. По формуле находим $P = (A + B) = 1/6 + 1/6 - 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

Произведением (или пересечением) двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном появлении и события A , и события B .

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}).$$

Теорема умножения вероятностей принимает более простой вид, если события, образующие произведение, независимы.

Событие A называется *независимым* от события B , если его условная вероятность равна безусловной, то есть если выполняется равенство:

$$P(A|B) = P(A).$$

Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A . Таким образом, два события называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятность появления другого. Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B),$$

то есть вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 2. Надежность (то есть вероятность безотказной работы) прибора равна 0,7. Для повышения надежности данного прибора он дублируется $n - 1$ другими такими же приборами, соединенными параллельно. Сколько приборов надо взять, чтобы повысить его надежность до 0,95?

Решение. Вероятность выхода из строя всех приборов равна:

$$\underbrace{(1 - 0,7) \cdot (1 - 0,7) \cdot \dots \cdot (1 - 0,7)}_n = 0,3^n.$$

Следовательно, вероятность безотказной работы равна $1 - 0,3^n$. По условию $1 - 0,3^n \geq 0,95$. Отсюда: $0,3^n \leq 0,05$, $n \ln 0,3 \leq \ln 0,05$, $n \geq \ln 0,05 : \ln 0,3 \approx 2,488$, то есть $n \geq 3$.

На практике о независимости тех или иных событий судят из анализа условий опыта, считая независимыми события, между которыми нет причинно-следственных связей.

Понятие независимости может быть распространено на случай n событий. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются независимыми (или независимыми в совокупности), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.

Правило сложения и правило умножения вероятностей редко применяются порознь, обычно они применяются вместе. Наиболее типична следующая схема: событие A , вероятность которого требуется найти, представляется в виде суммы нескольких вариантов:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Каждый из вариантов представляется в виде произведения каких-то событий. Вероятность каждого варианта вычисляется по правилу умножения, затем вероятности вариантов складываются. Бывают и более сложные схемы, где вероятность каждого из событий, произведением которых образован вариант, в свою очередь вычисляется по правилу сложения и т.д.

Примеры решения типовых задач

Пример 3. Имеется две урны, в первой 2 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 2 черных. Из каждой урны вынимается по одному шару. Найдите вероятность того, что они будут одного и того же цвета.

Решение. Событие $A = \{\text{оба шара одного цвета}\}$ можно представить в виде суммы двух вариантов:

$$A_1 = \{\text{оба шара белые}\}; \quad A_2 = \{\text{оба шара черные}\}; \quad A = A_1 + A_2.$$

Каждый из вариантов есть произведение двух событий:

$$A_1 = B_1 \cdot B_2, \quad A_2 = C_1 \cdot C_2,$$

где $B_1 = \{\text{из первой урны вынут белый шар}\},$

$B_2 = \{\text{из второй урны вынут белый шар}\},$

$C_1 = \{\text{из первой урны вынут черный шар}\},$

$C_2 = \{\text{из второй урны вынут черный шар}\}.$

События B_1, B_2 между собой независимы; также и события C_1, C_2 . Применяя правило умножения для независимых событий, получим:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = (2/5) \cdot (4/6) = 4/15,$$

$$P(A_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = (3/5) \cdot (2/6) = 1/5.$$

Так как варианты A_1 и A_2 несовместны, то по правилу сложения:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 4/15 + 1/5 = 7/15.$$

Пример 4. В условиях предыдущего примера найдите вероятность того, что шары будут разных цветов: $D = \{\text{шары разных цветов}\}$.

Решение. Можно было бы, конечно, как в предыдущем примере, представить D в виде суммы двух вариантов:

$$D_1 = \{\text{из первой урны вынут белый шар, из второй – черный}\},$$

$$D_2 = \{\text{из первой урны вынут черный шар, из второй – белый}\},$$

но гораздо проще будет решить задачу, воспользовавшись результатами предыдущего примера. Действительно, событие D противоположно событию A предыдущего примера: $D = \bar{A}$, откуда $P(D) = 1 - P(A) = 8/15$.

Пример 5. Производятся три независимых выстрела по мишени; вероятности попадания в мишень при первом, втором, третьем выстреле равны соответственно p_1, p_2, p_3 . Найдите вероятность того, что в мишень произойдет ровно два попадания.

Решение. Событие $A = \{\text{ровно два попадания}\}$ представим в виде суммы трех несовместных вариантов:

$A = \{\text{попадание при первом, попадание при втором и промах при третьем выстреле}\} + \{\text{попадание при первом, промах при втором и попадание при третьем выстреле}\} + \{\text{промах при первом, попадание при втором и попадание при третьем выстреле}\}.$

Вероятности промаха при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $1 - p_1, 1 - p_2, 1 - p_3$. Применяя правило умножения для независимых событий и складывая вероятности вариантов, получим:

$$P(A) = p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 (1 - p_2) p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3.$$

Пример 6. В условиях предыдущего примера найдите вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. Можно было бы событие $C = \{\text{хотя бы одно попадание}\}$ представить в виде суммы трех вариантов: $C_1 = \{\text{ровно одно попадание}\}$; $C_2 = \{\text{ровно два попадания}\}$ и $C_3 = \{\text{все три попадания}\}$ и найти вероятность каждого из них подобно тому, как это было сделано выше.

Но гораздо проще будет от события C перейти к противоположному событию: $\bar{C} = \{\text{ни одного попадания}\}$.

Событие $\bar{C}$ есть произведение трех независимых событий: $C = \{\text{промах при первом выстреле}\} \{\text{промах при втором выстреле}\} \{\text{промах при третьем выстреле}\}$.

По правилу умножения для независимых событий имеем

$$P(\bar{C}) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3), \text{ откуда} \\ P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3).$$

Почему в данном примере оказалось выгодным перейти к противоположному событию $\bar{C}$? Потому что оно представляет собой только один вариант (все три промаха) вместо трех вариантов C_1, C_2, C_3 .

В связи с этим можно сформулировать одну практическую рекомендацию: если в данной задаче противоположное событие A распадается на меньшее число вариантов, чем интересующее нас A , то имеет смысл при вычислении вероятности переходить к противоположному событию.

Пример 7. Из колоды карт, содержащей 32 листа, вынимается наугад 4 карты. Найдите вероятность того, что среди них будет хотя бы один туз.

Решение. При нахождении вероятности события $A = \{\text{хотя бы один туз}\}$ явно выгоднее перейти к противоположному событию:

$$A = \{\text{ни одного туза}\} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4,$$

где $A_1 = \{\text{первая карта не туз}\},$

$A_2 = \{\text{вторая карта не туз}\},$

$A_3 = \{\text{третья карта не туз}\},$

$A_4 = \{\text{четвертая карта не туз}\}.$

События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы. По правилу умножения вероятностей имеем: $P(\bar{A}) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) P(A_4 | A_1 A_2 A_3)$. Тузов в колоде 4; не тузов $32 - 4 = 28$. Учитывая это, имеем:

$$P(\bar{A}) = (28/32) \cdot (27/31) \cdot (26/30) \cdot (25/29) \approx 0,568, \text{ откуда:} \\ P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,432.$$

Пример 8. В шкафу находится девять однотипных приборов. В начале опыта они все новые (ни разу не бывшие в эксплуатации). Для временной эксплуатации берут наугад три прибора, после эксплуатации их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в эксплуатации, ничем не отличается от нового. Такого рода операция производится три раза. Найдите вероятность того, что в результате трехкратного выбора и эксплуатации в шкафу останется хотя бы один новый прибор.

Решение. От события $A = \{\text{хотя бы один новый прибор}\}$ выгоднее перейти к противоположному: $\bar{A} = \{\text{ни одного нового прибора}\}$. Событие $\bar{A}$ может произойти одним-единственным способом: и первый раз, и второй, и третий из шкафа будут взяты новые приборы. Первый раз это обеспечено, поэтому:

$$P(\bar{A}) = 1 \cdot (6/9) \cdot (5/8) \cdot (4/7) \cdot (3/9) \cdot (2/8) \cdot (1/7) \approx 0,0028, \text{ откуда} \\ P(A) = 1 - 0,0028 \approx 0,997.$$

Итак, событие A имеет высокую вероятность 0,997 и может, пожалуй, считаться практически достоверным (предсказывая его, будем ошибаться примерно в 0,3 % случаев).

Пример 9. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) является дефектным. Для контроля из продукции завода выбирается наугад n изделий. При осмотре дефект, если он существует, обнаруживается с вероятностью p . Найдите вероятности следующих событий:

$A = \{\text{ни в одном из изделий не обнаружено дефекта}\};$

$B = \{\text{среди } n \text{ изделий ровно в двух обнаружен дефект}\};$

$C = \{\text{среди } n \text{ изделий не менее чем в двух обнаружен дефект}\}.$

Решение. Вероятность того, что в одном наугад взятом изделии обнаружен дефект, равна rp (r – вероятность того, что дефект есть, p – условная вероятность того, что дефект будет обнаружен при условии, что он есть); вероятность того, что дефект не обнаружен, равна $1 - rp$. По правилу умножения для независимых событий: $P(A) = (1 - rp)^n$.

Найдем вероятность события B . Оно распадается на столько вариантов, сколькими способами можно из n изделий выбрать два, в которых обнаружен дефект, то есть на $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ вариантов.

Вероятность каждого из них равна $(rp)^2(1 - rp)^{n-2}$; эти варианты несовместны, по правилу сложения:

$$P(B) = \frac{n(n-1)}{2} (rp)^2 (1 - rp)^{n-2}.$$

Чтобы найти вероятность события C , перейдем к противоположному событию:

$\bar{C} = \{\text{менее чем в двух изделиях обнаружен дефект}\}$, которое распадается на два варианта:

$\bar{C}_0 = \{\text{ни в одном изделии не обнаружено дефекта}\},$

$\bar{C}_1 = \{\text{ровно в одном изделии обнаружен дефект}\}.$

$$\bar{C} = \bar{C}_0 + \bar{C}_1$$

По правилу умножения: $P(\bar{C}_0) = P(A) = (1 - rp)^n$

По правилам умножения и сложения:

$$P(\bar{C}_1) = C_n^1 rp (1 - rp)^{n-1} = n rp (1 - rp)^{n-1}$$

Отсюда:

$$P(\bar{C}) = P(\bar{C}_0) + P(\bar{C}_1) = (1 - rp)^n + n rp (1 - rp)^{n-1}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (1 - rp)^n - n rp (1 - rp)^{n-1}$$

По правилу умножения для независимых событий $P(A) = p^n$.

Пример 2.10. По каналу связи передается 5 сообщений. Каждое из них (независимо от других) с вероятностью 0,2 искажается. Найдите вероятности следующих событий:

$A = \{\text{все сообщения будут переданы без искажений}\};$

$B = \{\text{все сообщения будут искажены}\};$

$C = \{\text{не менее двух сообщений будет искажено}\}.$

Решение. Вероятность того, что отдельное сообщение будет передано без искажений, равна $1 - 0,2 = 0,8$.

По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$$P(A) = 0,8^5 = 0,328; \quad P(B) = 0,2^5 \approx 0,00032.$$

(событие B можно считать практически невозможным). Чтобы найти $P(C)$, перейдем к противоположному событию:

$$\bar{C} = (\text{менее двух сообщений будет искажено}) = \bar{C}_0 + \bar{C}_1,$$

где $\bar{C}_0 = (\text{ни одно сообщение не будет искажено}),$

$\bar{C}_1 = (\text{ровно одно сообщение будет искажено}).$

Так как $\bar{C}_0 = A$, $P(\bar{C}_0) \approx 0,328$.

Событие $\bar{C}_1$ распадается на 5 несовместных вариантов (искажено может быть любое из 5 сообщений). Вероятность каждого варианта по правилу умножения равна $0,2 \cdot 0,8^4$; отсюда

$$P(\overline{C_1}) \approx 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 \approx 0,410,$$

$$P(\overline{C}) \approx 0,328 + 0,410 = 0,738,$$

$$P(C) \approx 1 - 0,738 = 0,262.$$

Контрольные вопросы

1. Чему равна вероятность суммы двух совместных событий?
2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
3. Что называют условной вероятностью?
4. Как записывается теорема умножения вероятностей на случай n событий?
5. Сформулируйте правило умножения вероятностей для независимых событий.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рабочий обслуживает три независимо работающих станка. Событие $A_i = \{i\text{-й станок в течение часа потребует наладки}\}$, $P(A_i) = 0,2$; $i = 1, 2, 3$. Выразите события, если наладки потребуют: а) ровно два станка; б) не более двух станков; в) хотя бы один станок. Найдите вероятность события .

2. Стрелок делает три выстрела, при этом он поражает цель с вероятностью 0,6 при одном выстреле. Событие $A_i = \{i\text{-я пуля попала в цель}\}$, $i = 1, 2, 3$. Выразите события: а) было хотя бы одно попадание; б) ровно одно попадание; в) не менее двух попаданий. Найдите вероятность события (в).

3. В коробке 4 детали. Мастер извлекает детали до тех пор, пока не обнаружит пригодную. Событие $A_i = \{i\text{-я извлеченная деталь является годной}\}$, $P(A_i) = 0,9$, $i = 1, 2, 3, 4$. Выразите события, состоящие в том, что мастер сделал: а) ровно одно извлечение; б) ровно два извлечения; в) не менее двух извлечений. Найдите вероятность события (б).

4. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найдите выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события; б) хотя бы одно из событий; в) хотя бы два события; г) два и только два события; д) ровно одно событие; е) ни одно событие не произошло; ж) не более двух событий.

5. Прибор состоит из трех блоков первого типа и четырех блоков второго типа. Событие $A_i = \{\text{исправен } i\text{-й блок первого типа}\}$, $i = 1, 2, 3$, $B_j = \{\text{исправен } j\text{-й блок второго типа}\}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее трех блоков второго типа. Найдите выражение для события C , которое соответствует работающему состоянию прибора.

6. В пакетике 4 красных, 5 желтых и 6 зеленых леденцов. Найдите вероятность наудачу вынуть подряд 3 конфеты одного цвета.

7. В партии из 20 изделий 4 бракованных. Найдите вероятность того, что в выборке из 5 изделий не более одного бракованного.

8. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли 6 человек. Для каждого из них равновероятен выход на любом из восьми этажей. Известно, что все шестеро вышли на разных этажах. При этом условии найдите вероятность того, что на первых трех этажах вышли два пассажира.

9. Трое пассажиров сели в поезд, случайно выбрав любой из шести вагонов. Какова вероятность того, что хотя бы один из них сядет в первый вагон, если известно, что люди сели в разные вагоны?

10. В ящике 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что синий шар не вынут?

11. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найдите вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

12. Двое равносильных шахматистов играют 4 партии. Найдите вероятность того, что победил первый, если известно, что каждый выиграл хотя бы один раз.

13. В лифт на цокольном этаже вошли 5 человек. Считая для каждого пассажира равновероятным выход на любом из девяти этажей, найти вероятность того, что двое выйдут на одном этаже, а остальные – на разных.

14. Известно, что в пятизначном номере телефона все цифры разные. Какова вероятность при этом условии, что среди них есть ровно одна четная (ноль считаем четной цифрой, телефонный номер может начинаться с нуля)?

15. Пять человек случайным образом (независимо друг от друга) выбирают любой из 7 вагонов поезда. Известно, что какие-то 2 вагона остались пустыми. При этом условии найдите вероятность того, что первый и второй вагоны заняты.

16. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Извлечены 6 шаров (с возвращением). Известно, что среди них есть белые шары. При этом условии найдите вероятность того, что среди них также будет не менее двух черных шаров.

17. Семь пассажиров случайным образом выбирают один из девяти вагонов поезда. Известно, что они сели в разные вагоны. При этом условии найдите вероятность того, что в первых трех вагонах поезда будут ехать два человека.

18. Пять шаров распределены по трем ящикам. При условии, что пустых ящиков нет, найдите вероятность того, что в первом ящике лежит один шар.

19. В четырех группах 100 студентов (по 25 человек в каждой). Для участия в олимпиаде отобрано 5 человек. Какова вероятность того, что среди них окажутся представители всех четырех групп?

20. Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы на 95 % быть уверенным в том, что хотя бы при одном бросании появится «шестерка»?

21. Известно, что в пятизначном номере телефона все цифры разные. Найдите вероятность того, что среди них есть цифры 1 и 2.

22. Прибор состоит из элементов, надежность каждого из которых равна $p = 0,98$. Выход из строя каждого из элементов равносильен выходу из строя прибора в целом. Не больше какого числа n элементов должно быть в приборе для того, чтобы надежность прибора не стала меньше, чем 0,9?

23. Производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с какой-то вероятностью; для i -го опыта эта вероятность равна p_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Задан ряд вероятностей: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Найдите вероятность R_1 того, что событие A появится хотя бы один раз.

24. Управляющие роботом команды искажаются из-за помех в канале связи (надежность канала связи 0,95) и, независимо от этого, из-за неисправности системы управления (надежность системы управления 0,90), причем данные два типа искажений не компенсируют, а лишь усиливают друг друга. Какова вероятность того, что робот не выполнит команды?

25. Синоптики Аляски и Чукотки независимо друг от друга не предсказывают погоду («ясно – пасмурно») в Беринговом проливе, ошибаясь с вероятностями 0,1 и 0,3 соответственно. Их предсказания на завтра совпали. Какова вероятность того, что эти предсказания ошибочны?

ЗАНЯТИЕ № 3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ

Цель: освоить приемы решения задач с использованием формул полной вероятности и Байеса

Формула полной вероятности

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса.

Теорема. Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого, наблюдаемого в опыте события A имеет место формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

В формуле события $H_1, H_2, \dots, H_n$ обычно называют гипотезами: они исчерпывают все возможные предположения (гипотезы) относительно исходов как бы первого этапа опыта, событие A – один из возможных исходов второго этапа.

Пример 1. Трое преподавателей принимают экзамен в группе из 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй – 3, а третий – 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40 %, у второго – только 10 %, зато у третьего – 70 %. Найдите вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Решение. Обозначим H_1, H_2, H_3 – гипотезы, состоящие в том, что слабо подготовившийся студент отвечал первому, второму и третьему экзаменатору соответственно. По условию задачи:

$$P(H_1) = 6/30 = 0,2; \quad P(H_2) = 3/30 = 0,1; \quad P(H_3) = 21/30 = 0,7.$$

Пусть событие A – слабо подготовившийся студент сдал экзамен. Тогда вновь в силу условия задачи:

$$P(A/H_1) = 0,4; \quad P(A/H_2) = 0,1; \quad P(A/H_3) = 0,7.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,58.$$

Формула Байеса

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса или теорема гипотез. Она позволяет переоценить вероятности гипотез H_i , принятых до опыта и называемых априорными (доопытные) по результатам уже проведенного опыта, то есть найти условные вероятности $P(H_i|A)$, которые называют апостериорными (послеопытные).

Теорема. Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Тогда условная вероятность события $H_k (k = \overline{1, n})$ при условии, что событие A произошло, задается формулой, которая называется формулой Байеса:

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A | H_k)}{P(A)},$$

где $P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n)$ – формула полной вероятности.

Пример 2. Прибор содержит две микросхемы. Вероятность выхода из строя в течение 10 лет первой микросхемы равна 0,07, а второй – 0,10. Известно, что из строя вышла одна микросхема. Какова вероятность того, что вышла из строя первая микросхема?

Решение. A – вышла из строя одна микросхема, H_0 – отказали обе, H_1 – отказала первая микросхема, H_2 – отказала вторая, H_3 – обе не отказали. Тогда:

$$P(H_0) = 0,07 \cdot 0,1 = 0,007, P(H_1) = 0,063, P(H_2) = 0,093, P(H_3) = 0,837.$$

(контроль: $\sum_{i=0}^3 P(H_i) = 1$).

$$P(A|H_0) = 0, P(A|H_1) = 1, P(A|H_2) = 1, P(A|H_3) = 0. \text{ Значит, } \\ P(A) = 0,156 \text{ и } P(H_1|A) \approx 0,404.$$

Контрольные вопросы

1. Какие события образуют полную группу?
2. Сформулируйте теорему полной вероятности.
3. Какие события называют гипотезами?
4. Что является следствием формулы полной вероятности?
5. Дайте определение формулы Байеса.

Примеры решения типовых задач

Пример 3. Прибор может работать в трех режимах: 1) нормальном, 2) форсированном и 3) недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 60 % случаев работы прибора, форсированный – в 30 % и недогруженный – в 10 %. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени t) для нормального режима равна 0,8, для форсированного – 0,5, для недогруженного – 0,9. Найдите полную (с учетом случайности условий) надежность прибора.

Решение. Гипотезы: H_1 = нормальный режим,

H_2 = форсированный режим,

H_3 = недогруженный режим.

$$P(H_1)=0,6; P(H_2)=0,3; P(H_3)=0,1.$$

$A = \{\text{безотказная работа прибора}\}$

$$P(A|H_1) = 0,8; P(A|H_2) = 0,5; P(A|H_3) = 0,9.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Пример 4. Имеется две партии однородных изделий; первая состоит из N изделий, среди которых n дефектных; вторая – из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берут случайным образом k изделий, из второй / изделий ($k < N; l < M$) и перемешивают между собой. Из полученной партии $k+l$ изделий берут наугад одно. Найдите вероятность того, что взятое изделие будет дефектным.

Решение. $A = \{\text{взятое изделие дефектно}\}$. Гипотезы:

$H_1 = \{\text{изделие принадлежит первой партии}\},$

$H_2 = \{\text{изделие принадлежит второй партии}\},$

$$P(H_1) = k/(k+l); P(H_2) = l/(k+l).$$

Условные вероятности события A :

$$P(A | H_1) = n/N; \quad P(A | H_2) = m/M.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = [k/(k+l)] \cdot (n/N) + [l/(k+l)] \cdot m/M.$$

Пример 5. Завод изготавливает изделия, каждое из которых независимо от других с вероятностью p имеет дефект. В цехе имеется три контролера; изделие осматривается только одним из них (с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим). Вероятность обнаружения дефекта, если он имеется, для 1, 2 и 3 контролеров равна соответственно p_1, p_2, p_3 . При обнаружении дефекта изделие бракуется. Если изделие не было забраковано в цехе, то оно отправляется на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0 ; изделие, дефект которого обнаружен, бракуется. Найдите вероятность того, что изделие будет забраковано.

Решение. Событие $A = \{\text{изделие будет забраковано}\}$. Здесь удобно перейти к противоположному событию:

$$\bar{A} = \{\text{изделие не будет забраковано}\}.$$

Представим событие $\bar{A}$ как сумму двух несовместных вариантов:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2,$$

где $\bar{A}_1 = \{\text{изделие не имеет дефекта}\},$

$\bar{A}_2 = \{\text{изделие имеет дефект, но он не обнаружен ни в цехе, ни в ОТК завода}\}.$

$$P(\bar{A}_1) = 1 - p.$$

Найдем $P(\bar{A}_2)$. Для этого надо умножить вероятность того, что изделие имеет дефект, на вероятность того, что этот дефект не будет

обнаружен ни в цехе, ни в ОТК. Вероятность того, что имеющийся дефект не будет обнаружен в цехе, по формуле полной вероятности равна:

$$(1/3) - [(1 - p_1) + (1 - p_2) + (1 - p_3)].$$

Вероятность того, что имеющийся дефект после цехового осмотра не будет обнаружен в ОТК, равна $1 - p_0$. По правилу умножения вероятностей:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_2) &= p[1 - (1/3)(p_1 + p_2 + p_3)] \cdot (1 - p_0); \\ P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) = 1 - p + p[1 - (1/3)(p_1 + p_2 + p_3)] \cdot (1 - p_0); \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A}). \end{aligned}$$

Пример 6. Цех завода производит определенного вида изделия; любое из них, независимо от других, с вероятностью p имеет дефект. Каждое изделие осматривается контролером, который обнаруживает дефект, если он имеется, с вероятностью p_1 и не обнаруживает с вероятностью $1 - p_1$. Изделие с обнаруженным дефектом бракуется. Кроме того, иногда контролер допускает ошибку и бракует доброкачественное изделие; это происходит с вероятностью p_2 . За смену контролер осматривает N изделий. Найдите вероятность того, что хотя бы одно из них будет квалифицировано им неправильно: или, будучи дефектным, отнесено к доброкачественным, или наоборот (считается, что результаты осмотров отдельных изделий независимы).

Решение. Сначала найдем вероятность события $A = \{\text{неправильная квалификация одного отдельного изделия}\}$ по формуле полной вероятности. Гипотезы:

$$H_1 = \{\text{изделие имеет дефект}\},$$

$$H_2 = \{\text{изделие не имеет дефекта}\}.$$

$$P(H_1) = p; P(H_2) = 1 - p.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A|H_1) = 1 - p_1; P(A|H_2) = p_2.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = p(1 - p_1) + (1 - p)p_2$$

Теперь найдем вероятность события $B = \{\text{хотя бы одно из } N \text{ изделий будет квалифицировано неправильно}\}$.

Гораздо проще будет найти вероятность противоположного события: $\bar{B} = \{\text{все } N \text{ изделий будут квалифицированы правильно}\}$.

Событие $\bar{B}$ есть произведение N независимых событий, каждое из которых состоит в том, что отдельное изделие квалифицировано правильно. Вероятность этого равна $1 - P(A) = 1 - [p(1 - p_1) + p_2(1 - p)]$. По правилу умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(B) = \{1 - [p(1 - p_1) + p_2(1 - p)]\}^N, \text{ откуда} \\ P(B) = 1 - P(\bar{B}).$$

Пример 7. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов и может работать в одном из двух режимов: нормальном и неблагоприятном. Нормальный режим наблюдается в 80 % случаев эксплуатации прибора; неблагоприятный – в 20 % случаев. Надежность (вероятность безотказной работы) – 0,6. При выходе из строя (отказе) узла происходит автоматическое и безотказное переключение на дублера. Найдите полную вероятность $P(A)$ безотказной работы прибора.

Решение. Гипотезы:

$H_1 = \{\text{прибор работает в нормальном режиме}\},$

$H_2 = \{\text{прибор работает в неблагоприятном режиме}\}.$

$$P(H_1) = 0,8; P(H_2) = 0,2.$$

В нормальном режиме вероятность безотказной работы прибора:

$$P_{\text{нор}} = 1 - (1 - 0,9)^2 = 0,99,$$

в неблагоприятном:

$$P_{\text{неб}} = 1 - (1 - 0,6)^2 = 0,84.$$

Полная вероятность безотказной работы прибора:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,99 + 0,2 \cdot 0,84 = 0,792 + 0,168 = 0,960.$$

Пример 8. Сообщение может передаваться по одному из каналов связи, находящихся в различных состояниях; из них n_1 каналов в отличном состоянии, n_2 – в хорошем, n_3 – в посредственном и n_4 – в плохом

$(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n)$. Вероятность правильной передачи сообщения для разного вида каналов равна соответственно p_1, p_2, p_3, p_4 . Для повышения его достоверности сообщение передается два раза по одному и тому же каналу, который выбирается наугад. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз оно будет передано правильно.

Решение.

$A = \{\text{хотя бы один раз сообщение передано правильно}\}.$

Переходим к противоположному событию:

$\bar{A} = \{\text{оба раза сообщение передано неправильно}\}.$

Сделаем ряд гипотез о том, по какому типу канала были переданы сообщения:

$H_1 = \{\text{по каналу в отличном состоянии}\},$

$H_2 = \{\text{по каналу в хорошем состоянии}\},$

$H_3 = \{\text{по каналу в посредственном состоянии}\},$

$H_4 = \{\text{по каналу в плохом состоянии}\}.$

$$P(H_1) = n_1/n; P(H_2) = n_2/n; P(H_3) = n_3/n; P(H_4) = n_4/n.$$

Полная вероятность события $\bar{A}$:

$$P(\bar{A}) = (1/n)[n_1(1-p_1)^2 + n_2(1-p_2)^2 + n_3(1-p_3)^2 + n_4(1-p_4)^2],$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Пример 9. Производится посадка самолета на аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, пользуясь помимо приборов еще и визуальным наблюдением. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1 . Если аэродром затянут низкой облачностью, то летчик сажает самолет, ориентируясь только по приборам. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_2 ; $p_2 < p_1$. Приборы, обеспечивающие слепую посадку, имеют надежность (вероятность безотказной работы) ρ .

При наличии низкой облачности и отказавших приборах слепой посадки вероятность благополучной посадки равна p_3 ; $p_3 < p_2$. Статистика показывает, что в $\kappa\%$ случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью. Найдите полную вероятность события $A = \{\text{благополучная посадка самолета}\}.$

Решение. Гипотезы:

$H_1 = \{\text{низкой облачности нет}\},$

$H_2 = \{\text{низкая облачность есть}\}.$

$$P(H_1) = (100-k)/100; P(H_2) = (k/100); P(A|H_1) = p_1.$$

Условную вероятность $P(A|H_2)$ снова найдем по формуле полной вероятности с гипотезами:

$H'_1 = \{\text{приборы слепой посадки действуют}\},$

$H'_2 = \{\text{приборы слепой посадки отказали}\},$

$$P(H'_1) = \wp; P(H'_2) = 1 - \wp.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A|H_2) = \wp \cdot p_2 + (1 - \wp) p_3, \text{ откуда}$$

$$P(A) = \frac{100-k}{100} p_1 + \frac{k}{100} [\wp p_2 + (1-\wp) p_3].$$

Пример 10. По объекту производится три одиночных (независимых) выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для вывода объекта из строя заведомо достаточно трех попаданий; при двух попаданиях он выходит из строя с вероятностью 0,6; при одном – с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что в результате трех выстрелов объект будет выведен из строя.

Решение. $A = \{\text{объект выведен из строя}\}.$ Гипотезы:

$H_1 = \{\text{в объект попал один снаряд}\},$

$H_2 = \{\text{в объект попало два снаряда}\},$

$H_3 = \{\text{в объект попало три снаряда}\}.$

Находим вероятности гипотез. Событие H_1 представим в виде суммы трех несовместных вариантов:

$$H_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{первый выстрел попал} \\ \text{второй и третий не} \\ \text{попали} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{второй выстрел попал} \\ \text{первый и третий не} \\ \text{попали} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{третий выстрел попал} \\ \text{второй и первый не} \\ \text{попали} \end{array} \right\}.$$

Применяя правила сложения и умножения вероятностей, имеем:

$$P(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36.$$

Аналогично,

$$P(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,41;$$

$$P(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$$P(A|H_1) = 0,2; \quad P(A|H_2) = 0,6; \quad P(A|H_3) = 1,0.$$

По формуле полной вероятности $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$ находим:

$$P(A) = 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1,0 = 0,458.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Брошены три кубика. Какова вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет «шестерка», если известно, что на всех кубиках выпали разные грани?

2. Фирма участвует в четырех проектах, каждый из которых может закончиться неудачей с вероятностью 0,1. В случае неудачи одного проекта вероятность разорения фирмы равна 20 %, двух – 50 %, трех – 70 %, четырех – 90 %. Определите вероятность разорения фирмы.

3. Два аудитора проверяют 10 фирм (по 5 каждый), в двух из которых допущены нарушения. Вероятность обнаружения нарушений первым аудитором равна 80 %, вторым – 90 %. Найдите вероятность того, что обе фирмы-нарушителя будут выявлены.

4. В первой урне 1 белый и 3 черных шара, во второй – 2 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, а затем один шар перекладывают из второй урны в первую. После этого из первой урны вынули один шар. Какова вероятность того, что он белый?

5. Прибор укомплектован двумя независимыми деталями, вероятность выхода из строя которых в течение года равна 0,1 и 0,2 соответственно. Если детали исправны, то прибор работает в течение года с вероятностью 0,99. Если выходит из строя только первая деталь, то прибор работает с вероятностью 0,7, а если только вторая – с вероятностью 0,8. Если выходят

из строя обе детали, прибор будет работать с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что прибор будет работать в течение года?

6. Электроэнергия поступает в город по трем линиям, каждая из которых может быть отключена с вероятностью 0,1. Если отключается одна электролиния, город испытывает недостаток электроэнергии с вероятностью 0,2. Если отключены две электролинии, недостаток электроэнергии ощущается с вероятностью 0,5. Если же отключены все три электролинии, то вероятность недостатка электроэнергии равна единице. Какова вероятность того, что в день проверки город испытывает недостаток электроэнергии?

7. Фирма нарушает закон с вероятностью 0,25. Обычно аудитор обнаруживает нарушения с вероятностью 0,75. Однако в данном случае проведенная им проверка нарушений не выявила. Найдите вероятность того, что они на самом деле есть.

8. Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0,2. В течение года выходит из строя 75 % изделий со скрытыми дефектами и 15 % – без дефектов. Найдите вероятность того, что изделие имело скрытые дефекты, если оно вышло из строя в течение года.

9. Из урны, где было 4 белых и 6 черных шаров, потерян один шар неизвестного цвета. После этого из урны извлечены (без возвращения) 2 шара, оказавшиеся белыми. При этом условии найдите вероятность того, что потерян был черный шар.

10. Производственный брак составляет 4 %. Каждое изделие равновероятным образом поступает к одному из двух контролеров, первый из которых обнаруживает брак с вероятностью 0,92, второй – 0,98. Какова вероятность того, что признанное годным изделие является бракованным?

11. В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. При этом 90 % пачек были признаны удовлетворительными – они содержали только 1 % неправильно оформленных накладных. Остальные 10 % накладных были признаны неудовлетворительными, так как содержали уже 5 % неправильно оформленных накладных. Какова вероятность того, что взятая наугад накладная оказалась неправильно оформленной?

12. Известно, что проверяемая фирма может уходить от налогов с вероятностью 40 %, выбирая для этого одну из трех схем (равновероятно). Найдите вероятность того, что фирма уходит от налогов по третьей схеме, если по первым двум нарушениям не обнаружено.

13. Стрелок А поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок Б – с вероятностью 0,5 и стрелок В – с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени, но только две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок В в мишень или нет?

14. Имеются три партии деталей по 20 в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15 и 10. Из наудачу выбранной партии извлекают деталь, которая оказывается стандартной. Деталь возвращают в ту же партию и вторично из нее же наугад опять извлекают деталь, которая тоже оказывается стандартной. Найдите вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

15. По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0,72 и 0,25. Из-за помех $1/6$ часть A -сигнала искажается и принимается как B -сигналы, а $1/7$ часть переданных B -сигналов принимается как A -сигналы. Определить вероятность того, что на приемном пункте будет принят A -сигнал. Известно, что принят A -сигнал. Какова вероятность того, что он же и был передан?

16. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3 . Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы p_4 , для второй – p_5 , для третьей – p_6 . Какова вероятность того, что пассажир приобретет билет?

17. Испытывается прибор, состоящий из двух узлов – 1 и 2. Надежности (вероятности безотказной работы за время τ) узлов 1 и 2 известны и равны $p_1 = 0,8$; $p_2 = 0,9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени τ выяснилось, что прибор неисправен. Найдите с учетом этого вероятности гипотез: $H_1 = \{\text{неисправен только первый узел}\}$; $H_2 = \{\text{неисправен только второй узел}\}$; $H_3 = \{\text{неисправны оба узла}\}$.

18. Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов – по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?

19. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что: а) двигатель начнет работать при третьем включении зажигания; б) для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз.

20. Вероятность того, что студент сдаст экзамен по дисциплине A , равна 0,8. Условная вероятность того, что студент сдаст экзамен по дисциплине B , равна 0,5 при условии, что он экзамен по дисциплине A сдаст; 0,6 при условии, что не сдаст. Найдите вероятность того, что экзамен хотя бы по одной из двух дисциплин студент: а) сдаст; б) не сдаст.

21. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов – K_2 и K_3 . Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

22. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98, 88 и 92 % случаев. Найдите вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

23. Из 40 билетов студент выучил только 30. Каким номером выгоднее ему зайти на экзамен?

ЗАНЯТИЕ № 4

СХЕМА ПОВТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Цель: сформировать навыки использования схемы Бернулли для практического применения теории вероятностей.

Схема Бернулли

С понятием «независимых событий» связано понятие «независимых испытаний, опытов». Несколько опытов называются независимыми, если их исходы представляют собой независимые события. Если проводится несколько испытаний, то есть опыт выполняется при данном комплексе условий многократно (такое явление называется «последовательностью испытаний», причем вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний и остается одинаковой, то такие испытания называются независимыми. При практическом применении теории вероятностей часто используется стандартная схема, называемая схемой Бернулли или схемой независимых испытаний.

Последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (его называют успехом) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\bar{A}$ (его называют неудачей) с вероятностью $P(\bar{A}) = 1-p = q$, называется схемой Бернулли. Например, при обследовании n изделий на предмет годности событие A – деталь годная (успех), событие $\bar{A}$ – деталь бракованная (неудача). Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз ($0 \leq m \leq n$).

Теорема. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , а вероятность его не появления равна $q = 1-p$, то вероятность того, что событие произойдет m раз определяется формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее n раз; б) более n раз; в) не менее n раз; г) не более n раз – находят соответственно по формулам:

$$\begin{aligned}
&P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n-1); \\
&P_n(n+1) + P_n(n+2) + \dots + P_n(n); \\
&P_n(n) + P_n(n+1) + \dots + P_n(m); \\
&P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(n).
\end{aligned}$$

Если в каждом из независимых испытаний вероятности наступления события A разные, то вероятность того, что событие A наступит m раз в n опытах, равна коэффициенту при m -й степени многочлена:

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z) \cdot (q_2 + p_2 z) \cdot \dots \cdot (q_n + p_n z),$$

где $\varphi_n(z)$ – производящая функция.

Если в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно и только одно из k событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$, то вероятность того, что в этих опытах событие A_1 появится m_1 раз, событие A_2 – m_2 раз, а событие A_k – m_k раз, равно:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k},$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Вероятности, вычисленные по этой формуле, называются полиномиальным распределением.

Наивероятнейшее число успехов

Число m_0 , при котором биномиальные вероятности $P_n(m)$ достигают своего максимального значения (при фиксированном числе испытаний n), обычно называют наиболее вероятным (наивероятнейшим) числом успехов. Справедливо следующее утверждение. Наивероятнейшее число успехов m_0 в серии из n независимых испытаний Бернулли (с вероятностью успеха p в одном испытании) определяется соотношением $np - q \leq m_0 \leq np + q$, причем:

- 1) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число m_0 ;
- 2) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа $m_0 = np - q, m_0 = np + q$;
- 3) если np – целое число, то наивероятнейшее число $m_0 = np$.

Пример 1. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4 % нестандартных. Найдите вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две детали будут нестандартными. Каково наивероятнейшее число нестандартных деталей в рассматриваемой выборке из 30 деталей и какова его вероятность?

Решение. Здесь опыт заключается в проверке каждой из 30 деталей на качество. Событие A – появление нестандартной детали; его вероятность $P = 0,04$, тогда $q = 0,96$. Отсюда по формуле Бернулли находим:

$$P_{30}(2) = C_{30}^2 (0,04)^2 (0,96)^{28} \approx 0,222.$$

Наивероятнейшее число нестандартных деталей в данной выборке вычисляется

$$k_0 = [30 \cdot 0,04 + 0,04] = [1,24] = 1,$$

а его вероятность равна:

$$P_{30}(1) = C_{30}^1 \cdot 0,04^1 (0,96)^{29} \approx 0,367.$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли при больших значениях n и m вызывают большие трудности, так как это связано с громоздкими вычислениями. Так, при $n = 200$, $m = 116$, $p = 0,72$ формула Бернулли принимает вид:

$$P_{200}(116) = C_{200}^{116} \cdot (0,72)^{116} \cdot (0,28)^{84}.$$

Подсчитать результат практически невозможно. Возникает необходимость в отыскании приближенных формул для вычисления $P_n(m)$, обеспечивающих необходимую точность. Такие формулы дают нам предельные теоремы. Они содержат асимптотические формулы, которые при больших значениях испытаний дают сколь угодно малую относительную погрешность.

Рассмотрим три предельные теоремы для вычисления биномиальной вероятности $P_n(m)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Пуассона. Если число испытаний неограниченно увеличивается ($n \rightarrow \infty$) и вероятность p наступления события A в каждом испытании неограниченно уменьшается ($p \rightarrow 0$), но так, что их произведение является

постоянной величиной вероятность ($np = \text{const} = \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ удовлетворяет предельному равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Формула Пуассона находит применение в теории массового обслуживания при $n \geq 50$, и при $np \leq 10$.

Пример 2. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованных детали? Какова вероятность обнаружить не менее трех бракованных деталей?

Решение. Имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» $p=0,005$. Применяя пуассоновское приближение с $\lambda = np = 5$, получаем

$$\begin{aligned} P_{1000}(3) &= \frac{5^3}{3!} e^{-5}, \quad P_{1000}(m \geq 3) = 1 - P_{1000}(m < 3) = \\ &= 1 - [P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)] \approx 1 - \sum_{m=0}^2 \frac{5^m}{m!} e^{-5} \end{aligned}$$

и по таблице (для значений функции $P_n(m; \lambda)$) находим:

$$P_{1000}(3) \approx 0,14; \quad P_{1000}(m \geq 3) \approx 0,875.$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа. В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю, для вычисления биномиальных вероятностей используют теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число независимых испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Функция $\varphi(x)$ называется функцией Гаусса, она четная и для положительных значений x составлена таблица ее значений.

Пример 3. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p = 0,75$. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень 80 раз.

Решение. Здесь $n = 100$, $m = 8$, $p = 0,75$, $q = 0,25$. Найдём:

$$x = \frac{80 - 100 \times 0,75}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} = 1,16$$

и по таблице определяем $\varphi(x) = 0,2059$, тогда искомая вероятность равна:

$$P_{10}(8) = \frac{0,2059}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} = 0,048.$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, т.е. $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ или $P_n(k_1; k_2)$, используют интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \text{нормированная функция Лапласа.}$$

Функция $\Phi_0(x)$ равна 0 при $x = 0$ и является нечетной. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ для всех x , то есть она симметрична относительно $x = 0$. При $x \geq 5$ можно считать, что $\Phi_0(x) = 0,5$. Для функции $\Phi_0(x)$ составлены специальные таблицы при положительных значениях аргумента.

Наряду с нормированной функцией Лапласа используют функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

называемую также функцией Лапласа.

Для нее справедливо равенство $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$; она связана с функцией $\Phi_0(x)$ формулой $\Phi(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$.

Пример 4. Вероятность появления события A в каждом из 210 независимых испытаний равна 0,7. Найдите вероятность того, что событие A появится не менее 150 раз.

Решение. Находим:

$$x_2 = \frac{210 - 210 \cdot 0,7}{\sqrt{210 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 9,48, \quad x_1 = \frac{150 - 210 \cdot 0,7}{\sqrt{210 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = 0,45.$$

Тогда $P(150 \leq m \leq 210) = \Phi_0(9,48) - \Phi_0(0,45) = 0,5 - 0,1736 = 0,3264$.

Примеры решения типовых задач

Пример 5. В комнате горит 5 лампочек, каждая из которых в течение месяца может перегореть с вероятностью равной 0,3. Найдите вероятность того, что в течение месяца перегорит: 1) ровно три лампочки; 2) хотя бы одна лампочка.

Решение. $p = 0,3$; $q = 1 - 0,3 = 0,7$; $n = 5$; X – случайная величина: число перегоревших лампочек за месяц.

$$1) P(x=3) = C_5^3 (0,3)^{0,3} \cdot (0,7)^2 = 0,132$$

$$2) P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - 0,7^5 = 0,832$$

$$A = P(x \geq 1), \quad \bar{A} = P(x=0) \rightarrow P(x \geq 1) = 1 - P(x=0)$$

$$A = 1 - \bar{A}$$

$$M(x) = np = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$D(x) = npq = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 1,05.$$

Пример 6. Пусть X и Y – число «успехов» и «неуспехов» в 100 опытах, проводимых по схеме Бернулли. Вероятность «успеха» в одном опыте равна 1/2. Сравнить $M(X)$ и $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$.

Решение. Для определенности будем считать, что под «успехом» в одном опыте понимается появление некоторого случайного события A , а,

соответственно, «неуспех» состоит в том, что происходит событие $\bar{A}$. Тогда для случайной величины X по определению получаем $X \sim Bi(100; 1/2)$, где $n = 100, p = P(A) = 1/2$.

Для того чтобы получить закон распределения случайной величины Y поступим следующим образом: назовем теперь «успехом» в опыте появление события $\bar{A}$, а «не успехом» – событие A . В этом случае Y – число «успехов» в $n = 100$ опытах, а вероятность «успеха» теперь

$$q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = 1/2.$$

Таким образом, $Y \sim Bi(100; 1/2)$. После этого решение задачи получается

$$M(X) = M(Y), D(X) = D(Y).$$

Пример 7. Космические частицы, попадающие в спутник, образуют поле с плотностью λ (частица/м²). Агрегат спутника, находящийся в поле частиц, занимает площадь S (м²). Для выхода из строя агрегата заведомо достаточно попадания в него двух частиц; при попадании одной частицы он выходит из строя с вероятностью p . Найдите вероятность события $A = \{\text{выход агрегата из строя}\}$.

Решение. Находим среднее число попадающих в агрегат частиц:

$$a = \lambda S.$$

Найдем вероятность выхода агрегата из строя по формуле полной вероятности с гипотезами:

$$H_1 = \{\text{в агрегат попала одна частица}\},$$

$$H_2 = \{\text{в агрегат попало не менее двух частиц}\}.$$

По закону Пуассона

$$P(H_1) = \lambda S e^{-\lambda S};$$

$$P(H_2) = R_2 = 1 - P_0 - P_1 = \bar{R}(1, \lambda S) = 1 - e^{-\lambda S} (1 + \lambda S);$$

$$P(A|H_1) = p; P(A|H_2) = 1;$$

по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \lambda S p e^{-\lambda S} + 1 - e^{-\lambda S} (1 + \lambda S).$$

Пример 8. Случайная величина $X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda = 2$.

Найдите: а) $P\{X < M(X)\}$; б) наиболее вероятное значение k^* случайной величины X и $P\{X = k^*\}$; в) $P\{X > 0\}$; г) $M(X^2)$.

Решение. а) По формуле связи математического ожидания с параметром a закона распределения $\Pi(\lambda)$ имеем $M(X) = \lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{X < M(X)\} &= P\{X < 2\} = P(\{X = 0\} + \{X = 1\}) = \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{a^0}{0!} e^{-a} + \frac{a^1}{1!} e^{-a} = (a + 1)e^{-a} = 3e^{-2}; \end{aligned}$$

б) Согласно свойству 3 распределения Пуассона, наиболее вероятное значение k^* для случайной величины $X \sim \Pi(\lambda)$ лежит в интервале $\lambda - 1 \leq k^* \leq \lambda$. Следовательно, в нашем случае $1 \leq k^* \leq 2$. Таким образом, наиболее вероятных значений два: k_1^* и k_2^* . Найдем соответствующие им вероятности:

$$\begin{aligned} P\{X = k_1^*\} &= P\{X = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 2e^{-2}, \\ P\{X = k_2^*\} &= P\{X = 2\} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 2e^{-2}; \end{aligned}$$

в) Случайная величина $X \sim \Pi(\lambda)$ принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$P\{X > 0\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-2};$$

г) Воспользуемся формулой связи второго начального момента, который нужно найти, с $M(X)$ и $D(X)$:

$$M(X^2) = M(X) + D(X) = \lambda + \lambda = 2 + 2 = 4;$$

д) $P\{X < M(X)\} = 3e^{-2}$; б) наиболее вероятные значения: 1 и 2, $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = 2e^{-2}$; в) $P\{X > 0\} = 1 - e^{-2}$; г) $M(X^2) = 4$.

Пример 9. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найдите вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения

финансовой дисциплины 480 предприятий.

Решение. По условию $p = 0,5$. Так как $n = 1000$ достаточно велико (условие $npq = 10\,000 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 250 \geq 20$ выполнено), то применяем локальную формулу Муавра-Лапласа. Вначале определим:

$$x = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265, \text{ а затем:}$$

$$P_{480,1000} \approx \frac{f(-1,265)}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{f(1,265)}{\sqrt{250}} = \frac{0,1792}{\sqrt{250}} = 0,0113.$$

Пример 10. По условию задачи 9. найдите вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины не менее 480.

Решение. Необходимо найти $P_{1000}(m \geq 480) = P_{1000}(480 \leq m \leq 1000)$. Применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа, предварительно найдя:

$$x_1 = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265, \quad x_2 = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 31,6.$$

Теперь:

$$\begin{aligned} P_{1000}(480 \leq m \leq 1000) &\approx \frac{1}{2} [\Phi(31,6) - \Phi(-1,265)] = \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(31,6) + \Phi(1,265)] \approx \frac{1}{2} (1 + 0,7941) \approx 0,897. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. Какие испытания называют схемой Бернулли?
2. Вероятность какого события вычисляется по Формуле Бернулли?
3. В каких случаях применяют предельные теоремы в схеме Бернулли?
4. Сформулируйте теорему Пуассона для схемы Бернулли.
5. Как математически записывается локальная теорема Муавра-Лапласа?
6. В каких случаях вероятность события вычисляется по интегральной теореме Муавра-Лапласа?
7. Каким соотношением определяется наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли?

Задачи для самостоятельного решения

1. Ежедневно новая сделка совершается с вероятностью 0,2 (но не более одной в день). Какова вероятность того, что за 5 дней будет совершено 3 сделки?

2. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью $1/4$. Какова вероятность того, что из 10 визитов страхового агента 5 закончатся заключением договора?

3. Для вычислительной лаборатории приобретено 9 компьютеров, причем вероятность брака для одного компьютера равна 0,1. Какова вероятность того, что придется заменить более двух компьютеров?

4. Зачетная работа по предмету состоит из 6 задач, при этом зачет считается сданным, если студент решил хотя бы три из них. Студент Иванов может решить каждую задачу с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что он сдаст зачет?

5. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых нужно выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, будучи совершенно не готовым к тесту, студент угадает правильные ответы по крайней мере на 6 вопросов?

6. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность того, что из 10 проверенных документов большинство не будет содержать ошибки?

7. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех; б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти (ничьи во внимание не принимаются)?

8. Мастер и ученик участвуют в шахматном матче. Мастер выигрывает матч, если он выиграл все партии в матче. Ученик выигрывает матч, если он выиграл хотя бы одну партию в матче. Из скольких партий должен состоять матч, чтобы шансы на победу у мастера и ученика были равны, если вероятность победы мастера в одной партии равна 0,9, а ученика – 0,1?

9. В коробке 4 детали. Вероятность, что деталь стандартна, равна 0,9. Сколько нужно взять коробок, чтобы с вероятностью не менее 0,99 получить хотя бы одну коробку, не содержащую брак?

10. Система состоит из шести независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента равна 0,3. Найдите: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших

элементов системы; в) вероятность отказа системы, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы пять элементов.

11. Каждый из 100 компьютеров в интернет-кафе занят клиентом в среднем в течение 80 % рабочего времени. Какова вероятность того, что в момент проверки клиентами будет занято: а) от 70 до 90 компьютеров; б) не менее 80 компьютеров?

12. Известно, что вероятность «зависания» компьютера в интернет-кафе равна 0,6 %. Какова вероятность того, что при случайном отборе 200 компьютеров «зависнут»: а) ровно 6 компьютеров; б) не более 5 компьютеров?

13. При наборе текста наборщик делает ошибку в слове с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что в набранной книге, насчитывающей 5000 слов, будет не более пяти ошибок?

14. Страховая фирма заключила 10 000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому в течение года составляет 2 %. Найдите вероятность того, что таких случаев будет не более 250.

15. Сборник задач содержит 400 задач с ответами. В каждом ответе может быть ошибка с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что для 99 % всех задач сборника ответы даны без ошибок?

16. Известно, что вероятность выпуска дефектной детали равна 0,02. Детали укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что: а) в коробке нет дефектных деталей; б) число дефектных деталей не более двух?

17. В партии 100 изделий, из которых 4 бракованных. Партия разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

18. Производители калькуляторов знают из опыта, что 1 % проданных калькуляторов имеют дефекты. Аудиторская фирма купила 500 калькуляторов. Какова вероятность того, что придется заменить 4 калькулятора?

19. На научную конференцию приглашены 100 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0,7. В гостинице для гостей заказано 65 мест. Какова вероятность, что все приезжающие будут поселены в гостинице?

20. Доля населения региона, занятого в промышленности, равна 0,4. В каких пределах с вероятностью 0,95 находится число занятых в промышленности среди 10 000 случайно отобранных людей?

21. Вероятность того, что случайно взятая деталь окажется второсортной, равна $\frac{3}{8}$. Сколько нужно взять деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,995, можно было ожидать, что доля деталей второго сорта отклонится от вероятности менее чем на 0,001?

22. Пять клиентов случайным образом обратились в 5 фирм. Найдите вероятность того, что в одну фирму никто не обратится.

23. Два шахматиста – А и Б встречались за доской 50 раз, причем 15 раз выиграл А, 10 раз выиграл Б, а 25 партий закончились вничью. Найдите вероятность того, что в матче из 10 партий между этими шахматистами 3 партии выиграет А, 2 партии выиграет Б, а 5 партий закончатся вничью.

24. Лифт начинает движение с семью пассажирами и останавливается на десяти этажах. Найдите вероятность того, что три пассажира вышли на одном этаже, еще два пассажира вышли на другом этаже, а последние два – еще на одном этаже.

25. В лотерее каждый сотый билет выигрышный. Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью 0,95 быть уверенным в том, что хотя бы один билет окажется выигрышным?

26. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0,00248. Считая, что число X вызовов, поступивших в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найдите математическое ожидание и дисперсию X .

27. Если имеется партия продукции, в которой некачественная продукция встречается $q = (1-p)$, а продукция без дефектов – с вероятностью p .

Качество продукции можно описать случайной величиной, имеющей распределение Бернулли $B_i(1;p)$. Найдите закон распределения.

ЗАНЯТИЕ № 5

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Цель: получить навыки представления случайных величин через законы распределения в различных формах.

Закон распределения случайной величины

Случайная величина (СВ) – это переменная, принимающая в каждом конкретном испытании конкретное числовое значение, которое может меняться от опыта к опыту.

Случайные величины представляют результаты измерений в случайных экспериментах (испытаниях). Существует два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины – это переменные, принимающие только отделенные друг от друга числовые значения (которые можно заранее перечислить). Например, оценки в зачетной книжке (3,4,5), количество студентов на экзамене.

Непрерывная случайная величина может принимать любые значения из замкнутого или открытого интервала. Например, размеры одной и той же детали, определяемые разными людьми или с применением разных инструментов, различны.

Случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду.

Законом распределения случайной величины называется любое правило позволяющее находить вероятности произвольных событий, то есть вероятности появления этой величины в любом заданном интервале ее значений. Законы распределения задаются в аналитической, графической или табличной форме. Обычно для этого используются:

- а) ряд распределения (многоугольник распределения);
- б) интегральная функция распределения;
- в) дифференциальная функция распределения.

Ряд распределения – это таблица, в которой перечислены все возможные значения СВ и соответствующие им вероятности. Он является исчерпывающей характеристикой дискретной СВ.

Пример 1. В урне 8 шаров, из которых 5 белых, остальные – черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найдите закон распределения числа белых шаров в выборке.

Решение. Возможные значения СВ X – числа белых шаров в выборке есть $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$. Вероятности их соответственно будут:

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}, p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, p_3 = \frac{30}{56}, p_4 = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения запишем в виде таблицы:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

(Контроль: $\sum_{i=1}^4 p_i = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1$.)

У непрерывных СВ ряд распределения отсутствует, поэтому он не является универсальным законом распределения СВ.

Интегральная функция распределения. Интегральной функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшее x , то есть:

$$F(x) = P(X < x),$$

где x – некоторая текущая переменная.

Интегральная функция распределения – самая универсальная характеристика СВ. Она существует как для дискретных, так для непрерывных СВ, полностью и однозначно характеризуя их с вероятностной точки зрения, то есть является одной из форм закона распределения. Часто слово «интегральная» опускается.

Свойства интегральной функции распределения

1. $F(x)$ – неотрицательная функция

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. $F(x)$ обращается в ноль на минус бесконечности и равна единице на плюс бесконечности, то есть

$$F(x = -\infty) = 0, \quad F(x = +\infty) = 1.$$

3. $F(x)$ – неубывающая функция, то есть если $x_2 > x_1$, то

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

4. $F(x)$ –непрерывна слева, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

5. Вероятность попадания СВ X в промежуток (a, b) равен приращению ее функции распределения на этом промежутке, то есть

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

6. В отдельных точках $F(x)$ может иметь разрыв. В этих точках величина скачка функции распределения равна вероятности появления случайной величины в этой точке:

$$P(X=x) = F(x+0) - F(x).$$

7. График функции распределения дискретной СВ имеет ступенчатый вид, а непрерывной СВ – непрерывную линию.

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $(X \geq x)$:

$$P(X \geq x) = 1 - F(x).$$

Пример 2. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0; 1)$.

Решение. Искомая вероятность равна приращению интегральной функции на заданном интервале:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0).$$

Так как на интервале $(0; 1)$ по условию $F(x) = \frac{x}{2}$, то

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $P(0 < X < 1) = \frac{1}{2}$.

Плотность распределения. Плотностью (дифференциальной функцией) распределения непрерывной случайной величины x называется производная ее интегральной функции $f(x) = F'(x)$.

Свойства плотности распределения

- 1) Дифференциальная функция неотрицательна то есть $f(x) \geq 0$.
- 2) Интеграл $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до x равен интегральной функции распределения:

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x).$$

Этот интеграл численно равен площади фигуры, лежащей левее точки x и заключенной между кривой плотности и осью абсцисс.

3) С помощью дифференциальной функции можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал от a до b , которая равна:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx,$$

то есть вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $(a; b)$ равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b .

4) Интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах (условие нормировки) равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Пример 3. Плотность распределения СВ X задана функцией $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Найдите значение параметра a .

Решение. Согласно свойству 4 плотности распределения, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1, \quad a \cdot \lim_{\substack{d \rightarrow +\infty \\ c \rightarrow -\infty}} \int_c^d \frac{dx}{1+x^2} = 1, \quad a \cdot \lim_{\substack{d \rightarrow +\infty \\ c \rightarrow -\infty}} \arctg x \Big|_c^d = 1 \quad \text{или}$$

$$a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1 \quad \text{и, наконец, получаем } a\pi = 1, \text{ то есть } a = 1/\pi.$$

Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ – наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения – его положение и разбросанность. Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является средним арифметическим случайной величины.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием называется:

а) для дискретной случайной величины – сумма всех произведений ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = \sum_i x_i \cdot p_i ;$$

б) для непрерывных случайных величин:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Здесь $f(x)$ – дифференциальная функция распределения СВ.

Свойства математического ожидания (МО)

1) Математическое ожидание постоянной равно ей самой:

$$M(C) = C.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(K \cdot X) = K \cdot M(X).$$

3) Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин, являющихся функцией одного случайного события A , равно сумме (разности) математических ожиданий этих СВ:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5) Свойства 3 и 4 можно распространить на любое число слагаемых или сомножителей.

Пример 4. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найдите математическое ожидание выигрыша на один билет.

Решение. Ряд распределения СВ X – суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

$$M(X) = 500 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,69 = 8,65 \text{ руб.}$$

Дисперсия. Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

а) для дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i;$$

б) для непрерывной СВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

Дисперсия характеризует разброс значений СВ X относительно ее математического ожидания. На практике дисперсию случайной величины удобно находить по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = M(C^2) - [M(C)]^2 = C^2 - (C)^2 = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(K \cdot X) = K^2 \cdot D(X).$$

3) Дисперсия суммы или разности двух независимых СВ равна сумме их дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсия суммы СВ с постоянной равна дисперсии СВ:

$$D(X+C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X).$$

5) свойства 3 и 4 можно распространить на любое число слагаемых.

Среднее квадратическое отклонение. Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата СВ X , что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса имела размерность случайной величины, используют еще одну числовую характеристику – среднее квадратическое отклонение (С.К.О.). Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением случайной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Использование $\sigma(X)$ полезно благодаря одинаковой размерности его с размерностью математического ожидания. Из свойств дисперсии вытекают соответствующие свойства С.К.О.:

$$\sigma(C)=0, \sigma(CX)=C\sigma(X), \sigma(C+X)=\sigma(X).$$

Для изучения свойств случайного явления, независящих от выбора масштаба измерения и положения центра группировки, исходную случайную величину X приводят к некоторому стандартному виду – ее центрируют, то есть записывают разность $X-M(X)$. Геометрически это означает, что начало координат переносится в точку с абсциссой, равной математическому

ожиданию, затем делят на С.К.О. Случайную величину Z называют стандартной случайной величиной если:

$$Z = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}, \quad M(Z) = 0, \quad D(Z) = 1.$$

Таким образом Z – центрированная и нормированная случайная величина.

Пример 5. ДСВ X задана рядом распределения:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9;$$

$$D(X) = (-1 - 0,9)^2 \cdot 0,2 + (0 - 0,9)^2 \cdot 0,1 + (1 - 0,9)^2 \cdot 0,3 + (2 - 0,9)^2 \cdot 0,4 = 1,29;$$

$$\sigma(X) = (1,29)^{1/2} \approx 1,14.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 6. Рассматривается работа трех независимо работающих технических устройств (ТУ); вероятность нормальной работы первого ТУ равна 0,2, второго – 0,4, третьего – 0,5; случайная величина X – число работающих ТУ. Постройте ряд распределения случайной величины X .

Решение. Возможные значения случайной величины X – 0, 1, 2, 3. Соответствующие им вероятности найдем, пользуясь правилами сложения и умножения:

$$p_1 = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24;$$

$$p_2 = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,46;$$

$$p_3 = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,26;$$

$$p_4 = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,04.$$

Как и следовало ожидать: $\sum_{i=1}^4 p = 1$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

0	1	2	3
0,24	0,46	0,26	0,04

Пример 7. Производятся независимые тестирования больших интегральных схем (БИС) до тех пор, пока не будет обнаружена первая исправная БИС, после чего тестирование прекращается. Вероятность того, что тестирование произвольной БИС закончится успешно, равна p . Постройте ряд распределения случайной величины Y – число тестов, которое придется произвести.

Решение. Случайная величина Y дискретна и имеет бесконечное (счетное) множество возможных значений: $\{1, 2, \dots, i, \dots\}$. Найдем их вероятности, начиная с p_1 . $p_1 = P\{Y = 1\}$.

Условимся знаком «+» обозначать успешное тестирование, знаком «–» – неуспешное. Для того чтобы достаточно было произвести одно тестирование, нужно, чтобы первый же тест закончился успешно:

$$p_1 = P\{+\} = P\{Y = 1\} = p.$$

Найдем $p_2 = P\{Y = 2\}$. Чтобы тестирование прекратилось после второго теста, нужно, чтобы первый тест был неуспешным, второй – успешным:

$$p_2 = P\{-+\} = P\{Y = 2\} = (1 - p)p,$$

или, обозначая вероятность неуспешного тестирования $1 - p = q$, $p_2 = qp$

Аналогично найдем:

$$p_i = P \underbrace{- \dots -}_{(i-1) \text{ раз}} + = P\{Y = i\} = q^{i-1}p.$$

Ряд распределения случайной величины Y имеет вид:

1	2	...	i	...
p	qp	...	$q^{i-1}p$	...

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Действительно, $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}p = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} q^i$, и суммируя бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом q и знаменателем $q < 1$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}p = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{1 - q} = 1.$$

Пример 8. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ ax^2 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найдите: 1) коэффициент a ; 2) плотность распределения $f(x)$; 3) вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение между 0,25 и 0,5.

Решение. 1) Так как функция $F(x)$ непрерывна, то $F(1) = 1$, т.е. $ax^2|_1 = 1$, откуда $a = 1$.

2) Плотность распределения $f(x) = F'(x)$ выражается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

или, короче: $f(x) = 2x$ при $0 < x < 1$.

В дальнейшем будем записывать выражение плотности распределения только на участках, где она отлична от нуля, подразумевая, что повсюду вне этих участков она равна нулю.

3) Можно было бы вычислить вероятность попадания X на участок $(0,25; 0,5)$ по формуле:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

но мы воспользуемся уже известной функцией распределения $F(x) = ax^2$, и вычислим ее приращение на участке $(0,25; 0,5)$:

$$P\{0,25 < X < 0,5\} = F(0,5) - F(0,25) = 0,5^2 - 0,25^2 = 0,1875.$$

Пример 9. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f(x) = a \cos x$ при $-\pi/2 < x < \pi/2$.

1) Найдите коэффициент a ; 2) найдите вероятность попадания X на участок от 0 до $\pi/4$; 3) найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X .

Решение.

1) Определим коэффициент a из свойства плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos x dx = 2a = 1, \text{ отсюда } a = 1/2.$$

2) По формуле $P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ вычисляем

$$P\left\{0 < X < \frac{\pi}{4}\right\} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3) По формуле $F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ находим

функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\pi/2 \\ (\sin x + 1)/2 & \text{при } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Пример 10. Найдите дисперсию случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что случайные величины X и Y независимы и $D(X) = 1,5$, $D(Y) = 1$.

Решение. Используя свойства дисперсии, найдем:

$$D(Z) = 8^2 D(X) + 5^2 D(Y) + 0 = 64 \cdot 1,5 + 25 \cdot 1 = 121.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной величины.
2. Какую случайную величину называют дискретной?
3. Какую случайную величину называют непрерывной?
4. Какими параметрами характеризуется ДСВ?
5. Дайте определение функции распределения случайной величины.
6. Какими свойствами обладает функция распределения?
7. Перечислите свойства плотности распределения.
8. Назовите числовые характеристики случайных величин.

Задачи для самостоятельного решения

1. Монета подброшена 3 раза. Найдите распределение вероятностей для числа появлений герба.

2. Три стрелка с вероятностями попадания в цель при отдельном выстреле 0,7, 0,8 и 0,9 соответственно делают по одному выстрелу. Найдите распределение вероятностей для общего числа попаданий.

3. Вероятность того, что лотерейный билет окажется выигрышным, равна 0,1. Покупатель купил 5 билетов. Найдите распределение вероятностей для числа выигрышей у владельца этих пяти билетов.

4. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,7 при одном выстреле. Он стреляет до первого попадания, но делает не более трех выстрелов. Найдите распределение вероятностей для числа выстрелов.

5. Два станка выпускают деталь с вероятностями брака 0,01 и 0,05 соответственно. В выборке одна деталь выпущена первым станком и две – вторым станком. Найдите закон распределения для числа бракованных деталей в выборке.

6. Прибор комплектуется из двух деталей, вероятность брака для первой – 0,1, для второй – 0,05. Выбрано 4 прибора. Прибор считается бракованным, если в нем есть хотя бы одна бракованная деталь. Постройте закон распределения для числа бракованных приборов среди выбранных четырех приборов.

7. К контролеру с конвейера поступили 4 детали. Вероятность брака для каждой детали равна 0,1. Детали проверяют одну за другой, пока не наберут две доброкачественные. Найдите распределение вероятностей для числа проверенных деталей.

8. Два стрелка поражают мишень с вероятностями 0,8 и 0,9 соответственно (при одном выстреле). Найдите распределение вероятностей для общего числа попаданий в мишень, если первый стрелок выстрелил один раз, а второй – дважды.

9. Каждая из пяти лампочек имеет дефект с вероятностью 0,1. Дефектная лампочка при включении сразу перегорает, и ее заменяют новой. Постройте закон распределения для числа опробованных ламп.

10. Среди пяти ключей два подходят к двери. Ключи пробуют один за другим, пока не откроют дверь. Найдите распределение вероятностей для числа опробованных ключей.

11. Монету подбрасывают до тех пор, пока герб не выпадет второй раз, при этом делают не более четырех проб. Найдите распределение вероятностей числа подбрасываний.

12. Среди 10 деталей три – нужного размера. Детали извлекают поочередно, пока не подберут две детали нужного размера, при этом делают не более четырех проб. Найдите распределение числа извлеченных деталей.

13. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Найдите функцию распределения случайной величины X , вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение. Вычислить вероятность $P(-1 < X < 3/2)$.

14. Закон распределения случайной величины X , имеет вид:

X	-1	2	3	5
P	1/4	1/2	1/8	1/8

Найдите функцию распределения случайной величины X , вычислите ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение. Вычислите вероятность $P(5/2 < X < 5)$.

15. В процессе производства изделие высшего качества удастся получить только с вероятностью 0,2. С конвейера наугад берут детали до тех пор, пока не будет отобрано изделие высшего качества. Найдите математическое ожидание числа проверенных изделий.

16. Сдача экзамена по математике производится до получения положительного результата. Шансы сдать экзамен остаются неизменными и составляют 20 %. Найдите математическое ожидание числа попыток сдачи экзамена.

17. ОТК должен проверить 100 комплектов, состоящих из четырех изделий каждый. Найдите математическое ожидание числа комплектов, состоящих из стандартных деталей, если каждая деталь может быть стандартной с вероятностью 0,8.

18. Игральная кость подбрасывается до: а) второго; б) третьего появления грани с номером «три». Найдите среднее число подбрасываний.

19. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков при бросании четырех игральных костей.

20. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание a и дисперсию σ^2 . Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = (\xi - a)/\sigma$.

21. В шестиламповом радиоприемнике перегорела одна лампа. Лампы заменяют новыми одну за другой, пока приемник не заработает. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа замененных ламп.

22. Стрелок стреляет по движущейся мишени до первого попадания в нее, причем успевает сделать не более четырех выстрелов. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа сделанных выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

23. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} C(x+1), & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

Вычислите константу C , функцию распределения $F(x)$, $M(X)$ и вероятность $P(X^2 < 1)$.

24. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} C(x+1)^{-3/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислите константу C , функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$ и вероятность $P(|X-1/3| < 1)$.

25. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 8X - 5Y + 7$, если известно, что $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$.

ЗАНЯТИЕ № 6

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель: сформировать навыки применения важных для практики распределений дискретной случайной величины.

Биномиальное распределение

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически и графически.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A («успех» опыта) может появиться либо не появиться, вероятность наступления события A во всех испытаниях постоянна и равна p , то вероятность не появления $q = 1 - p$.

Примем в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Для определения закона распределения величины X необходимо определить возможные значения X и их вероятности. Событие A в n испытаниях может:

- 1) не появиться вообще, ($x_1 = 0$);
- 2) появиться один раз, ($x_2 = 1$);
- 3) появиться два раза, ($x_3 = 2$);
- 4) появиться n раз, ($x_{n+1} = n$).

Отсюда возможные значения X таковы: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_n = n$.

Для определения вероятности этих значений необходимо воспользоваться формулой Бернулли (вероятность появления события k -раз в n испытаниях):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (6.1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Данная формула является аналитическим выражением биномиального закона распределения. Правую часть равенства (6.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона (отсюда и название):

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n.$$

Первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях.

Второй член $-p^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $(n-1)$ раз. Последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Представим биномиальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	...	k	0
P	p^n	$p^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n

Свойства биномиального распределения

1) Математическое ожидание $M(x) = np$

2) Дисперсия $D(x) = npq$

3) Наиболее вероятное значение k случайной величины $X \sim B_i(n; p)$ удовлетворяет неравенству: $(n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$.

Пример 1. Монету подбрасывают 3 раза. Найдите ряд распределения числа X выпавших «гербов». Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 3$, $p = 1/2$. Поэтому случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями по формуле Бернулли:

$$\begin{aligned} p_0 &= C_3^0 (1/2)^3 = 1/8, \\ p_2 &= p_1 = C_3^1 (1/2)^3 = 3/8, \\ p_3 &= 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1/8. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Контроль: $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 8/8 = 1$.

Частный случай биномиального распределения при $n = 1$ и $p \in (0;1)$ называется распределением Бернулли $B_i(1; p)$.

Для этого распределения имеем:

$$M(x) = p; \quad D(x) = p(1-p).$$

Схема испытаний Бернулли

Распределение Бернулли $B_i(1;p)$ играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистики, являясь математической моделью опыта с двумя исходами.

Один опыт может иметь только два исхода «успех» (A), «неуспех» ($\bar{A}$).

Эксперимент повторяется k раз при следующих условиях:

1) Результаты последовательных экспериментов являются независимыми в совокупности случайными событиями.

2) Вероятности исходов A и $\bar{A}$ при повторении экспериментов неизменны и равны:

$$P(A) = p; P(\bar{A}) = 1 - p = q, \text{ или } p + q = 1.$$

Если дискретная случайная величина X – число «неуспехов», то она в n -экспериментах принимает значения: $0, 1, 2, \dots, n$. Распределение этой дискретной случайной величины X определяется формулой Бернулли.

$P_n(x=k)$ – это вероятность того, что в n испытаниях событие A «успех» осуществляется ровно k раз, а $(n-k)$ раз – «неудача» независимо в какой последовательности.

Если эксперимент повторяется 2 раза ($n = 2$), то распределение числа успехов имеет вид:

X	0	1	2
$P(x=k)$	q^2	$2pq$	p^2

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X с реализациями $x_k = k, k = 0, 1, \dots$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, что символически записывается как $X \sim \Pi(\lambda)$, если

$$P(X = x_k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (6.2)$$

Ряд распределения представлен в таблице:

x_i	0	1	2	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda} / 2!$	...	$\lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$	...

Распределение Пуассона играет большую роль в практическом применении теории вероятностей – многие физические явления приводят к такому распределению вероятностей.

Свойства распределения Пуассона $\Pi(\lambda)$

- 1) Математическое ожидание $M(X) = \lambda$.
- 2) Дисперсия $D(X) = \lambda$.
- 3) Наиболее вероятное значение k случайной величины $X \sim \Pi(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $\lambda - 1 \leq k \leq \lambda$ или $np - 1 \leq k \leq np$.
- 4) Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}$.

Для распределения Пуассона выполняется числовое равенство $M(X) = D(X) = \lambda$, однако их физические размерности не совпадают.

Закон Пуассона зависит от одного параметра λ , смысл которого в следующем: он является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X , распределенной по закону Пуассона.

Между биномиальным распределением $Bi(n; p)$ и распределением Пуассона $\Pi(\lambda)$ имеется следующая связь.

Пусть $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$, но при этом $np = \lambda = const.$, тогда

$$P(k) \rightarrow \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!, \quad (6.3)$$

где $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$.

Таким образом, при больших n ($n \rightarrow \infty$) и малых p ($p \rightarrow 0$), то есть при редких явлениях двухпараметрическое биномиальное распределение $Bi(n; p)$ можно приближенно заменить однопараметрическим распределением Пуассона $\Pi(\lambda)$, (где $\lambda = np$), при этом ошибка от такой замены не превышает np^2 для всех $k = \overline{0, n}$.

Распределение Пуассона можно использовать вместо биномиального в задачах, где речь идет, например, о многократном применении технического устройства высокой надежности, такой, что вероятность отказа при одном применении очень мала.

Пример 2. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найдите вероятность того, что на базу придут три бракованных изделия.

Решение. По условию $n = 5000, p = 0,0002, k = 3$.

- 1) Найдем $\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$.

2) По формуле Пуассона искомая вероятность равна:

$$P_{5000}(3) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k! = 1 \cdot e^{-1} / 3! = e \cdot 1/6 \approx 0,06.$$

Помимо «предельного» случая возникновения распределения Пуассона на практике встречается ряд ситуаций, где это распределение имеет самостоятельное место. Распределение Пуассона широко используется в теории массового обслуживания, а формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется интенсивностью λ — частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в системы массового обслуживания (СМО) в единицу времени.

При $n \rightarrow \infty$, $p = \frac{\lambda\tau}{n} \rightarrow 0$ и постоянном значении произведения $np = n \frac{\lambda\tau}{n} = \lambda\tau$ биномиальное распределение стремится к распределению Пуассона с параметром $\lambda\tau$:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad (6.4)$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии:

$$M(X) = \sigma^2(X) = \lambda\tau.$$

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события ($k = 0$), равна:

$$P(X = 0) = e^{-\lambda\tau}. \quad (6.5)$$

Пример 3. На автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 1,2$ вызова в минуту. Найдите вероятность того, что за две минуты: а) не придет ни одного вызова; б) придет ровно один вызов; в) придет хотя бы один вызов.

Решение. а) Случайная величина X — число вызовов за две минуты — распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1,2 \cdot 2 = 2,4$. Вероятность

того, что вызовов не будет ($k = 0$), по формуле (6.5):

$$P(X = 0) \approx e^{-2,4} = 0,091;$$

б) Вероятность одного вызова ($k = 1$):

$$P(X = 1) = 2,4 \cdot 0,091 = 0,218;$$

в) Вероятность хотя бы одного вызова:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,091 = 0,909.$$

Найдем распределение интервала времени T между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока.

В соответствии с (6.5) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна:

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}, \quad (6.6)$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины T , есть:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (6.7)$$

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения, то есть:

$$f(t) = F'(t) = e^{-\lambda t}. \quad (6.8)$$

Распределение, задаваемое плотностью вероятности (6.8) или функцией распределения (6.7), является показательным (экспоненциальным).

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на элементарный (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна, согласно формуле (6.7):

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t.$$

Пример 4. Среднее число вызовов на АТС в одну минуту равно двум. Найдите вероятность того, что за 5 мин. поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Решение. По условию $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 2$. Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t} / k!$$

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин. поступит два вызова:

$$P_5(2) = 10^2 \cdot e^{-10} / 2! = 0,00225.$$

Это событие практически невозможно.

б) Событие «не поступило ни одного вызова» и «поступил один» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за 5 мин. поступит менее двух вызовов (т.е. ни одного или один), равна:

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + (10 \cdot e^{-10}) / 1! = 0,000495.$$

Это событие также практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин. поступит не менее двух вызовов:

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0,000495 = 0,999505.$$

Это событие практически достоверно.

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p , если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, k \dots$ (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{k-1}, \quad (6.9)$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	1	2	3	...	m	...
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Нетрудно видеть, что вероятности p_i образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (отсюда название «геометрическое распределение»).

Определение геометрического распределения корректно, так как сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \dots + pq^{k-1} + \dots = p(1 + q + \dots + q^{k-1} + \dots) = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

(так как $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ есть сумма геометрического ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ при $|q| < 1$).

Случайная величина $X = k$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число k испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Свойства геометрического распределения

1. Математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{p}$.

2. Дисперсия $D(X) = \frac{q}{p^2}$,

где $q = p - 1$.

Пример 5. Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найдите математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Решение. Случайная величина X – число проверенных деталей до обнаружения бракованной – имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0,1$. Поэтому ряд распределения имеет вид:

$X=m:$	x_i	1	2	3	4	...	m	...
	p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	...	$0,9^m \cdot 0,1$	...

$$\text{Находим: } M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,9}{0,1^2} = 90.$$

Гипергеометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N , если она принимает значения $0, 1, 2, k, \dots, \min(n, M)$ с вероятностями:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad (6.10)$$

где $M \leq N, n \leq N$; n, M, N – натуральные числа. Точнее, возможные значения k заключены в границах от $\max(0, k+M-N)$ до $\min(k, M)$, при которых существуют C_n^k, C_{N-M}^{n-k} .

Гипергеометрическое распределение имеет случайная величина $X = k$ – число объектов, обладающих заданным свойством среди n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, M из которых обладают этим свойством.

Свойства гипергеометрического распределения

1. Математическое ожидание $M(X) = n \frac{M}{N}$.
2. Дисперсия $D(X) = n \frac{M}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n}{N}\right)$.

Гипергеометрическое распределение можно рассматривать как модификацию биномиального распределения для случая конечной совокупности, состоящей из N объектов, M из которых обладают этим свойством.

При $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$ при условии, что $M/N \rightarrow p$, функция вероятностей гипергеометрического распределения стремится к соответствующей функции биномиального закона.

Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического приемочного контроля качества промышленной продукции, в задачах, связанных с организацией выборочных обследований, и других областях.

Пример 6. В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта).

Найдите закон распределения случайной величины X – числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение. Очевидно, что число угаданных видов спорта в лотерее «6 из 45» есть случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами $n = 6$, $M = 6$, $N = 45$. Ряд ее распределения, рассчитанный по формуле (1), имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,00000012

Вероятность получения денежного приза:

$$P(3 \leq X \leq 6) = \sum_{i=3}^6 P(X=i) = 0,02244 + 0,00137 + 0,00003 + 0,00000012 \approx 0,024,$$

$$M(X) = 6 \cdot \frac{6}{45} = 0,8; \quad D(X) = 6 \cdot \frac{39}{44} \left(1 - \frac{39}{45}\right) \left(1 - \frac{6}{45}\right) = 0,6145.$$

Таким образом, среднее число угаданных видов спорта из 6 всего 0,8, а вероятность выигрыша только 0,024.

Примеры решения типовых задач

Пример 7. При каждом цикле обзора радиолокатора объект (независимо от других циклов) обнаруживается с вероятностью $p = 0,2$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа X циклов обзора, которое придется произвести без обнаружения объекта и числа Y циклов обзора, которое придется произвести вплоть до обнаружения объекта (включая тот, при котором объект будет обнаружен). Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение каждой из случайных величин X , Y . Пользуясь правилом трех сигма, найдите максимальное практическое возможное число циклов, за которое объект еще не будет обнаружен. Найдите вероятность того, что фактическое число «безуспешных» циклов превзойдет его математическое ожидание больше чем на 3σ .

Решение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0,2$; по формулам:

$$M(x) = q/p, D(x) = q/p^2, \sigma(x) = \sqrt{q/p^2}$$

имеем

$$M(X) = (1 - 0,2)/0,2 = 4; \quad D(X) = 0,8/0,04 = 20; \quad \sigma(x) = \sqrt{20} \approx 4,46.$$

Случайная величина Y имеет «геометрическое + 1» распределение; ее математическое ожидание $M(y) = 4 + 1 = 5$; ее дисперсия такова же, как дисперсия случайной величины X :

$$D(y) = 20; \quad \sigma(y) \approx 4,46.$$

Найдем

$$\begin{aligned} P\{X > M(x) + 3\sigma(x)\} &= P\{X > 4 + 13\} = 1 - P\{X \leq 17\} = 1 - p \sum_{m=0}^{17} q^m = \\ &= 1 - (pq^{18})/(1 - q) = q^{18} = 0,8^{18} \approx 0,0180144. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина X превзойдет свое математическое ожидание больше чем на 3σ довольно мала (меньше 2%; отклонения в меньшую сторону не рассматриваем, так как они приводят к отрицательным значениям X , что вообще невозможно).

Пример 8. Передается $n = 5$ сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью $p = 0,3$ независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее ряд распределения. Найдите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить с теми, которые дают формулы: $M(x) = np$, $D(x) = npq$, $\sigma(x) = \sqrt{npq}$. Найдите вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

Решение. Случайная величина X – число искаженных сообщений, распределена по биномиальному закону (под «опытом» разумеется передача сообщения, а под «успехом» – его искажение). По формуле $P_m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ находим:

$$\begin{aligned} P_0 &= q^5 = 0,7^5 = 0,16807 \\ P_1 &= C_5^1 \cdot p \cdot q^4 = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^4 = 0,36015 \\ P_2 &= C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 = 0,30870 \\ P_3 &= C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = 0,13230 \\ P_4 &= C_5^4 \cdot p^4 \cdot q = 0,02835 \\ P_5 &= p^5 = 0,00243. \end{aligned}$$

Или, приближенно, с точностью до 0,001:

$$P_0 = 0,168; P_1 = 0,360; P_2 = 0,309; P_3 = 0,133; P_4 = 0,028; P_5 = 0,002$$

(значение P_2 округлено в большую сторону, чтобы сумма всех вероятностей P_m была не 0,999, а ровно 1).

Приближенно ряд распределения будет иметь вид:

0	1	2	3	4	5
0,168	0,360	0,309	0,133	0,028	0,002

Пользуясь приближенным рядом распределения, находим математическое ожидание случайной величины X :

$$M(x) = 0 \cdot 0,168 + 1 \cdot 0,360 + 2 \cdot 0,309 + 3 \cdot 0,133 + 4 \cdot 0,028 + 5 \cdot 0,002 = 1,499.$$

Однако формула $M(x) = np$ дает более точное значение $M(x) = 5 \cdot 0,3 = 1,5$.

Имея в виду возможность ошибок, хоть и незначительных, дисперсию $D(x)$ вычисляем, пользуясь не приближенными, а точными значениями P_m .
Второй начальный момент:

$$\alpha_2 = 0^2 \cdot 0,16807 + 1^2 \cdot 0,36015 + 2^2 \cdot 0,30870 + 3^2 \cdot 0,13230 + 4^2 \cdot 0,02835 + 5^2 \cdot 0,00243 = 3,30.$$

Вычитая из α_2 точное значение $(M(x))^2 = 2,25$, получим $D(x) = 1,05$, что совпадает с результатом вычисления по формуле $D(x) = npq$; $\sigma(x) = \sqrt{1,05} = 1,03$.

Найдем вероятность R_2 того, что будет искажено не менее двух сообщений:

$$R_2 = P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X \leq 1\} = 1 - (P_0 + P_1) \approx 0,472.$$

Пример 9. По каналу связи передаются четыре сообщения. Каждое из них, независимо от других, может быть искажено. Первое сообщение искажается с вероятностью $p_1 = 0,1$, второе – с вероятностью $p_2 = 0,2$, третье – с вероятностью $p_3 = 0,3$, четвертое – с вероятностью $p_4 = 0,4$. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Пользуясь производящей функцией, построить ряд распределения случайной величины X .

Найдите вероятность того, что будет искажено: а) хотя бы одно сообщение, б) не менее двух сообщений. Найдите непосредственно и по формулам для обобщенного биномиального распределения

$$(M(x) = \sum_{i=1}^n p_i; D_x \sum_{i=1}^n p_i q_i) \text{ ее числовые характеристики: } M(x), D(x), \sigma(x).$$

Решение. Производящая функция:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)(q_3 + p_3 z)(q_4 + p_4 z) = \\ &= (0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z) = \\ &= 0,3024 + 0,4404z + 0,2144z^2 + 0,0404z^3 + 0,0024z^4. \end{aligned}$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

0	1	2	3	4
0.3024	0,4404	0,2144	0,0404	0,0024

$$M(x) = 0 \cdot 0,3024 + 1 \cdot 0,4404 + 2 \cdot 0,2144 + 3 \cdot 0,0404 + 4 \cdot 0,0024 = 1,000.$$

Тот же результат даст вычисление по вышеприведенной формуле :

$$M(x) = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 = 1.$$

Дисперсию вычислим не через второй центральный момент, а непосредственно:

$$\begin{aligned} D(x) &= (0-1)^2 \cdot 0,3024 + (1-1)^2 \cdot 0,4404 + (2-1)^2 \cdot 0,2144 + (3-1)^2 \cdot 0,0404 + \\ &\quad + (4-1)^2 \cdot 0,0024 = 0,7. \end{aligned}$$

Тот же результат получим по второй формуле:

$$D(x) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,7.$$

Извлекая корень из $D(x)$, получим $\sigma(x) = \sqrt{0,7} \approx 0,837$.

Вероятность того, что будет искажено хотя бы одно сообщение и не менее двух сообщений:

$$R_1 = 1 - P_0 = 0,6976; R_2 = 1 - (p_0 + p_1) = 0,2572.$$

Пример 10. Страховая компания заключает однотипные договоры, причем страховая премия (сумма, выплачиваемая страхуемым при заключении договора) составляет 4 тыс. рублей. При наступлении страхового случая компания должна выплатить 20 тыс. рублей. Известно, что страховой случай наступает в 4% случаев. Фирме удалось застраховать 200 клиентов. Ответьте на вопросы:

а) Каков средний доход фирмы и среднеквадратическое отклонение дохода фирмы?

б) Какова вероятность того, что доход фирмы будет находиться в пределах от 710 до 750 тыс. рублей?

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную количеству клиентов, которым страховая компания будет делать выплаты по страховому случаю. Так как страховой случай наступает в 4 % случаев, то вероятность того, что он наступит при работе с одним конкретным клиентом составляет 0,04. Поэтому случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 200$ и $p = 0,04$, т.е. $X \sim Bi(200; 0,04)$. Обозначим через Y случайную величину, равную доходу фирмы. Согласно условию задачи Y связана с X следующим образом:

$$Y = 200 \cdot 4000 - 20\,000 \cdot X.$$

а) Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии для нахождения $M(Y)$ и $D(Y)$:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(800\,000 - 20\,000 X) = 800\,000 - 20\,000 M(X), \\ D(Y) &= D(800\,000 - 20\,000 X) = 4 \cdot 10^8 D(X). \end{aligned}$$

Известно, что для биномиального закона распределения

$$\begin{aligned} M(X) &= np = 200 \cdot 0,04 = 8, \\ D(X) &= np(1 - p) = 200 \cdot 0,04 \cdot 0,96 = 7,68. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} M(Y) &= 800\,000 - 20\,000 \cdot 8 = 640\,000, \\ D(Y) &= 4 \cdot 10^8 \cdot 7,68 = 3072 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение дохода фирмы равно:

$$\sigma(Y) = \sqrt{3072 \cdot 10^6} \approx 55\,426 \text{ руб.}$$

б) Используя известные формулы, получаем

$$\begin{aligned}
 P\{710\,000 \leq Y \leq 750\,000\} &= P\{2,5 \leq X \leq 4,5\} = \\
 &= P(\{X=3\} + \{X=4\}) = P\{X=3\} + P\{X=4\} = \\
 &= C_{200}^3 (0,04)^3 (1-0,04)^{200-3} + C_{200}^4 (0,04)^4 (1-0,04)^{200-4} \approx 0,0825.
 \end{aligned}$$

Ответ: а) Средний доход фирмы равен 40 тыс. рублей, среднее квадратическое отклонение – $55,426 \cdot 10^3$ руб.;

б) вероятность приблизительно равна 0,0825.

Пример 11. Поток грузовых железнодорожных составов прибывающих на сортировочную горку, можно считать простейшим с интенсивностью $\lambda = 4$ (состав/ч). Найдите вероятности того, что за полчаса на горку прибудет: а) ровно один состав; б) хотя бы один состав; в) не менее трех составов.

Решение. $\tau = 0,5$; $a = 4 \cdot 0,5 = 2$

$$\text{а) } P_1 = 2 \cdot e^{-2} \approx 2 \cdot 0,135 = 0,270,$$

$$\text{б) } R_1 = 1 - P_0 \approx 0,865,$$

$$\text{в) } R_3 = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - R(2, a) = \bar{R}(2, a) = \bar{R}(2, 2) \approx 0,325.$$

Пример 12. Поток вызовов на АТС – пуассоновский нестационарный с интенсивностью $\lambda(t)$, зависящей от времени. На участке времени от 0 ч до 6 ч 40 мин интенсивность $\lambda(t)$ возрастает по линейному закону: $\lambda(t) = bt + c$, причем к 0 ч она равна 0,2 (вызов/мин), а в 6 ч 40 мин – 0,4 (вызов/мин). Найдите вероятность P того, что за 10 мин, от 3 ч 15 мин до 3 ч 25 мин, придет не менее трех вызовов.

Решение. Найдем постоянные b, c : $\lambda(0) = 0,2$; $c = 0,2$ [вызов/мин]; $\lambda(6 \text{ ч } 40 \text{ мин}) = \lambda(400 \text{ мин}) = b \cdot 400 + 0,2 = 0,4$ [вызов/мин], откуда $b = 0,2/400$ [вызов/мин²] = $1/2000$ [вызов/мин²]. Среднее число вызовов a в интервале от 3 ч 15 мин = 195 мин до 3 ч 25 мин = 205 мин будет:

$$\begin{aligned}
 a &= \int_{195}^{205} (bt + c) dt = \left(b \frac{t^2}{2} + ct \right) = \frac{1}{2000 \cdot 2} (205^2 - 195^2) + 0,2(205 - 195) = \\
 &= \frac{42025 - 38025}{4000} + 2 = 3
 \end{aligned}$$

Искомая вероятность P будет:

$$P = \bar{R}([2], 3) = \bar{R}(2, 3) = 0,57681 \approx 0,577.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте биномиальный закон распределения.
2. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины распределенной по биномиальному закону?
3. Каким неравенством определяется наиболее вероятное число наступления события A в n независимых испытаниях?
4. Приведите примеры практического применения основных законов распределения дискретных случайных величин.
5. В каком законе распределения математическое ожидание и дисперсия равны одному параметру?

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наиболее вероятное значение случайной величины X , если известно, что $X \sim Bi(n, p)$ и $M(X) = 1$, $D(X) = 0,75$.
2. Может ли случайная величина X иметь биномиальное распределение вероятностей, если: а) $M(X) = 6$, $D(X) = 3$; $M(X) = 7$, $D(X) = 4$?
3. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,1. Составьте закон распределения числа выигравших облигаций среди приобретенных 19.
4. По условию задачи 3. найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду этой случайной величины.
5. По данным задачи 3. найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение доли (частости) выигравших облигаций среди приобретенных.
6. Составьте функцию распределения случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения с параметрами n и p .
7. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Необходимо составить закон распределения отказавших за время t элементов.
8. По условию задачи 7. найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
9. По условию задачи 6.7. определите вероятность того, что за время t откажет хотя бы один элемент.
10. Вероятность поражения цели равна 0,05. Производится стрельба по цели до первого попадания. Необходимо составить закон распределения числа сделанных выстрелов.

11. По условию задачи 10. найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

12. По условию задачи 10. определите вероятность того, что для поражения цели потребуется не менее 5 выстрелов.

13. Решите задачи 10 и 11 при условии, что производится стрельба по цели до трех попаданий.

14. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Необходимо составить закон распределения числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти.

15. По данным задачи 14 найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

16. По данным задачи 14. определите вероятность того, что среди выбранных нет телевизоров с дефектами.

17. На пути движения автомобиля – пять светофоров. Каждый из них, независимо от остальных светофоров, с вероятностью 0,5 запрещает движение. Пусть ξ – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найдите закон распределения случайной величины ξ и ее математическое ожидание.

18. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из одной заготовки равна 0,8. Заготовки используются до тех пор, пока не будет изготовлена годная деталь или не будут израсходованы все заготовки. Пусть η – число заготовок, оставшихся при этом неиспользованными. Найдите закон распределения случайной величины η и ее математическое ожидание.

19. В лифт 12 – этажного дома на первом этаже вошли 10 человек. Известно, что кто-то из них нажал кнопку 7-го этажа. Сколько среди в среднем пассажиров из числа данных 10 человек выйдет на этом этаже?

6.20. Вероятность наступления события A в отдельном испытании равна 0,4. Пусть η – разность между числом наступлений и числом не наступлений события A в n таких испытаниях. Найдите среднее значение случайной величины η и ее среднеквадратическое отклонение.

21. По данным задачи 20 найдите наиболее вероятное значение m_0 случайной величины η .

22. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Известно, что свои наименьшее и наибольшее значение она принимает с одинаковыми вероятностями и имеет единственное наиболее вероятное значение, равное 2. Вычислите $D(\xi)$.

23. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение вероятностей с параметром p . Чему равна вероятность того что ξ примет четное значение?

24. Случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Как связаны между собой $M(\xi)$ и $D(\xi)$?

25. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, наугад по схеме выбора без возвращения извлекают k шаров, $1 \leq k \leq m + n$. Пусть ξ – число белых среди извлеченных шаров. Найдите распределение случайной величины ξ (такое распределение называется гипергеометрическим) и $M(\xi)$.

ЗАНЯТИЕ № 7

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Цель: сформировать навыки использования законов распределения вероятностей непрерывных случайных величин для решения практических задач.

Равномерное распределение

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , если на интервале (a, b) , которому принадлежат все возможные значения X , плотность вероятности сохраняет постоянное значение, а именно:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{при } x < a \text{ и } x > b \end{cases}$$

Значения $f(x)$ в крайних точках a и b участка (a, b) не указываются, так как вероятность попадания в любую из этих точек для случайной величины равна нулю.

Свойства равномерного распределения

1. График плотности равномерного распределения имеет вид прямоугольника. Вероятность попадания случайной величины X на любую часть (α, β) участка (a, b) равна:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

2. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X , имеющей равномерное распределение равна:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a < x \leq b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}.$$

3. Математическое ожидание случайной величины X , имеющей равномерное распределение на участке (a,b) , равно абсциссе середины участка:

$$M(x) = (a+b)/2.$$

4. Дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле:

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. Среднее квадратическое отклонение вычисляется соответственно:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

6. Мода – у равномерного распределения отсутствует.

7. Медиана – равна: $M(x) = (a+b)/2$

8. Третий центральный момент случайной величины X из соображений симметрии равен нулю ($\mu_3 = 0$).

9. Эксцесс случайной величины X равен:

$$\varepsilon_x = \mu_4 / \sigma_4^3 - 3 = -1/2,$$

так как четвертый момент:

$$\mu_4 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^4 dx = \frac{(b-a)^4}{80}.$$

Равномерное распределение является непрерывным аналогом дискретного распределения вероятностей для опытов с равновероятными исходами. Например, случайная величина X , являющаяся погрешностью приближенных вычислений каких-либо параметров при округлении до ближайших целых чисел, удовлетворительно описывается равномерным распределением.

Пример 1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибка округления есть случайная величина X , имеющая равномерное распределение, определить плотность распределения ошибки округления.

Найдите вероятность того, что:

а) ошибка округления по абсолютной величине не превзойдет 0,05;

б) будет по абсолютной величине больше среднего квадратичного отклонения.

Решение. Ошибка округления X может изменяться в пределах от $-0,1$ до $+0,1$, тогда ($b - a = 0,2$; $a = -0,1$; $b = 0,1$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,2} = 5 & \text{если } x \in [-0,1; 0,1] \\ 0 & \text{если } x \notin [-0,1; 0,1] \end{cases}$$

$$\text{а) } P(|x| \leq 0,05) = \int_{-0,05}^{0,05} f(x) dx = 5 \cdot \left|_{-0,05}^{0,05} x \right| = 0,5,$$

$$\text{б) } D(x) = (b - a)^2 / 12 = 0,2^2 / 12 \approx 0,0033,$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \approx 0,0577,$$

$$P(|x| > \sigma) = 1 - P(|x| \leq \sigma) = 1 - \int_{-0,0577}^{0,0577} f(x) dx = 0,423.$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{если } x \geq 0 \\ 0 & \text{если } x < 0 \end{cases},$$

где $\lambda > 0$ – параметр экспоненциального распределения, постоянная положительная величина.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X , имеющей показательное распределение, равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X , распределенной по показательному закону:

$$P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Числовые характеристики показательного распределения

Математическое ожидание

$$M(x) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия

$$D(x) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(x)]^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - 1/\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = 1/\lambda, \text{ следовательно } M(x) = \sigma(x) = 1/\lambda.$$

Коэффициент асимметрии

$$S_k = \mu_3 / \sigma^3 = 2,$$

Третий центральный момент:

$$\mu_3 = \lambda \int_0^{\infty} [(x-1)/\lambda]^3 e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda^3.$$

Асимметрия показательного распределения – положительна.

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. Интервал времени t между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное

распределение с параметром равным интенсивности потока:
 $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$

Элементом называют некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное». Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а в момент t происходит отказ. Обозначим через T – непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы элемента, а через λ – интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Часто длительность:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (\lambda > 0)$$

функция распределения которого определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t .

Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t – это вероятность противоположного события $T > t$ равна

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительности t :

$$R(t) = P(T > t), \quad R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Пример 2. Длительность времени безотказной работы элемента имеет распределение $F(t) = 1 - e^{-0,01t}, t > 0$. Найдите вероятность того, что за время $t=50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Так как функция распределения $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за время t , то:

$$F(50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = 1 - 0,606 = 0,394.$$

б) События «элемент откажет» и «элемент не откажет» – противоположные, поэтому вероятность того, что элемент не откажет

$$P = 1 - 0,394 = 0,606.$$

Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь функцией надежности, которая определяет вероятность безотказной работы элемента за время t :

$$R(50) = e^{-0,01 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,606.$$

Свойства показательного закона надежности

1. Функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время t .

2. Функция надежности $F(t)$ определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t :

$$R(t) = P(T > t).$$

3. Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством, если время безотказной работы имеет показательное распределение:

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Показательный закон удобен и прост для решения многих практических задач, так как обладает следующим важным свойством: вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивности отказов).

В приложениях теории вероятностей показательное распределение – одно из основных, распределений в теориях: надежности, массового обслуживания; марковских случайных процессов.

Особенность показательного распределения состоит в том, что оно определяется только одним параметром λ , это указывает на его преимущество по сравнению с другими распределениями, зависящими от большого числа параметров.

Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a – математическое ожидание; σ – среднее квадратическое отклонение;

Функция распределения $F(x)$ равна:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, то есть

$$M(x) = a,$$

а ее дисперсия – параметру σ^2 , то есть:

$$D(x) = \sigma^2;$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sigma,$$

то есть параметр σ есть не что иное как среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Размерности математического ожидания и среднего квадратического отклонения совпадают с размерностью случайной величины X .

Центральные моменты нормального распределения можно вычислить из рекуррентного уравнения:

$$\mu_{k+2} = (k+1) \cdot \sigma^2 \cdot \mu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = 1.$$

Отсюда следует, что все центральные моменты нечетного порядка равны нулю ($\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \dots = 0$). Асимметрия и эксцесс равны нулю. Мода равна медиане и равна математическому ожиданию.

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, называется *стандартным или нормированным нормальным распределением*, что принято обозначать: $X \sim N(0;1)$.

Плотность $\varphi(x)$ стандартного нормального распределения называется функцией Гаусса:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

она табулирована и есть во всех книгах по теории вероятностей.

Функция нормированного распределения (ее тоже называют функцией Лапласа) равна:

$$F_0(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Функция нормированного распределения связана с функцией Лапласа соотношением $\Phi(x) = 0,5 + \Phi_0(x)$,

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – нормированная функция Лапласа («интеграл вероятностей»), для которой составлены таблицы.

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал от α до β выражается простой формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \quad (7.1)$$

Функция Лапласа $\Phi_0(x)$ имеет следующие свойства:

- 1) $\Phi_0(x=0) = 0$;
- 2) $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ – нечетная функция;
- 3) $\Phi_0(+\infty) = 0,5 = 1/2$; $\Phi_0(-\infty) = -0,5 = -1/2$.

В случае произвольных значений параметров a и σ^2 функция распределения $F(x)$ связана с функцией Лапласа соотношением:

$$F(x) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{x - a}{\sigma}\right).$$

В практических задачах часто приходится вычислять вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа (δ), то есть требуется найти вероятность осуществления неравенства $(|x - a| < \delta)$.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ :

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi_0(\delta/\sigma). \quad (7.2)$$

В частности при $a = 0$ справедливо равенство:

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi_0(\delta/\sigma).$$

Пример 3. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma = 10$ мм. Производится 3 независимых измерения детали. Найдите вероятность того, что ошибка (погрешность) хотя бы одного измерения не превосходит по модулю 2 мм.

Решение. По формуле (7.2) находим:

$$P(|x - a| < 2) = 2\Phi_0\left(\frac{2}{10}\right) \approx 2 \cdot 0,07926 = 0,15852.$$

Вероятность того, что эта ошибка превышает 2 мм в одном опыте (измерении), равна

$$P(|x - a| > 2) = 1 - P(|x - a| < 2) = 0,84148.$$

По теореме умножения вероятность того, что во всех трех опытах ошибка измерения превышает 2 мм, равна $0,84148^3 \approx 0,5958$. Следовательно, искомая вероятность равна $1 - 0,5958 = 0,4042$.

Нормальное распределение имеет широкое распространение в прикладных задачах. Это связано с тем, что в реальности многие исследуемые случайные величины являются следствием различных случайных событий. В частности, при достаточно общих предположениях сумма большого числа независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному. Примеры практического применения:

1. Ошибка измерения, например, взвешивание на точных аналитических весах.
2. Ошибка стрельбы – координаты точки попадания X , Y в системе координат, связанных с точкой прицеливания 0.
3. Ошибки выполнения команд автоматизированным устройством.
4. Ошибки параметров элементов вычислительной техники.

5. Множество других «ошибок», сопровождающих целенаправленную деятельность человека.

Примеры решения типовых задач

Пример 4. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти плотность распределения $f(x)$ случайной величины T – времени, в течение которого ему придется ждать поезда, ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что ждать придется не больше полминуты.

Решение. $f(x) = 1/2 \quad (0 < x < 2); \quad P\left\{T < \frac{1}{2}\right\} = 1/4,$

$$D(t) = 2^2/12 = 1/3; \quad M(t) = (2 + 0)/2 = 1; \quad \sigma(t) = \sqrt{3}/3.$$

Пример 5. Случайная величина X распределена равномерно на участке (a, b) . Найдите вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания, больше чем на $3\sigma(x)$.

Решение. Находим $\sigma(x) = (b - a)/(2\sqrt{3}); \quad 3\sigma(x) = \frac{3(b - a)}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}(b - a)/2.$

Но при равномерном распределении на участке (a, b) крайние точки a и b , ограничивающие участок возможных значений случайной величины, отстоят от ее математического ожидания $M(x) = (a + b)/2$ на расстояние $(b - a)/2$, которое меньше, чем $\sqrt{3}(b - a)/2$; следовательно, $P\{|X - M(x)| > 3\sigma(x)\} = 0.$

Пример 6. Время работы прибора – случайная величина с показательным распределением. Известно, что среднее время работы прибора данного типа равно 400 часов. Найдите вероятность того, что прибор будет работать не менее 500 часов.

Решение. По условию задачи имеем, что $M(x) = 400$ час., следовательно $\lambda = 1/400$. Искомая вероятность:

$$\begin{aligned} P(x \geq 500) &= 1 - P(x < 500) = 1 - \int_0^{500} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \Big|_0^{500} = \\ &= 1 - \left(1 - e^{-500/400}\right) = e^{-1,25} \approx 0,287. \end{aligned}$$

Значения функции e^{-x} находят по таблицам.

Вероятность попадания в заданный интервал показательного распределенной случайной величины, заданной функцией распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x > 0)$$

Используя известную уже нам формулу:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a),$$

учитывая, что $F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$ получим:

$$P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Пример 7. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал $(0,3; 1)$.

Решение. По условию $\lambda=2$, $a=0,3$; $b=1$. По формуле:

$$P(0,3 < x < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx 0,41.$$

Пример 8. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность события $\{1 < X < 2\}$.

Решение. Имеем $F(x) = 1 - e^{-2x}$ ($x > 0$). Вероятность попадания на участок $(1;2)$ равна приращению функции распределения на этом участке:

$$P\{1 < X < 2\} = F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,368 - 0,135 = 0,233.$$

Пример 9. Время безотказной работы ЭВМ – случайная величина T , имеющая показательное распределение с параметром λ (физический смысл величины λ – среднее число отказов в единицу времени, если не считать

простоев ЭВМ для ремонта). Известно, что ЭВМ уже проработала без отказов время τ . Найдите при этом условия плотности распределения $f_{\tau}(t)$ времени T_{τ} , которое проработает ЭВМ после момента τ до ближайшего отказа.

Решение. Так как простейший поток отказов не имеет последствий, вероятность появления хотя бы одного отказа на участке от τ до $\tau \pm t$ не зависит от того, появлялись ли отказы ранее момента τ :

$$F_{\tau}(t) = P\{T_{\tau} < t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad f_{\tau}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

то есть распределение времени, оставшегося до следующего отказа, не зависит от того, сколько времени ЭВМ уже проработала безотказно.

Пример 10. Три непрерывные случайные величины имеют различные распределения: а) равномерное; б) экспоненциальное; в) нормальное. Для всех трех распределений $M(X_i) = \sigma(X_i) = 4$.

Найдите для всех законов распределения вероятность того, что в результате испытания СВ X_i примет значение, заключенное в интервале (5; 12)

Решение. а) Равномерное распределение

Параметры a и b для равномерного распределения найдем из условия

$$M(X_i) = \frac{b+a}{2} = 4, \quad D(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = 4^2, \text{ отсюда}$$

$$\begin{cases} b+a=8 \\ (b-a)^2=192 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим

$$a = 4(1 - \sqrt{3}) \cong 2,93; \quad b = 4(1 + \sqrt{3}) \cong 10,93.$$

При извлечении квадратного корня во втором уравнении системы взят знак «+» с учетом того, что $a < b$.

Имеем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 4(1 - \sqrt{3}), \\ \frac{1}{8\sqrt{3}} & \text{при } 4(1 - \sqrt{3}) \leq x \leq 4(1 + \sqrt{3}), \\ 0 & \text{при } x > 4(1 + \sqrt{3}). \end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X_i в интервале $(\alpha; \beta)$ определяем по формуле:

$$\begin{aligned} P(5 < X_i < 12) &= \int_5^{12} f(x) \cdot dx = \int_5^{4(1+\sqrt{3})} \frac{1}{8\sqrt{3}} dx + \int_{4(1+\sqrt{3})}^{12} 0 \cdot dx = \frac{1}{8\sqrt{3}} x \Big|_5^{4(1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{3}} (4 + 4\sqrt{3} - 5) = 0,428. \end{aligned}$$

б) *Экспоненциальное распределение*

Интегральная функция экспоненциального распределения СВ X_2 имеет вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Известно, что $M(X_2) = 1/\lambda$ или $1/\lambda = 4$ по условию. Отсюда $\lambda = 0,25$. Тогда

$$F(x) = 1 - e^{-0,25x}.$$

Искомая вероятность:

$$P(5 < X_2 < 12) = e^{-0,25 \cdot 5} - e^{-0,25 \cdot 12} = e^{-1,25} - e^{-3} = 0,2367.$$

в) *Нормальное распределение*

Вероятность того, что СВ X_3 , подчиненная нормальному закону распределения, попадет в интервал $(\alpha; \beta)$, равна:

$$P(\alpha < X_3 < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Так как по условию задачи $a = \sigma = 4$, то искомая вероятность равна:

$$P(5 < X_3 < 12) = \Phi_0\left(\frac{15-4}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{5-4}{4}\right) = \Phi_0(2) - \Phi_0\left(\frac{1}{4}\right).$$

Находим по таблицам, что:

$$\begin{aligned} \Phi_0(2) &= 0,4772; \quad \Phi_0\left(\frac{1}{4}\right) = \Phi_0(0,25) = 0,0987. \\ P(5 < X_3 < 12) &= 0,4772 - 0,0987 = 0,3785. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях случайная величина имеет равномерный закон распределения?
2. Чему равны плотность и функция распределения при равномерном законе распределения?
3. Приведите примеры практического применения равномерного, показательного и нормального законов распределения.
4. Какова особенность показательного распределения?
5. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону?
6. Сформулируйте понятие нормального закона распределения.
7. Какой закон распределения называют стандартным или нормированным?
8. Перечислите свойства случайной величины распределенной по нормальному закону.
9. Чему равны коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределенной по нормальному закону?

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Случайная точка A имеет в круге радиусом R равномерное распределение. Найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния ρ точки до центра круга. Показать, что величина ρ^2 равномерно распределена на отрезке $[0, R^2]$.

7.2. Случайная величина равномерно распределена на отрезке $[2; 6]$. Вычислить плотность распределения. Найти функцию распределения. Найдите вероятность попадания случайной величины на отрезок $[2; 5]$ и на отрезок $[5; 7]$.

7.3. Плотность распределения случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}cx & \text{при } x \geq 1 \\ 0 & \text{при } x < 1 \end{cases}$$

Найдите постоянную c , плотность распределения $\eta = 1/X$ и вероятность $P(0,25 < \eta < 0,64)$.

7.4. Время безотказной работы ЭВМ распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0,05$ (отказа в час), то есть имеет функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0,05e^{-0,05x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решение определенной задачи требует безотказной работы машины в течение 15 минут. Если за время решения задачи произошел сбой, то ошибка обнаруживается только по окончании решения, и задача решается заново. Найдите: а) вероятность того, что за время решения задачи не произойдет ни одного сбоя; б) среднее время, за которое будет решена задача.

7.5. Стержень длиной 24 см ломают на две части; будем считать, что точка излома распределена равномерно по всей длине стержня. Чему равна средняя длина большей части стержня?

7.6. Отрезок длиной 12 см случайным образом разрезается на две части. Точка разреза равномерно распределена по всей длине отрезка. Чему равна средняя длина малой части отрезка?

7.7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1; 3]$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = X^2 + 1$.

7.8. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1; 1]$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln(x + 2)$.

9. Случайная величина X имеет функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1. \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найдите функцию распределения случайной величины $\eta = 1/1 - X$.

10. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение). Найти плотность случайной величины $\eta = X^2$.

11. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ . Найдите функции плотности распределения случайных величин:

$$\text{а) } \eta_1 = \lambda X; \text{ б) } \eta_2 = X^2; \text{ в) } \eta_3 = \sqrt{X}; \text{ г) } \eta_4 = 1 - e^{-\lambda X}.$$

12. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Найдите плотности распределения случайных величин: а) $\eta_1 = 2X + 1$; б) $\eta_2 = -\ln(1 - X)$; в) $\eta_3 = \operatorname{tg}\left(\pi\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)$.

13. Покажите, что если X имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = P(X < x)$, то случайная величина $\eta = F(X)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$.

14. Найдите функцию плотности и функцию распределения суммы двух независимых величин ξ и η с равномерными законами распределения на отрезках $[1; 3]$ и $[0; 1]$ соответственно.

15. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках $[0; 2]$ и $[3; 4]$ соответственно. Вычислите функцию и плотность суммы $\xi + \eta$.

16. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках $[0; 4]$ и $[1; 2]$ соответственно. Вычислите функцию и плотность суммы $\xi + \eta$.

17. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках $[1; 3]$ и $[2; 4]$ соответственно. Вычислите плотность суммы $\xi + \eta$.

18. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют показательное распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения их суммы.

19. Найдите распределение суммы независимых случайных величин ξ и η , где ξ имеет равномерное на отрезке $[0; 1]$ распределение, а η имеет показательное распределение с параметром λ .

20. Найдите $P(|X - M(X)| < 3\sqrt{D(X)})$, если X имеет: а) нормальное распределение с параметрами a и σ^2 ; б) показательное распределение с параметром λ ; в) равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$.

21. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках $[0; 1]$ и $[-1; 1]$. Найдите вероятность $P(\xi\eta \leq 1/2)$.

22. Двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ равномерно распределена в квадрате с вершинами $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$. Найдите значение совместной функции распределения в точке $(1; -1)$.

23. Случайный вектор $(\xi; \eta)$ равномерно распределен внутри круга с радиусом $r = 3$ и с центром в начале координат. Вычислите вероятность $P(\xi > 0, \eta > 0)$.

24. Случайные величины ξ и η независимы и распределены по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найдите $P\{2\xi + \eta < 2\}$.

25. Найдите абсциссы точек перегиба, кривой распределения $f(x)$ нормального закона.

ЗАНЯТИЕ № 8

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель: сформировать навыки практического применения предельных теорем теории вероятностей.

Основные теоретические положения

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний над ними. Предельные теоремы условно делятся на две группы. Первая группа теорем, условно называемая законом больших чисел, устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с достаточной точностью. Вторая группа теорем, называемая центральной предельной теоремой, устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному.

Неравенство Чебышева. Рассмотрим сначала неравенство Чебышева, которое можно использовать для грубой оценки вероятностей событий, связанных со случайными величинами, распределение которых неизвестно.

Если СВ X имеет математическое ожидание $M(X) = a$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева, которое устанавливает верхнюю границу вероятности события:

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq D(X)/\varepsilon^2. \quad (8.1)$$

Неравенство Чебышева можно записать и в другой форме, в которой оно устанавливает нижнюю границу вероятности события:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2. \quad (8.2)$$

Неравенство Чебышева справедливо для любых случайных величин. В частности для СВ $X=m$, имеющей биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X) = a = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, оно принимает вид:

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geq 1 - npq/\varepsilon^2. \quad (8.3)$$

Для частности m/n события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью $p = M(m/n) = a$, дисперсия которых $D(m/n) = pq/n$, неравенство Чебышева имеет вид:

$$P\{|m/n - p| < \varepsilon\} \geq 1 - pq/n\varepsilon^2 \quad (8.4)$$

Оценку попадания СВ X в промежуток (ε, ∞) дает неравенство Маркова.

Теорема. Для любой неотрицательной СВ X , имеющей математическое ожидание $M(X)$ и $\varepsilon > 0$, справедливо неравенство:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq M(X)/\varepsilon, \quad (8.5)$$

которое можно записать в форме:

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - M(X)/\varepsilon. \quad (8.6)$$

Пример 1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение случайной величины X от своего математического ожидания будет меньше трех средних квадратических отклонений, т.е. меньше $3\sigma(X)$.

Решение. Полагая $\varepsilon = 3\sigma(X)$ в формуле (8.2), получаем

$$P\{|X - M(X)| \geq 3\sigma(X)\} \leq \sigma^2(X)/(3\sigma(X))^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \approx 0,8889.$$

Эта оценка, как известно, называется правилом трех сигм; для случайной величины $X \sim N(a, \sigma)$ эта вероятность равна 0,9973.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Основное утверждение закона больших чисел содержится в теореме Чебышева. В ней и других теоремах ЗБЧ используется понятие «сходимости случайных величин по вероятности».

Теорема Чебышева. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и существует такое число $C > 0$, что $D(X_i) \leq C, i = 1, 2, \dots$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad (8.7)$$

то есть среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математического ожидания:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i). \quad (8.8)$$

Если СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены, $M(X_i) = a, D(X_i) = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (8.9)$$

Следствие (8.9) теоремы Чебышева обосновывает «принцип среднего арифметического случайной величины X_i », постоянно используемый на практике. Так, пусть произведено n независимых измерений некоторой величины, истинное значение которой a (оно неизвестно). Результат каждого измерения есть случайная величина X_i . Согласно следствию (8.9), в качестве приближенного значения величины a можно взять среднее арифметическое результатов измерений:

$$a \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$$

Равенство тем точнее, чем больше n .

Теорема Чебышева подтверждает связь между случайностью и необходимостью: среднее значение случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

практически не отличается от неслучайной величины

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i).$$

Пример 2. Глубина моря измеряется прибором, не имеющим систематической ошибки. Среднее квадратическое отклонение измерений не превосходит 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы

с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a (глубины моря) по модулю меньше, чем на 5 м?

Решение. Обозначим через X_i результаты n независимых измерений глубины моря. Нужно найти число n , которое удовлетворяет неравенству:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где $M(X_i) = a$, что означает отсутствие при измерениях систематической ошибки (то есть измерения проводятся с одинаковой точностью).

По условию $\varepsilon = 5$, $C = 225$, так как $\sigma = \sqrt{D(X)} = 15$ м. Отсюда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - a\right| < 5\right\} \geq 1 - \frac{225}{25n} \geq 0,9,$$

то есть $0,1 \geq 9/n$, $n \geq 90$. Измерение нужно проводить не менее 90 раз.

Теорема Бернулли. Если вероятность появления события A в одном испытании равна p , число наступления этого события при n независимых испытаниях равно m , то для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad (8.10)$$

То есть относительная частота $P^*(A)$ события A сходится по вероятности к вероятности p события A : $P^*(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} P(A)$.

Эта теорема является первой и наиболее простой формой закона больших чисел. Теорема Бернулли теоретически обосновывает возможность приближенного вычисления вероятности события с помощью его относительной частоты.

Неравенство Чебышева (8.2) для случайных величин

$$m = \sum_{i=1}^n X_i$$

принимает вид:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \quad (8.11)$$

Обобщением теоремы Бернулли на случай, когда вероятности p_i появления события A в каждом из n испытаний различны, является теорема Пуассона:

$$P^*(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i, \quad (8.12)$$

где p_i – вероятность события A в i -том испытании.

Пример 3. Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи равна 0,2. Оцените вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частота появления опечатки отличается от соответствующей вероятности по модулю меньше, чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся формулой (8.11). В данном случае $p = 0,2$, $q = 0,8$, $n = 400$, $\varepsilon = 0,05$. Имеем:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,2\right| < 0,05\right\} \geq \left[1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}\right] = 1 - \frac{0,2 \cdot 0,8}{400 \cdot 0,05^2} = 0,84,$$

то есть $p \geq 0,84$.

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой вторую группу предельных теорем, которые устанавливают связь между законом распределения суммы случайной величины и его предельной формой – нормальным законом распределения.

Сформулируем ЦПТ для случая, когда члены суммы имеют одинаковое распределение (именно эта теорема чаще других используется на практике, так в математической статистике выборочные случайные величины имеют одинаковые распределения, так как получены из одной и той же генеральной совокупности).

Теорема. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $M(X_i) = a$ и дисперсию $D(X_i) = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$. Тогда функция распределения централизованной и нормированной суммы этих случайных величин стремится при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения стандартной случайной величины:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{a\sqrt{n}}, \quad (8.13)$$

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Из соотношения (8.13) следует, что при достаточно большом n сумма Z_n приближенно распределена по нормальному закону: $Z_n \sim N(0,1)$. Это означает, что сумма $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Говорят, что при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\sum_{i=1}^n X_i$ асимптотически нормальна.

Напомним, что:

1. Случайная величина X называется центрированной и нормированной (то есть стандартной), если $M(X) = 0$, а $D(X) = 1$.

2. Если случайная величина $X_i, i = \overline{1, n}$ независимы, $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$,

то

$$M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = a + a + \dots + a = na$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2 = n\sigma^2$$

$$3. \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа}; \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x),$$

где $\Phi_0(x)$ – нормированная функция Лапласа.

Формула (8.13) позволяет при больших n вычислять вероятности различных событий, связанных с суммами случайных величин. Так, перейдя от случайной величины S_n к стандартной случайной величине, получим:

$$P\{\alpha \leq S_n \leq \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\right). \quad (8.14)$$

Формула (8.14) для определения вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах. Часто ЦПТ используют, если $n > 10$.

Пример 4. Независимые случайные величины X_i распределены равномерно на отрезке $[0,1]$. Найдите закон распределения случайных величин $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, а также вероятность того, что $55 < Y < 70$.

Решение. Условия ЦПТ соблюдаются, поэтому случайная величина Y имеет приближенно плотность распределения:

$$f(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(y)} e^{-\frac{(y-m(y))^2}{2\sigma^2(y)}}.$$

По известным формулам для математического ожидания и дисперсии в случае равномерного распределения находим:

$$M(X_i) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}; \quad D(X_i) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}; \quad \sigma(X_i) = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$m(y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$$

$$\sigma^2(y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3}; \quad \sigma(y) = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Поэтому

$$f(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}.$$

Используя формулу (8.14), находим

$$\begin{aligned} P\{55 < Y < 70\} &= \Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \Phi(4\sqrt{3}) - \Phi(\sqrt{3}) = \\ &= \Phi(6,9282) - \Phi(1,73) \approx 0,04 \end{aligned}$$

то есть $P\{55 < Y < 70\} \approx 0,04$.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Следствиями ЦПТ являются рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

$$P\left\{\frac{n_A - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \rightarrow \Phi(x) \quad (8.15)$$

для схемы Бернулли непосредственно вытекает из ЦПТ (8.13) с учетом:

$$m = \sum_{i=1}^n X_i; M(X_i) = p; D(X_i) = pq; \text{ тогда } na = np, \sigma\sqrt{n} = \sqrt{pq}\sqrt{n} = \sqrt{npq}.$$

Для подсчета сумм биномиальных вероятностей можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sum_{k=0}^m P_{n,k} \approx \Phi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (8.16)$$

Пример 5. Машинистке требуется напечатать текст, содержащий 8000 слов, состоящих из четырех и более букв. Вероятность сделать ошибку в любом из этих слов равна 0,01. Какова вероятность, что при печатании будет сделано не более 90 ошибок?

Решение. Применим формулу (8.16). Так как $n = 8000$, $p = 0,01$, $q = 0,99$, $m = 90$, то

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{8000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} = \frac{1}{\sqrt{79,2}} \approx 0,112,$$

$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{10}{8,9} \approx 1,12.$$

$$\Phi(1,12) = 0,8686. \text{ Следовательно, } P\{n_a \leq 90\} = \sum_{k=0}^{90} P_{n,k} \approx 0,869.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ .

Вероятность невыполнения «правила трех сигма»

$$P\{|X - a| > 3\sigma\} = 1 - P\{|X - a| < 3\sigma\} = 1 - 2\Phi_0(3\sigma/\sigma) = 1 - 2\Phi_0(3),$$

где $\Phi_0(x)$ – функция Лапласа.

По таблице значений функции Лапласа имеем $\Phi_0(3) \approx 0,49865$, откуда

$$P\{|X - a| > 3\sigma\} \approx 1 - 2 \cdot 0,49865 = 0,0027,$$

то есть для нормального закона только ничтожная доля значений СВ (менее 0,3 %) выходит за пределы интервала $a \pm 3\sigma$.

Пример 7. Имеется n идентичных технических устройств (ТУ), время безотказной работы каждого i -го из которых – случайная величина T_i , распределенная по показательному закону с параметром λ , одинаковым для всех ТУ. Число n собранных в такую систему ТУ достаточно велико. Случайные величины $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ независимы между собой. В случае отказа i -го ТУ происходит мгновенное и безотказное переключение на следующие по порядку $(i + 1)$ -е ТУ ($i + 1 \leq n$). Общее время T безотказной работы системы ТУ равно сумме времен T_i : $T = \sum_{i=1}^n T_i$.

Найдите приближенно вероятность того, что система ТУ проработает безотказно время, не меньшее заданного τ : $P\{T \geq \tau\} = P\{T > \tau\}$. Поскольку СВ T непрерывна, знак равенства можно отбросить.

Решение. Согласно центральной предельной теореме для одинаково распределенных слагаемых, с.в. T будет распределяться приближенно по нормальному закону с параметрами:

$$a = M(T) = \sum_{i=1}^n M(T_i) = \frac{n}{\lambda}; \quad D(T) = \sum_{i=1}^n D(T_i) = \frac{n}{\lambda^2}; \quad \sigma = \sigma(T) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$$

Находим приближенно вероятность

$$P\{T > \tau\} = 1 - P\{T < \tau\} = 1 - F(\tau),$$

где $F(\tau)$ – функция нормального распределения с параметрами $a = n/\lambda$; $\sigma = \sqrt{n}/\lambda$

Для нормального закона функция распределения равна

$$F(\tau) = 0,5 + \Phi_0((\tau - a)/\sigma) = 0,5 + \Phi_0((\tau - n/\lambda)/(\sqrt{n}/\lambda)),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа.

$$\text{Поэтому } P\{T > \tau\} = 1 - F(\tau) = 0,5 - \Phi_0((\lambda\tau - n)/\sqrt{n}).$$

Пример 8. Станок с числовым программным управлением выдает за смену $n = 1000$ изделий, из которых в среднем 2 % дефектных. Найдите приближенно вероятность того, что за смену будет изготовлено не менее 970 доброкачественных (недефектных) изделий, если изделия оказываются доброкачественными независимо друг от друга.

Решение. Вероятность p изготовления доброкачественного изделия: $p = 0,98$, Y – число доброкачественных изделий; число независимых опытов $n = 1000$. Проверяем, выполнены ли условия:

$$np - 3\sqrt{npq} > 0; \quad np + 3\sqrt{npq} < n;$$

находим: $M(Y) = np = 980$; $\sigma(Y) = \sqrt{npq} \approx 4,43$;
 $np - 3\sigma(Y) \approx 980 - 13,3 > 0$; $np + 3\sigma(Y) < 1000$.

Следовательно, пользоваться нормальным законом можно; применяя теорему Лапласа в форме:

$$P\{\alpha < Y_n < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

находим $P\{Y \geq 970\} = P\{970 \leq Y < \infty\} = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{970 - 980}{4,43}\right) \approx 0,988$.

Итак, искомая вероятность достаточно велика (равна 0,988), но все же с вероятностью 0,012 можно ожидать, что число доброкачественных изделий за смену будет меньше, чем 970.

Пример 9. Железнодорожный состав состоит из n вагонов; масса каждого вагона в тоннах – случайная величина X с м.о. $M(X)$ и с.к.о. $\sigma(X)$. Число вагонов n – большое (несколько десятков). Локомотив может перевозить не больше $q(t)$; если масса состава больше $q(t)$, приходится прицеплять второй локомотив. Найдите вероятность того, что одного локомотива не хватит для перевозки состава.

Решение. Обозначим $Q = \sum_{i=1}^n X_i$ масса состава. На основании центральной предельной теоремы при достаточно большом n с.в. Q распределена приближенно по нормальному закону с параметрами:

$$M(q) = nM(X); \quad \sigma(q) = \sqrt{D(q)} = \sqrt{n\sigma^2(X)} = \sqrt{n}\sigma(X).$$

Искомая вероятность равна единице минус функция распределения случайной величины Q :

$$P\{Q > q\} = 1 - \left[0,5 + \Phi_0\left(\frac{(q - M(X)n)}{\sqrt{n}\sigma(X)}\right)\right]$$

Пример 10. Решите предыдущую задачу при условии, что состав содержит n_1 вагонов, n_2 платформ и n_3 цистерн; масса X_1 вагона имеет математическое ожидание m_1 и дисперсию D_1 , масса платформы $X_2 - m_2, D_2$, масса цистерны $X_3 - m_3, D_3$. Величины $n_1, D_1; n_2, D_2; n_3, D_3$ имеют один и тот же порядок, причем n_1, n_2, n_3 достаточно велики.

Решение. По теореме Ляпунова (условия которой выдержаны, так как число $n = n_1 + n_2 + n_3$, вообще, конечно) можно утверждать, что при достаточно большом n масса состава Q имеет приближенно нормальное распределение с характеристиками:

$$m_q = \sum_{i=1}^3 n_i m_i; \quad D_q = \sum_{i=1}^3 n_i D_i; \quad \sigma_q = \sqrt{D_q}.$$

Вероятность того, что одного локомотива не хватит для перевозки состава, приближенно подсчитывается по формуле :

$$P\{Q > q\} \approx 0,5 - \Phi((q - m_q)/\sigma_q).$$

Контрольные вопросы

1. Что понимают под законом больших чисел?
2. Что устанавливает центральная предельная теорема?
3. Сформулируйте теорему Чебышева.
4. На какой теореме основан применяемый в статистике выборочный метод?
5. Между какими параметрами устанавливает связь центральная предельная теорема?

Задачи для самостоятельного решения

1. В 400 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов не превысит 20.
2. В продукции цеха детали отличного качества составляют 50 %. Детали укладываются в коробки по 200 штук в каждой. Какова вероятность того, что число деталей отличного качества в коробке будет отличаться от 100 не более чем на 5?

3. Используя условия задачи 2, найдите в каких границах с вероятностью 0,997 в коробке находится число деталей отличного качества.

4. Используя условия задачи 2, определите, сколько деталей следует положить в коробку, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что число деталей отличного качества в коробке не меньше 100.

5. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов, в час пик каждый абонент использует связь в среднем в течении двух минут, то есть мы считаем, что абонент использует связь с вероятностью $p = 1/30$. Какое наименьшее число линий необходимо, чтобы только один из 100 вызовов получал отказ?

6. В продукции цеха детали отличного качества составляют 50 %. Детали укладываются в коробки по 200 штук в каждой. Какова вероятность того, что число деталей отличного качества в коробке будет отличаться от 100 не более чем на 5?

7. Используя условия задачи 1, укажите, в каких границах с вероятностью 0,997 в коробке находится число деталей отличного качества.

8. Используя условия задачи 1, определите, сколько деталей следует положить в коробку, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что число деталей отличного качества в коробке не меньше 100.

9. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов, в час пик каждый абонент использует связь в среднем в течение двух минут, то есть мы считаем, что абонент использует связь с вероятностью $p = 0,8$. Какое наименьшее число линий необходимо, чтобы только один из 100 вызовов получал отказ?

10. Средний размер вклада в отделении банка равен 6000 руб. Оцените вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 руб.

11. Среднее количество вызовов, поступающих на АТС завода в течение часа, равно 300. Оцените вероятность того, что в течение следующего часа число вызовов на коммутатор: а) превысит 400; б) будет не более 300.

12. По статистическим данным, в среднем 87 % новорожденных доживают до 50 лет. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что из 1000 новорожденных доля доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,04 (по абсолютной величине).

13. Среднее изменение курса акции компании в течение биржевых торгов составляет 0,3 %. Оцените вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более чем на 3 %.

14. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оцените вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: а) не более 200 клиентов; б) более 150 клиентов.

15. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

16. В среднем 10 % работоспособного населения некоторого региона – безработные. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11 % (включительно).

17. Опыт страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. С помощью неравенства Чебышева оцените необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине). Уточните ответ с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

18. Дисперсия каждой из 3500 независимых случайных величин равна 5. Оцените вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней математической их математических ожиданий не превысит 0,25.

19. Ежедневно новая сделка заключается с вероятностью 0,2 (но не более одной в день). За сколько дней с вероятностью 0,9 можно ожидать заключения не менее 50 сделок?

20. В продукции цеха детали отличного качества составляют 80 %. В каких пределах с вероятностью 0,99 будет находиться число деталей отличного качества, если взять 10 000 деталей? Сделайте оценку с помощью неравенства Чебышева и по теореме Муавра – Лапласа.

21. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все эти зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью 0,5 любой из входов. На сколько можно сократить число мест в гардеробе, если зрители будут приходить поодиночке и также независимо друг от друга с равной вероятностью выбирать любой из входов?

22. Аппаратура состоит из 100 одинаково надежных и независимо работающих элементов, каждый из которых может отказать в течение суток с вероятностью 0,01. На обнаружение отказавшего элемента и его замену требуется 20 мин., в течение которых аппаратура простаивает. Найдите: а) вероятность того, что время простоя в сутки будет не более 40 мин.; б) среднее время простоя аппаратуры в сутки.

ЗАНЯТИЕ № 9

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Цель: сформировать навыки решения вероятностных задач в пакете Statistica.

Вычисление вероятностей для дискретных случайных величин

Случайная величина X , имеющая биномиальное распределение $B(n, p)$, принимает значения: $0, 1, 2, \dots, n$. Распределение случайной величины X определяется следующей формулой:

$$p_k = P[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где $q = 1 - p$, C_n^k — число сочетаний из n по k , $\tilde{N}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

В пакете *STATISTICA* для вычисления вероятностей биномиального распределения используются две функции:

1. **Binom**(x ; p ; n) – вероятность того, что случайная величина X , имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p , примет значение x , то есть $P[X = x]$.

2. **IBinom**(x ; p ; n) – суммарная накопленная вероятность, $P[X \leq x]$
(аналог функции распределения в точке x), $\sum_{k=0}^{x} P[X = k]$.

Чтобы выполнить вычисления с помощью этих функций, необходимо выполнить следующие действия.

1) Запустить программу *STATISTICA* и в открывшейся электронной таблице, которая по умолчанию имеет 10 строк и 10 столбцов (10v by 10 c), увеличить число строк до 200. Для этого нужно из меню *STATISTICA Вставка* выбрать **Добавление случаев**. В появившееся диалоговое окно **Добавить регистры** (рис. 1) ввести число 190. Результат отразится в заголовке электронной таблицы (10v by 200c).

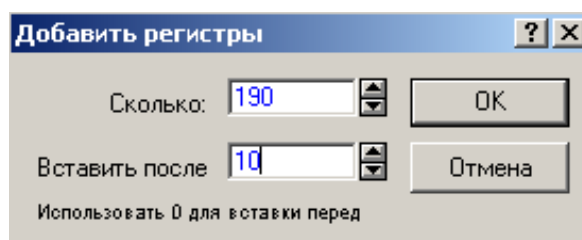


Рис. 1. Окно установки размера таблицы

2) Двойным левым щелчком по имени переменной в электронной таблице открыть окно спецификации (**Variable 1**) и в поле *длинное имя* записать функцию = **Binom** ($x; p; n$) или = **IBinom** ($x; p; n$), и задать вместо x , p и n необходимые значения (рис. 2).

Пример 1. Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0,3$. Вычислить вероятности событий: $P[X = 2]$ и $P[X \leq 4]$.

Решение. Установите курсор на **Var1** и нажмите дважды левую кнопку мыши. В открывшемся окне (рис. 2) введите функцию = **Binom** (2; 0,3; 5).

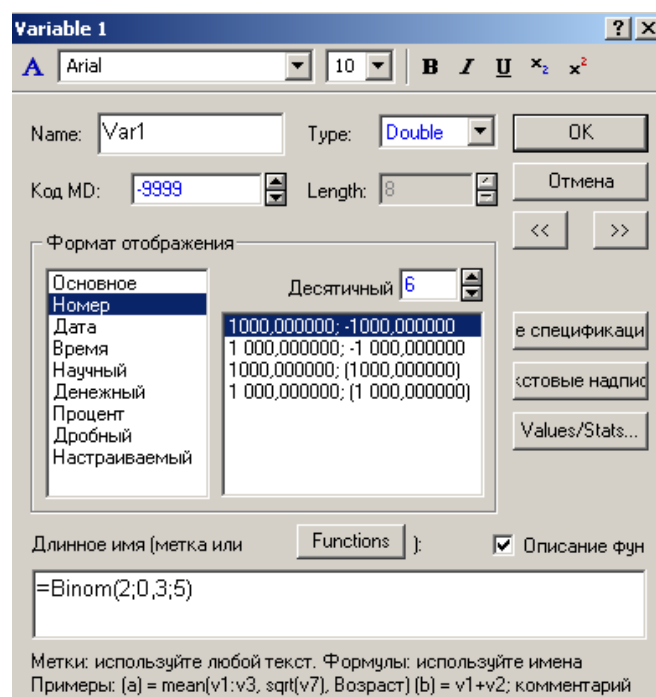


Рис. 2. Окно спецификации переменной

На экране появляется сообщение: *Expression OK. Recalculate the Variable now?* (Формула записана верно. Пересчитать переменную сейчас?). Ответ – да (рис. 3).

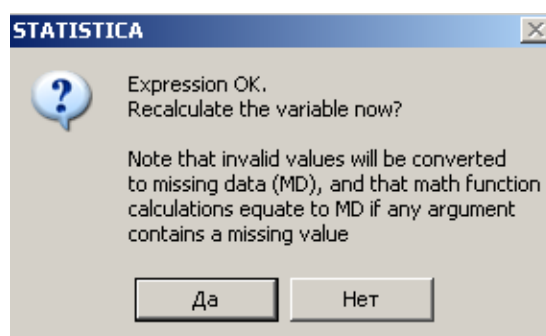


Рис. 3. Окно запроса на выполнение расчета

После выполнения расчета поле переменной **Var1** заполняются числами $0,309 = P[X = 2]$. (Проверьте!).

Аналогично, введя в поле *длинное имя* функцию = **IBinom** (4; 0,3; 5), получим $P[X \leq 4] = 0,998$.

Пример 2. Постройте график вероятностей для случайной величины X , имеющей биномиальное распределение $B(n, p)$.

Решение. Предположим, что число экспериментов $n = 15$, а вероятность появления «успеха» в одном эксперименте $p = 0,3$. Вычислим вероятности p_k появления k «успехов» в пятнадцати экспериментах по формуле биномиального распределения:

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 15 \text{ при } n = 15 \text{ и } p = 0,3.$$

Значения k определим с помощью оператора **V0**. Оператор **V0** вводит в переменную номера строк: 1, 2, 3, ... соответственно, оператор **V0-1** вводит номера строк: 0, 1, 2... .

Чтобы вычислить и занести вероятности p_k в переменную (например, **Var4**), нужно в поле *длинное имя* переменной **Var4** ввести: = **Binom** (**V0-1**; **0,3**; **15**). После пересчета по этой формуле в столбце **Var4** получим значения вероятностей: $p_0 = 0,004748$; $p_1 = 0,030520, \dots$; $p_{15} = 0,000001$. Чтобы вывести значения с такой точностью, надо увеличить число десятичных знаков, используя соответствующую кнопку на панели инструментов (см. рис. 2).

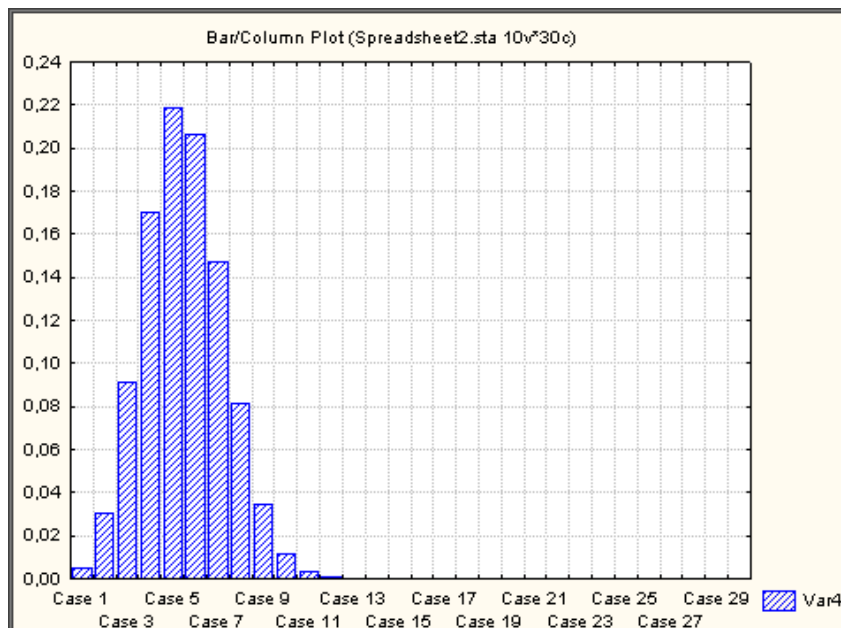


Рис. 4. Значения вероятностей биномиального распределения $B(15; 0,3)$

Для построения гистограммы, показывающей значения вероятностей биномиального распределения, необходимо в переключателе модулей главного меню выбрать **Графы→2D графы→Вычерчивания полосы / столбца**.

Установить значение выбранной переменной **Variables: Var4**, режим **Быстрый**, тип графика **обычный**, **ОК**. Полученный график показан на рис. 4.

Чтобы увидеть, как изменяются свойства биномиального распределения при увеличении числа экспериментов, увеличим значение n с 15 до 50.

Для этого в поле **длинное имя** переменной **Var4** установим: = **Binom (V0-I; 0,3; 50)**. После пересчета построим график (рис. 5).

Распределение на рис. 5 по своему виду близко к нормальному распределению с математическим ожиданием $m = 50 \cdot 0,3 = 15$ (вспомните теорему Муавра-Лапласа).

$$Poisson(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P[X = k], k = 0, 1, 2, \dots$$

$$Geom(k;p) = P[X=k] = (1-p)^{k-1} \cdot p, k = 0, 1, 2, \dots$$

С помощью функций **IPoisson (k; λ)** и **IGeom (x;p)** вычисляются соответствующие накопленные вероятности: $P[X \leq x]$.

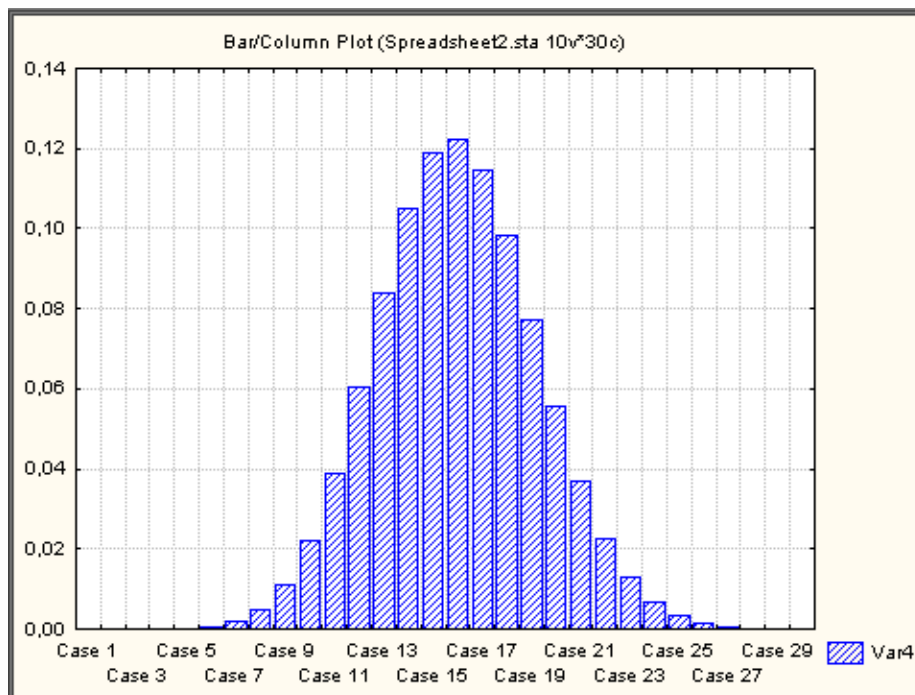


Рис. 5. Значения вероятностей биномиального распределения **B** (50; 0,3).

Задание

1. Постройте график для вероятностей биномиального распределения $B(50; 0,01)$. Убедитесь, что полученное распределение близко к распределению Пуассона с параметром $\lambda = 50 \cdot 0,01 = 0,5$.

2. Партия изделий содержит 10 % нестандартных. Случайная величина X – число нестандартных в выборке из 25 изделий. Найдите вероятности событий: 1) стандартных изделий – 20; 2) нестандартных изделий не более – 5; 3) Найти закон распределения случайной величины X .

3. В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью $p = 1/6$. Вероятность появления более одного судна в течение суток пренебрежимо мала. Какова вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят не более 4 судов; не посетит ни одного судна? Найдите закон распределения случайного появления судна в течение месяца.

4. Шанс на выигрыш в одном сеансе игры с игральным автоматом составляет 1 к 10, а денег хватает только на оплату десяти сеансов игры. Найдите вероятность того, что в десяти сеансах не будет ни одного выигрыша. Какова вероятность получить выигрыш в пятом сеансе? Найдите закон распределения случайной величины X – числа проведенных сеансов до первого выигрыша.

**Вычисление вероятностей и квантилей
для непрерывных случайных величин**

Для непрерывных распределений, например, нормального, вычисляются три функции:

$$1. \textbf{Normal} (x; m; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = f(x),$$

где $f(x)$ – значение плотности нормального распределения $N(m, \sigma^2)$ в точке x , m – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия, σ – среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

$$2. \textbf{Inormal} (x; m; \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = F(x),$$

где $F(x)$ – значение функции нормального распределения $N(m, \sigma^2)$ в точке x .

3. **Vnormal** ($x; m; \sigma$) – значение функции обратной к функции **Inormal** ($x; m; \sigma$) в точке x . Обратная функция к функции распределения используется

для вычисления квантилей и моделирования распределений случайных величин.

Квантиль распределения случайной величины X порядка p , $[0 < p < 1]$ будет обозначаться x_p . Для непрерывной случайной величины X , x_p есть решение уравнения: $F(x_p) = p$ или $P[X < x_p] = p$.

Пример 3. Использование плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ для построения графиков.

Построим соответствующие графики для $X \sim N(m = 7, \sigma^2 = 4)$ – случайной величины, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием $m = 7$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Для построения графиков $f(x)$ и $F(x)$ нужно задать сетку значений x с постоянным шагом. Для этого в файле данных для **Var1** в поле *длинное имя* введите формулу $= (V0-7)/10$. Напомним, что оператор **V0** вводит номера строк: 1, 2, ..., 100. После пересчета по этой формуле в переменной **Var1** получим значения x : - 0,6; - 0,5; - 0,3; ...

Для переменных **Var2** и **Var3** в поле *длинное имя* соответственно введем формулы: $= \text{Normal}(V1; 7; 2)$ и $= \text{INormal}(V1; 7; 2)$. После пересчета в переменной **Var2** получим значение плотности распределения, а в **Var3** – значение функции распределения.

Чтобы построить графики в переключателе модулей главного меню выберем **Графы** → **2D Графы** → **Точечные вычерчивания**. В открывшемся диалоговом окне (рис. 6) выбираем режим *расширенный*, тип графика – **Double-Y**, **Fit–выключение**, установим значения переменных: **X–Var1**; **Left Y–Var2**; **Right Y–Var3**, **OK**.

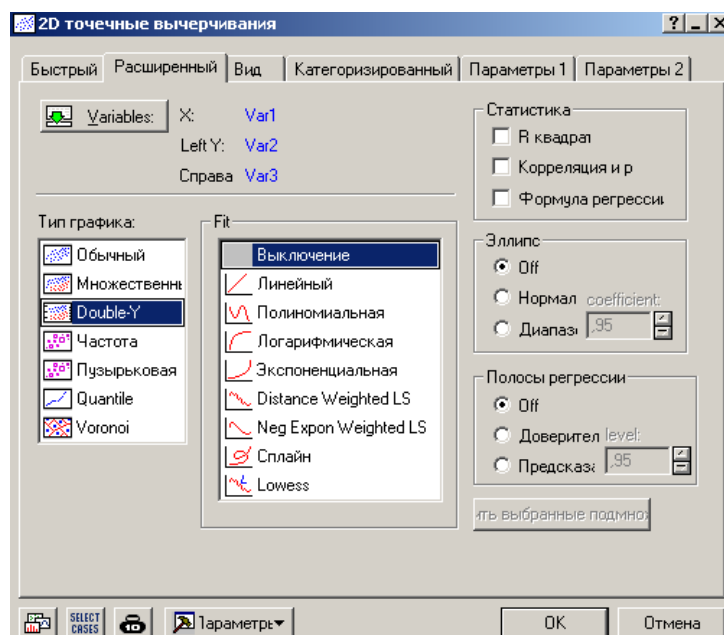


Рис. 6. Установка параметров графика

После выполнения перечисленных установок получим графики (рис. 7).

Аналогичным образом задаются плотности распределения, функции распределения и функции обратные к функциям распределения для других непрерывных случайных величин.

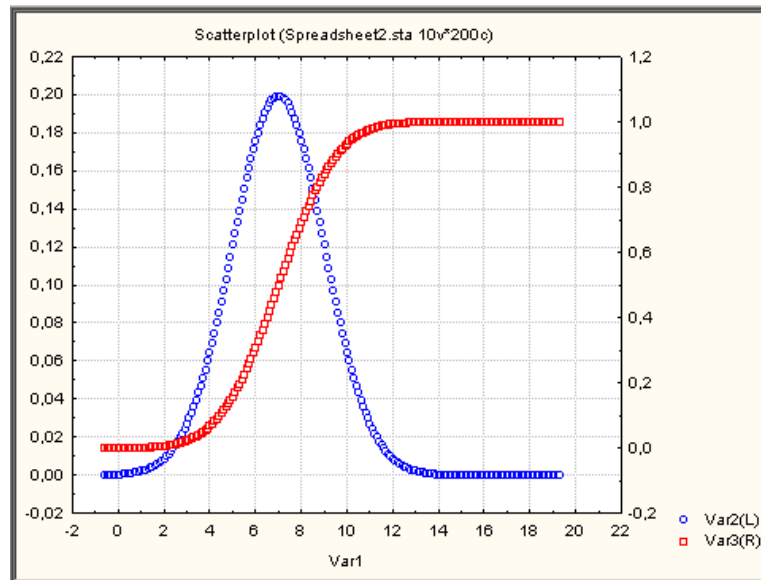


Рис. 7. Графики плотности и функции распределения $N(7; 4)$

Пример 4. Использование функции обратной к функции распределения для вычисления квантилей.

Для вычисления квантилей стандартного нормального распределения применяем функцию: $Vnormal(p; 0; 1) = x_p$, где x_p – квантиль порядка p стандартного нормального распределения $N(0, 1)$ с математическим ожиданием $m = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$.

Для получения единичных значений квантиля нужно в окно спецификаций любой переменной, например, **Var2**, записать формулу: $=Vnormal(0,95; 0; 1)$. После пересчета в столбце этой переменной получаем результат $1,645 = x_p$ (проверьте по таблице квантилей распределения $N(0, 1)$).

Для получения серии значений квантилей одну из переменных, например **Var1** заполняем значениями p : 0,90; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995; 0,9995 с клавиатуры. В окно спецификаций переменной **Var2** записываем формулу $=Vnormal(V1; 0; 1)$ и после пересчета получаем соответственно шесть значений x_p .

Задание

1. Постройте плотности и функции распределения для:
 - экспоненциального распределения $Expon(x; \lambda)$, $IExpon(x; \lambda)$ с параметром $\lambda = 0,5$;

- хи-квадрат распределения **Chi2** ($x; k$), **IChi2** ($x; k$) с числом степеней свободы $k = 6$;
 - распределения Фишера **F** ($x; k_1; k_2$), **IF** ($x; k_1; k_2$) с числом степеней свободы $k_1 = 10$ и $k_2 = 50$;
 - распределения Стьюдента **Student** ($x; k$), **IStudent** ($x; k$) с числом степеней свободы $k = 10$.
2. По данному алгоритму вычислите квантили:
- экспоненциального распределения **VExpon** ($x; \lambda$) с параметром λ ;
 - распределения χ^2 **VChi2** ($x; k$) с k степенями свободы;
 - распределения Фишера **VF** ($x; k_1; k_2$) с k_1 и k_2 степенями свободы;
 - распределения Стьюдента **VStudent** ($x; k$) с k степенями свободы.

Моделирование непрерывных распределений (вероятностный калькулятор)

Для непрерывных распределений все необходимые расчеты можно выполнить, используя вероятностный калькулятор. В переключателе модулей главного меню выбираем **Статистика** → **Счетчик вероятности** → **Распределения** → **Калькулятор распределения вероятности**, открывается окно (рис. 8).

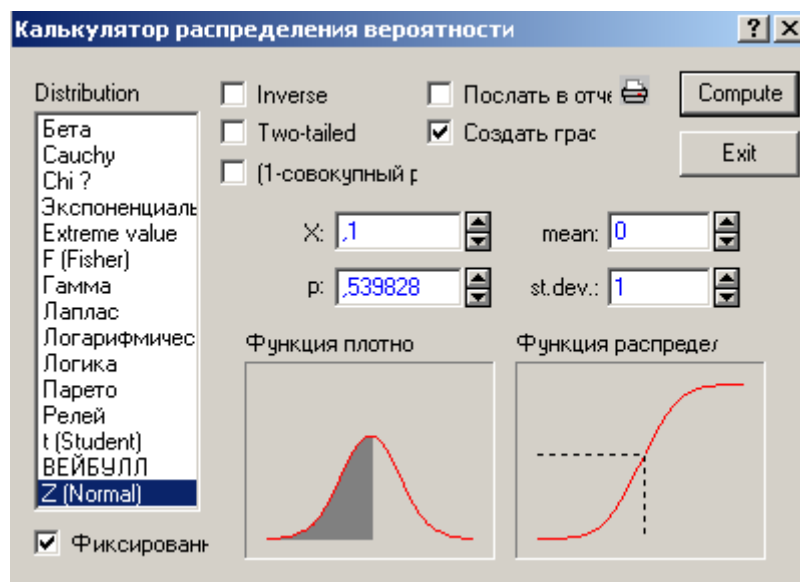


Рис. 8. Окно вероятностного калькулятора

В поле **Distribution** (распределение) выберите нормальное распределение: **Z (normal)**, математическое ожидание – **mean** = 0, стандартное отклонение – **st.dev.** = 1. Если теперь ввести значения x (например, $x = 0,1$)

и щелкнуть левой кнопкой на **Compute**, то в поле p появится число равное вероятности события $Z < x$, где Z – случайная величина, имеющая нормальное распределение $N(0, 1)$, $Z \sim N(0, 1)$, т. е. $p = P[Z < x] = \Phi(x)$.

Так, при $x = 0,1$, получим $p = P[Z < 0,1] = \Phi(0, 1) = 0,539828$ (проверьте по таблице значения функции $\Phi(x)$).

Чтобы понять работу с вероятностным калькулятором, посмотрите таблицу функции распределения стандартного нормального закона $N(0; 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

На графике функции плотности распределения (*Density Function*) (рис. 8), вычисленная вероятность p равна заштрихованной части площади под графиком плотности распределения (вся площадь под графиком плотности равна 1). На графике функции распределения (*Distribution Function*), p – это ордината $\Phi(x)$, соответствующая абсциссе x .

Точные значения на графиках можно получить, если установить в окне вероятностного калькулятора галочку в поле **Создать график** (рис. 9).

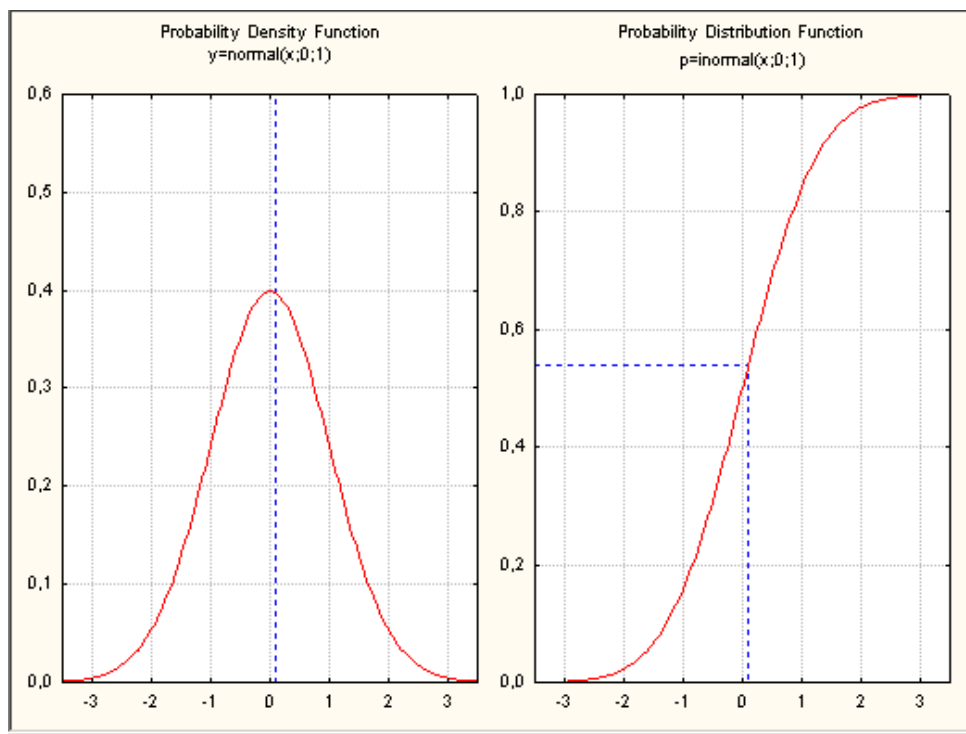


Рис.9. Графики плотности и функции нормального распределения

Напомним, что определение квантили порядка p для непрерывного распределения случайной величины X с плотностью $f(x)$ и функцией распределения $F(x)$ – это число x_p , удовлетворяющее условию :

$$P[X < x_p] = F(x_p) = p \text{ или } \int_{-\infty}^x f(x) dx = p.$$

Таким образом, используя вероятностный калькулятор, можно:

1) по значению квантили $x_p = x$ найти порядок квантили p ;

2) по значению порядка квантили p найти соответствующую квантиль $x_p = x$.

Задание

1. Составьте таблицу квантилей порядка 0,01; 0,05; 0,1; 0,9; 0,95; 0,99 для распределений:

– нормального $N(0, 1)$;

– Стьюдента (t – распределения), $k = 10$;

– распределения хи-квадрат, $k = 19$;

– распределения Фишера (F), $k_1 = 10$, $k_2 = 15$.

2. По результатам вычислений зарисуйте и проанализируйте графики для каждого из распределений при $p = 0,01; 0,5; 0,95$.

3. Полученные результаты сравните с таблицами квантилей для всех распределений.

4. Для трех последних распределений при $p = \text{const}$ исследуйте влияние значения k на форму графиков.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение распределению Стьюдента.

2. Сравните график плотности распределения Стьюдента с графиком стандартного нормального распределения.

3. От какого параметра зависит распределение хи-квадрат?

4. Дайте определение распределению Фишера.

5. В каких случаях применяется F -распределение Фишера?

6. От каких параметров зависит распределение Фишера?

7. Как называется квантиль, соответствующая вероятности 0,5?

8. Перечислите специальные распределения, полученные путем функциональных преобразований нормально распределенных случайных величин.

Задачи для самостоятельного решения

Для своего варианта V , где V – номер студента в списке группы, определите параметры распределений для девяти случайных величин: $X_1, X_2, \dots, X_9$. Вычисленные значения параметров оформите в таблицу.

X_1 имеет биномиальное распределение $B(n, p)$. Параметры n и p определите по следующим формулам:

$$n = \begin{cases} 10, & \text{если } 1 \leq V \leq 10, \\ 15, & \text{если } 1 < V \leq 20, \\ 20, & \text{если } 21 \leq V. \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} (V \bmod 10)/10, & \text{если } V \neq 10 \text{ и } V \neq 20, \\ 0,1, & \text{если } V = 10, \\ 0,5, & \text{если } V = 20. \end{cases}$$

Указание. Функция $V \bmod a$ равна остатку от деления числа V на a . Например: $21 \bmod 10 = 1$; $21 \bmod 3 = 0$; $21 \bmod 6 = 3$; $5 \bmod 10 = 5$.

X_2 имеет распределение Пуассона $P(\lambda)$; параметр λ определяется по формуле:

$$\lambda = (V \bmod 3) + 5.$$

X_3 имеет геометрическое распределение $Ge(p)$; параметр p возьмите равным параметру p для биномиального распределения $B(n, p)$.

X_4 имеет равномерное распределение $R(a, b)$; параметры a и b определите по формулам:

$$a = (V \bmod 10) - 9, b = a + 10.$$

X_5 имеет экспоненциальное распределение $E(\lambda)$; параметр λ примите равным значению p для биномиального распределения $B(n, p)$.

X_6 имеет нормальное распределение $N(m, D[X])$; значения параметров определите по формулам:

$$m = (V \bmod 10) - 5, D[X] = (V \bmod 3) + 1.$$

X_7 имеет распределение хи-квадрат, $\chi^2(k)$. Параметр k определите по формуле:

$$k = (V \bmod 10) + 7.$$

X_8 имеет распределение Стьюдента, $T(k)$. Параметр k определите по формуле:

$$k = (V \bmod 10) + 2.$$

X_9 имеет распределение Фишера, $F(k_1, k_2)$. Параметры k_1 и k_2 определите по формулам:

$$k_1 = (V \bmod 10) + 7, \quad k_2 = (V \bmod 5) + 8.$$

Выполните следующие расчеты:

1. Для каждого из распределений $X_1...X_6$ определите *точные значения* математического ожидания $M[X]$, дисперсии $D[X]$, $P[2 < X < 4]$.

2. Для непрерывных распределений X_4, X_5, X_6 вычислите значения квантилей порядков 0,25; 0,5; 0,75. Параметры распределений и результаты представьте в виде таблицы.

3. Вычислите и представьте на графиках плотности распределений соответствующую вероятность $P[|X - m| > k\sigma]$ для X_4, X_5, X_6 при $k = 1, 2, 3$.

4. Сформулируйте правило «3-х сигм» для X_6 .

5. Исследуйте асимптотические (при $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty, k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow \infty$) свойства распределений: биномиального при фиксированной вероятности успеха p , Стьюдента, хи-квадрат и Фишера. Постройте эскизы графиков плотностей для исходных и асимптотических распределений.

6. Методом моделирования получите выборки объема 100 для каждого из непрерывных распределений $X_4, ... X_9$. Параметры распределений возьмите из таблицы, составленной для п.2.

7. Используя полученные выборки, для каждого из распределений $X_4, ... X_9$, найдите оценки $M[X]$, $D[X]$, квантилей порядков 0,25; 0,5; 0,75, а также оценки моды, медианы, эксцесса и асимметрии.

Результаты занесите в таблицу для п. 2. Сравните точные значения с оценками по выборке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 551 с.

2. Кибзун А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами: учебное пособие для вузов / А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов . – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 232 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2012. – 479 с

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2008. – 404 с.

5. Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты) [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.А. Болотюк [и др.]. – СПб:Лань, 2010. – 288 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/534>.

6. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.Н. Бородин. – СПб: Лань, 2011. – 256 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2026>.

7. Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / Б.А. Горлач. СПб: Лань, 2013. – 320 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4864>.

8. Свешников А.А. Прикладные методы теории вероятностей. [Электронный ресурс]/ А.А. Свешников. – СПб.: Лань, 2012. – 480 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/3184>.

9. Трухан А.А. Теория вероятностей в инженерных приложениях [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Трухан, Г.С. Кудряшев. – СПб : Лань, 2015. – 368 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/56613>.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
4, 5,	0,000 133 8 0 000 015		0 000 589		0 000 249		0 000 101		0 000 040	

Таблица 2

Значения интеграла Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
x	Десятые доли x									
	0		2		4		6		8	
4, 5,	0,499 968 3 4 999 997		4 999 867		4 999 946		4 999 979		4 999 992	

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ЗАНЯТИЕ 1. Вероятность случайного события	5
Классическая вероятностная модель	5
Элементы комбинаторного анализа	6
Геометрическая вероятность	8
Примеры решения типовых задач	10
Контрольные вопросы	12
Задачи для самостоятельного решения	15
ЗАНЯТИЕ 2. Основные правила теории вероятностей	16
Теоремы сложения и умножения вероятностей	16
Примеры решения типовых задач	18
Контрольные вопросы	23
Задачи для самостоятельного решения	25
ЗАНЯТИЕ 3. Формула полной вероятности. Теорема гипотез	26
Формула полной вероятности	26
Формула Байеса	27
Примеры решения типовых задач	28
Контрольные вопросы	28
Задачи для самостоятельного решения	34
ЗАНЯТИЕ 4. Схема повторных испытаний	38
Схема Бернулли	38
Наивероятнейшее число успехов	39
Предельные теоремы в схеме Бернулли.....	40
Примеры решения типовых задач	43
Контрольные вопросы	46
Задачи для самостоятельного решения	47
ЗАНЯТИЕ 5. Случайные величины	50
Закон распределения случайной величины	50
Числовые характеристики случайных величин	54
Примеры решения типовых задач	57
Контрольные вопросы	60
Задачи для самостоятельного решения	61

ЗАНЯТИЕ 6. Распределение вероятностей дискретной случайной величины	64
Биноминальное распределение	64
Распределение Пуассона	66
Геометрическое распределение	70
Гипергеометрическое распределение	72
Примеры решения типовых задач	73
Контрольные вопросы	79
Задачи для самостоятельного решения	79
 ЗАНЯТИЕ 7. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины	 82
Равномерное распределение	28
Показательное (экспоненциальное) распределение	84
Нормальное распределение	87
Примеры решения типовых задач	91
Контрольные вопросы	95
Задачи для самостоятельного решения	95
 ЗАНЯТИЕ 8. Предельные теоремы теории вероятностей	 98
Основные теоретические положения	98
Закон больших чисел (ЗБЧ)	99
Центральная предельная теорема	102
Примеры решения типовых задач	105
Контрольные вопросы	108
Задачи для самостоятельного решения	108
 ЗАНЯТИЕ 9. Компьютерная реализация вероятностных задач	 111
Вычисление вероятностей для дискретных случайных величин	111
Вычисление вероятностей и квантилей для непрерывных случайных величин	115
Моделирование непрерывных распределений (вероятностный калькулятор)	118
Контрольные вопросы	120
Задачи для самостоятельного решения	121
 Библиографический список	 123
Приложение	124

Учебное издание

Будникова Иветта Константиновна

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**Практикум
Часть I**

Кафедра инженерной кибернетики КГЭУ

Редактор издательского отдела *Ж.В. Федорова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 05.02.2018.

Формат 60x84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 7,32. Уч.-изд. л. 4,30. Тираж 500 экз. Заказ № 176/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ
420066, Казань, Красносельская, 51