

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ
СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Практикум

Казань 2018

УДК 519.872

ББК 22.17

П75

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент Казанского национального
исследовательского технического университета им. А.Н.Туполева

Е.С. Белашова,

кандидат физико-математических наук, доцент Казанского государственного
энергетического университета

Н.К. Петрова

П75 Прикладная теория систем массового обслуживания:
практикум / Сост. И.К. Будникова. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т,
2018. – 76 с.

Приведено краткое изложение теоретического материала, на базе которого формируется алгоритм и описание выполнения лабораторных работ по основным разделам курса «Прикладная теория систем массового обслуживания». Для самостоятельного выполнения лабораторного практикума студентам предлагаются задачи разного уровня сложности и разные методы моделирования с применением информационных технологий.

Предназначен для обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата: 01.03.04. «Прикладная математика», 09.03.01. «Информатика и вычислительная техника» образовательной программы «Автоматизированное управление бизнес-процессами и финансами».

УДК 519.872

ББК 22.17

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания – область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания; в системах приема, переработки и передачи информации; автоматических линиях производства и других.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами.

Целью практикума «Прикладная теория систем массового обслуживания» является формирование у студентов навыков и компетенций в области вероятностного моделирования различных финансово-экономических систем и процессов в условиях автоматизированного управления бизнес-процессами и финансами.

В результате выполнения практикума у обучающихся формируются определенные компетенции или их составляющие:

- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

- способность использовать современные технические и программные средства для теоретического и экспериментального исследования систем массового обслуживания;

- способность идентифицировать проблему и выбирать соответствующую модель для вероятностного моделирования различных финансово-экономических систем и процессов.

- способность обосновывать принимаемые проектные решения, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их эффективности.

Лабораторная работа № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Цель работы: освоить методы расчета числовых характеристик случайных функций, построения и анализа графиков реализаций случайной функции; разработка программы для расчета характеристик случайных функций.

Основные теоретические сведения

Случайная функция – функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, причем заранее не известно, какой именно.

Реализация случайной функции – конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта; каждая реализация есть обычная (неслучайная) функция.

Случайный процесс – это случайная функция, аргументом которой является время t .

Случайные процессы будем обозначать большими буквами $X(t)$, $Y(t)$, ..., а их реализации (неслучайные функции) – соответствующими малыми ($x(t)$, $y(t)$, ...).

Пусть в результате проведения n независимых опытов получено n реализаций случайной функции. Обозначим их через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Если зафиксировать значение аргумента, например, $t = t_k$, то случайная функция $X(t)$ превращается в обычную случайную величину. Полученные значения $x_1(t_k)$, $x_2(t_k)$, ..., $x_n(t_k)$ называются сечением n реализаций случайной функции при $t = t_k$.

Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ – неслучайная функция $M(t_j)$, которая при каждом значении аргумента t_j равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. Если случайная величина $X(t_j)$ дискретна, то

$$M(t_j) = \sum_x x(t_j) \cdot p_x(t_j), \quad (1)$$

где $p_x(t_j)$ – вероятность того, что случайная величина $X(t_j)$ принимает значение $x(t_j)$.

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя функция, около которой группируются и относительно которой варьируются конкретные реализации случайной функции.

Дисперсия случайной функции $X(t)$ – неслучайная функция $\sigma^2(t_j)$, значение которой для каждого t_j равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции. Если случайная величина $X(t_j)$ – дискретна, то

$$\sigma^2(t_j) = \sum_x [x(t_j) - M(t_j)]^2 \cdot p_x(t_j). \quad (2)$$

Дисперсия случайной функции при каждом t_j характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего.

Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t , т.е. внутреннюю структуру случайного процесса и для дискретных случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ рассчитывается по формуле:

$$K(t_1, t_2) = \sum_x \sum_x [x(t_1) - M(t_1)][x(t_2) - M(t_2)] p_x(t_1, t_2). \quad (3)$$

Здесь $p_x(t_1, t_2)$ – вероятность совмещения событий $X(t_1) = x(t_1)$ и $X(t_2) = x(t_2)$.

Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, то есть $K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$. Сравнивая формулу (3) с формулой (2), можно сказать, что при $t_1 = t_2$ корреляционная функция равна дисперсии.

Для характеристики случайной функции часто пользуются нормированной корреляционной функцией:

$$r(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}, \quad (4)$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Чтобы получить достаточно точные оценки вероятностных характеристик, необходимо выполнить порядка ста реализаций. Промежуток времени, в течение которого проводятся наблюдения, разбивается на равные интервалы. Величина интервала между соседними значениями t_j выбирается в зависимости от вида экспериментальных кривых так, чтобы по выбранным

точкам можно было восстановить основной ход функций: для более устойчивой функции можно ограничиться меньшим количеством точек, чем для менее устойчивой.

Задание на выполнение работы

По данным эксперимента необходимо оценить вероятностные характеристики исследуемой случайной функции и сделать выводы.

Исходные данные для своего варианта, которые заносятся в табл. 2, рассчитайте по формуле

$$x_k(t_j) = b + cR,$$

где параметры b и c , а также m и n указаны в табл. 1, R – случайное число из интервала $(0;1)$.

Варианты индивидуальных заданий представлены в табл.1. Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица 1

Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	b	c	m	n	Номер варианта	b	c	m	n
1	5,0	0,70	5	9	16	3,5	0,55	5	12
2	4,9	0,69	6	10	17	3,4	0,54	6	9
3	4,8	0,68	7	11	18	3,3	0,53	7	10
4	4,7	0,67	8	12	19	3,2	0,52	8	11
5	4,6	0,66	9	9	20	3,1	0,51	9	12
6	4,5	0,65	5	10	21	3,0	0,50	5	9
7	4,4	0,64	6	11	22	2,9	0,49	6	10
8	4,3	0,63	7	12	23	2,8	0,48	7	11
9	4,2	0,62	8	9	24	2,7	0,47	8	12
10	4,1	0,61	9	10	25	2,6	0,46	9	9
11	4,0	0,60	5	11	26	2,5	0,45	5	10
12	3,9	0,59	6	12	27	2,4	0,44	6	11
13	3,8	0,58	7	9	28	2,3	0,43	7	12
14	3,7	0,57	8	10	29	2,2	0,42	8	9
15	3,6	0,56	9	11	30	2,1	0,41	9	10

Методика проведения работы

1. Исходные данные представьте в виде таблицы.

Таблица 2

№ опыта	Номер сечения j	1	2	...	m
	Значение аргумента	t_1	t_2	...	t_m
	реализация	$X(t_1)$	$X(t_2)$	...	$X(t_m)$
1	$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	...	$x_1(t_m)$
2	$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	...	$x_2(t_m)$
...	...	...	...	...	...
n	$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	...	$x_n(t_m)$

2. Вычислите оценку математического ожидания $M(t_j)$ для каждого момента времени t_j по формуле:

$$\bar{x}(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_j)}{n}. \quad (5)$$

Рассчитанные величины для каждого значения аргумента запишите в табл. 2.

Оценкой математического ожидания $M(t)$ случайной функции $X(t)$ является совокупность средних арифметических: $\bar{x}(t_1), \bar{x}(t_2), \dots, \bar{x}(t_m)$.

3. Вычислите оценку дисперсии по формулам:

$$s^2(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \bar{x}(t_j)]^2}{n-1} \quad (6a)$$

или

$$s^2(t_j) = \left[\frac{\sum x_i^2(t_j)}{n} - [\bar{x}(t_j)]^2 \right] \cdot \frac{n}{n-1}. \quad (6б)$$

Оценка дисперсии $\sigma^2(t)$ данной случайной функции – это совокупность эмпирических дисперсий $s^2(t_1), s^2(t_2), \dots, s^2(t_m)$.

Данные значения и средние квадратические отклонения представьте в табличном виде (табл. 3). Для характеристики степени разбросанности реализаций исследуемой случайной функции вокруг оценки ее математического ожидания приведите значения функций $[\bar{x}(t_j) + s(t_j)]$ и $[\bar{x}(t_j) - s(t_j)]$.

Таблица 3

Расчетные значения

Номер сечения j	1	2	...	m
$\bar{x}(t_j)$	...	...	...	...
$s^2(t_j)$	...	...	...	...
$s(t_j)$	...	...	...	...
$\bar{x}(t_j) + s(t_j)$	...	...	...	...
$\bar{x}(t_j) - s(t_j)$	...	...	...	...

4. Вычислите оценку корреляционного момента $K(t_k, t_l)$:

$$\hat{K}(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \bar{x}(t_k)] \cdot [x_i(t_l) - \bar{x}(t_l)]}{n-1}, \quad (7a)$$

или
$$\hat{K}(t_k, t_l) = \left[\frac{\sum x_i(t_k) \cdot x_i(t_l)}{n} - \bar{x}(t_k) \cdot \bar{x}(t_l) \right] \cdot \frac{n}{n-1}. \quad (7b)$$

Оценкой корреляционного момента случайной функции $X(t)$ является совокупность эмпирических корреляционных моментов, вычисленных для всевозможных пар (при вычислениях для уменьшения объема расчетов можно учесть симметричность корреляционной функции).

Таблица 4

Значения корреляционного момента

$t_k \backslash t_l$	t_1	t_2	...	t_m
t_1	...	...	...	...
t_2		...		..
...				..
t_m				..

Полученные данные занесите в квадратную матрицу, число столбцов которой равно числу сечений (табл. 4).

Примечание: Обратите внимание, что на главной диагонали расположены эмпирические дисперсии, на первой параллели главной диагонали – оценки корреляционных моментов для $t_k - t_l = t_2$; на второй параллели – оценки корреляционных моментов для $t_k - t_l = t_3$ и т.д.

5. Вычислите оценку $r(t, t')$ нормированной корреляционной функции, которая определяется как совокупность эмпирических коэффициентов корреляции

$$r(t_k, t_l) = \frac{\hat{K}(t_k, t_l)}{s(t_k) \cdot s(t_l)}, \quad (8)$$

вычисленных для всевозможных пар. Полученные значения представьте в виде таблицы, аналогичной табл. 3.

Примечание: значения, расположенные на главной диагонали, при правильности расчетов должны быть равны 1.

6. По данным табл. 2 постройте график реализаций случайной функции. На том же рисунке после вычислений характеристик постройте зависимости $\bar{x}(t)$ и $\bar{x}(t_j) \pm s(t_j)$ для всех значений t_j . Функция $r(t, t')$ строится по ее значениям в прямоугольной сетке точек.

При необходимости все эти функции аппроксимируются аналитическими выражениями.

7. Сделайте выводы об устойчивости исследуемой случайной функции.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методику выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ и обсуждение полученных результатов.
6. Вывод по работе

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения случайной функции, реализации случайной функции, сечения реализации случайной функции.
2. Какие вероятностные характеристики случайной функции Вы знаете? Опишите их свойства.
3. Как определяются математическое ожидание и дисперсия случайной функции из опыта?
4. Как строится корреляционная матрица?
5. Чему равны значения, расположенные на главной диагонали, у корреляционной матрицы и нормированной корреляционной матрицы?

Лабораторная работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Цель работы: освоить методы расчета числовых характеристик стационарной случайной функции, представления результатов в графическом формате и аппроксимации функций.

Основные теоретические сведения

Стационарные случайные процессы протекают во времени однородно и имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер колебаний существенно не изменяются с течением времени. Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во времени неопределенно долго; в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени. Исследуя стационарный процесс на любом участке времени, можно получить одни и те же его характеристики.

Случайные процессы называются стационарными в широком смысле, если их математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит от разности моментов времени:

$$\begin{aligned} M(t) &= a = \text{const} \\ \sigma^2(t) &= \sigma^2 = \text{const} = K(0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau). \quad (2)$$

Свойства вероятностных характеристик

1) корреляционная функция есть четная функция:

$$K(\tau) = K(-\tau),$$

поэтому $K(\tau)$ обычно определяют только для положительных значений аргумента;

2) абсолютная величина корреляционной функции не превышает ее значения в начале координат:

$$|K(\tau)| \leq K(0);$$

3) нормированная корреляционная функция есть

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}$$

и при $\tau = 0$ равна единице;

4) по абсолютной величине нормированная корреляционная функция не превышает единицу:

$$|r(\tau)| \leq 1.$$

Задание на выполнение работы

В качестве исходных экспериментальных данных используйте те же значения, что и при выполнении лабораторной работы № 1 (ЛР).

По данным эксперимента найдите оценки вероятностных характеристик исследуемой стационарной случайной функции и сделайте выводы.

Методика проведения работы

1. При вычислении характеристик случайного процесса в ЛР № 1 стационарность функции не предполагалась. Поэтому, проанализировав поведение математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции по таблицам 2–4 в ЛР № 1, сделайте вывод, целесообразна ли замена исследуемой случайной функции стационарной случайной функцией.

2. Для получения оценки математического ожидания a рассчитайте среднюю из средних арифметических ординат $\bar{x}(t_j)$ случайной функции, используя данные табл. 2 ЛР № 1.

3. Для получения оценки дисперсии s^2 стационарной случайной функции усредните оценки дисперсий $s^2(t_j)$, приведенных в табл. 2 ЛР № 1.

Аналогичным образом оцените среднее квадратическое отклонение.

4. Оцените корреляционную функцию, предполагая, что исследуемая случайная функция стационарна. Для такой функции корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\Delta t = t' - t$. В табл. 3 ЛР № 1 постоянному Δt соответствует главная диагональ ($\Delta t = 0$) и параллели этой диагонали. Усредняя оценки значений корреляционной функции, приведенные в табл. 3 ЛР № 1, на главной диагонали и ее параллелях, получите оценку корреляционной функции стационарной случайной функции. Данные запишите в табл. 1.

Таблица 1

Значения корреляционной функции стационарной случайной функции

Δt	0	...	...	...
$K_x(\Delta t)$	...	...	...	...

5. Аналогичным образом оцените нормированную корреляционную функцию по данным табл. 4 лабораторной работы № 1. Данные запишите в табл. 2.

Таблица 2

Значения нормированной корреляционной функции

Δt	0	...	...	...
$r_x(\Delta t)$	1	...	...	...

6. По данным табл. 1 и 2 постройте графики, при этом необходимо учесть, что для стационарной случайной функции корреляционная и нормированная корреляционная функции четные.

Функции нужно аппроксимировать аналитическим выражением, используя метод наименьших квадратов. Наиболее часто используются следующие аппроксимации:

$$y(\Delta t) \approx e^{-\alpha \cdot |\Delta t|} \quad (1)$$

или
$$y(\Delta t) \approx e^{-\alpha \cdot |\Delta t|} \cdot \cos(\beta \cdot \Delta t). \quad (2)$$

Примечание: в соответствии с методом наименьших квадратов коэффициенты α и β определите из требования достижения минимума функций:

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{m-1} [-\alpha \cdot |\Delta t_i| - \ln r_x(\Delta t_i)]^2 (m-i);$$

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{m-1} [e^{-\alpha \cdot |\Delta t_i|} \cdot \cos(\beta \cdot \Delta t_i) - r(\Delta t_i)]^2 (m-i).$$

Множитель $(m-i)$ – количество чисел, усреднением которых получено значение функции $r(\Delta t_i)$. Введение этого множителя позволяет при расчете коэффициентов α и β уменьшить роль значений $r(\Delta t_i)$, полученных усреднением небольшого числа данных и поэтому ненадежных.

7. Составьте программу для расчета числовых характеристик стационарной случайной функции.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методику выполнения, алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение стационарной случайной функции.
2. Чему равны математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция стационарной случайной функции?
3. Перечислите свойства основных вероятностных характеристик стационарной случайной функции.
4. Как определяются на практике математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция стационарной случайной функции?

Лабораторная работа № 3

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ СОСТОЯНИЕМ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

Цель работы: получить навыки построения графа состояний и расчета по нему параметров марковской цепи.

Основные теоретические сведения

Пусть имеется некоторая система S , состояние которой меняется с течением времени (под системой S может пониматься техническое устройство, производственный процесс, вычислительная машина, информационная сеть и т. д.). Если состояние системы S меняется во времени случайным, заранее непредсказуемым образом, говорят, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется марковским (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_i вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_i$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_i$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (то есть, как развивался процесс в прошлом).

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы $S_1, S_2, S_3, \dots$ можно перечислить (перенумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система S скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, то марковский процесс относится к процессам с дискретным временем.

Анализ случайных процессов с дискретными состояниями обычно проводится с помощью графа состояний и переходов (рис.1).

Имея в распоряжении размеченный граф состояний (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и зная начальное состояние системы ($p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$), можно найти вероятности состояний $p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$ после любого (k -го) шага. Они находятся с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_{j(k-1)} \cdot P_{ji} \quad (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n})$$

Для каждого шага k выполняется условие:

$$P_1(k) + P_2(k) + \dots P_i(k) + \dots P_n(k) = 1.$$

Например, задана матрица вероятностей перехода за один шаг. Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент определяется вектором Q :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.55 \end{pmatrix} \quad Q = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{6} \right),$$

то есть $P_1(0) = 1/2; P_2(0) = 1/3; P_3(0) = 0; P_4(0) = 1/6$.

1. Построим размеченный граф состояний исходной матрицы (рис. 1).

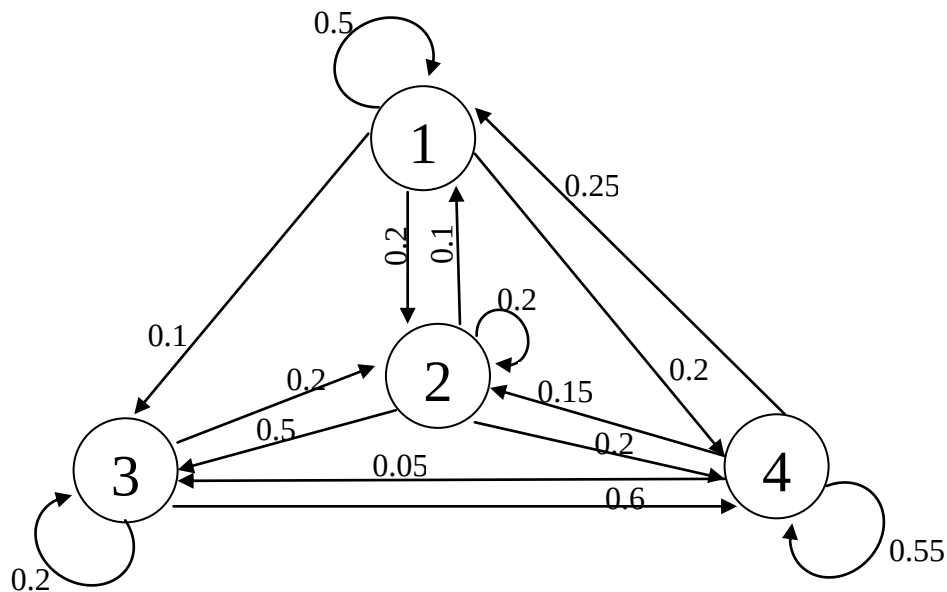


Рис. 1. Пример размеченного графа дискретной цепи Маркова

2. Матрица переходных состояний за n шагов рассчитывается по формуле

$$P(n) = P^n, n = 2; 3; 4; 5.$$

3. Распределение вероятностей цепи Маркова за 2, 3, 4 и так далее шагов определяется по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_{j(k-1)} \cdot P_{ji} \quad (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n}).$$

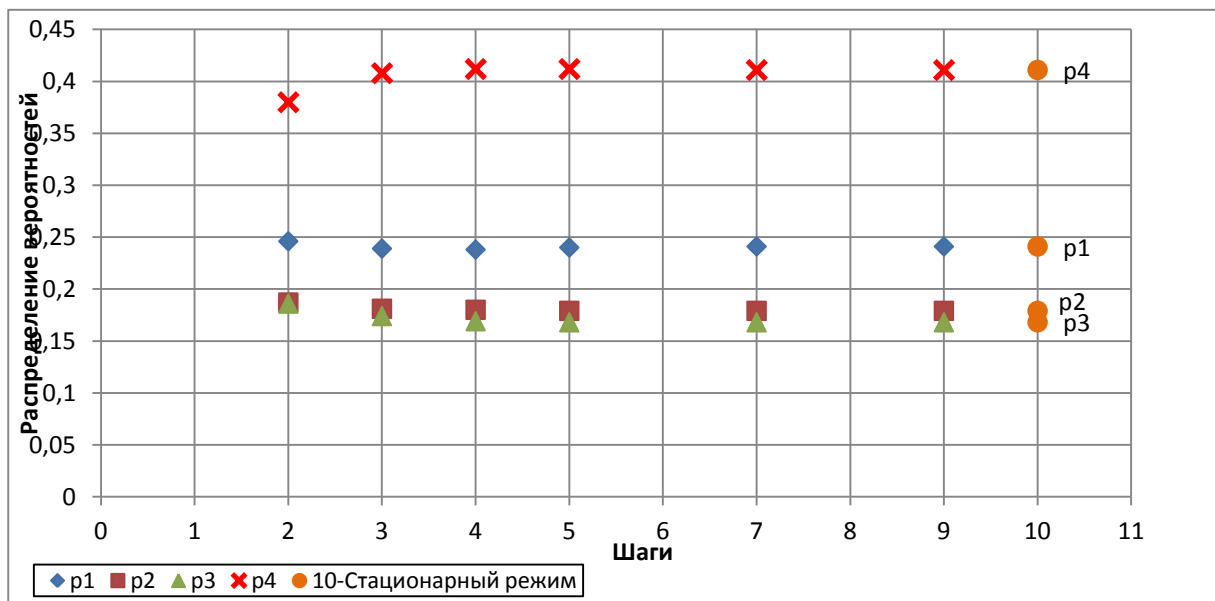
4. Составляем систему уравнений для стационарного режима.

$$Q = Q \cdot P$$

$$Q = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.25 & 0.15 & 0.05 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ 0.5 \cdot p_1 + 0.1 \cdot p_2 + 0 + 0.25 \cdot p_4 = p_1 \\ 0.2 \cdot p_1 + 0.2 \cdot p_2 + 0.2 \cdot p_3 + 0.15 \cdot p_4 = p_2 \\ 0.1 \cdot p_1 + 0.5 \cdot p_2 + 0.2 \cdot p_3 + 0.05 \cdot p_4 = p_3 \\ 0.2 \cdot p_1 + 0.2 \cdot p_2 + 0.6 \cdot p_3 + 0.55 \cdot p_4 = p_4 \end{cases}$$

5. Строим график вероятностей цепи Маркова за 2, 3, 4, шагов и стационарных вероятностей, проводим анализ.



6. Определяем финальные вероятности состояний системы

Чтобы существовали финальные вероятности необходимо и достаточно, чтобы цепь Маркова была неразложимой. Цепь Маркова неразложима (регулярная), когда все состояния цепи Маркова существенны. Состояние называется существенным, если из него можно выйти и можно вернуться обратно. По теореме эргодичности финальные вероятности совпадают со стационарными вероятностями.

Задание на выполнение работы (*выполняется в MS Excel*).

Рассматривается система с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова). Задана матрица вероятностей перехода за один шаг. Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент определяется вектором $\vec{q}$.

Варианты заданий:

$$1. P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,7 \quad 0,2 \quad 0,1).$$

$$2. P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,3 \quad 0,2 \quad 0,5).$$

$$3. P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2).$$

$$4. P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,2 \quad 0,2 \quad 0,6).$$

$$5. P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,4 \quad 0,3 \quad 0,3).$$

$$6. P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,2 \quad 0,4 \quad 0,4).$$

$$7. P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,1 \quad 0,5 \quad 0,4).$$

$$8. P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = (0,3 \quad 0,1 \quad 0,6).$$

$$9. P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = (0,9 \ 0 \ 0,1).$$

$$10. P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = (0,1 \ 0,8 \ 0,1).$$

Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Методика проведения работы

- 1) постройте размеченный граф состояний;
- 2) составьте матрицы переходных состояний за 2, 3, 4 и 5 шагов;
- 3) определите распределение вероятностей состояния системы за 2, 3, 4, 5, 7 и 9 шагов и оформите результаты в таблицу *Excel* по образцу:

Шаг (k)	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
2				
3				
4				
5				
7				
9				

- 4) составьте систему уравнений для стационарного состояния системы. Найдите стационарное распределение вероятностей;
- 5) графически изобразите стационарные вероятности и вероятности состояний цепи Маркова за 2, 3, 4, 5, 7 и 9 шагов;
- 6) определите финальные вероятности состояний системы.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методику выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным понятиям марковских случайных процессов: случайная функция, случайный процесс; марковские процессы.
2. Какие виды марковских процессов вы знаете?
3. Для чего строится граф состояний?
4. Перечислите основные характеристики марковской цепи.
5. Как охарактеризовать установившийся режим?

Лабораторная работа № 4

МАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С ДИСКРЕТНЫМ СОСТОЯНИЕМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ (НЕПРЕРЫВНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА)

Цель работы: освоить аналитические методы описания марковских случайных процессов, методику составления дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), вычисления вероятностей состояний и финальных вероятностей.

Основные теоретические сведения

В моделировании вероятностных (стохастических) экономических систем очень часто используют марковский случайный процесс (СП). События называются состояниями системы, а испытания – изменениями состояний системы.

Марковские случайные процессы делятся на классы. Основными классифицирующими признаками являются:

- множество состояний, в которых может находиться система;
- моменты времени, в которых происходит изменение состояния системы.

Кроме процессов с дискретными состояниями существуют случайные процессы с непрерывными состояниями: для этих процессов характерен постепенный, плавный переход из состояния в состояние. Например, процесс изменения напряжения в осветительной сети представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями.

Если переходы системы из состояния в состояние возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots$, то марковский процесс относится к процессам с дискретным временем. В противном случае имеет место процесс с непрерывным временем.

На практике встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в случайные моменты времени, которые заранее указать невозможно – переход может осуществиться в любой момент. Например, выход из строя (отказ) любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта (восстановление) этого элемента также может произойти в заранее неизвестный момент и т. д.

Для описания таких процессов может быть применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Такого типа процессы известны как непрерывные цепи Маркова.

Здесь так же, как и в случае процесса с дискретным временем, рассматривается ряд дискретных состояний: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, однако переход системы S из состояния в состояние может происходить в произвольный момент времени.

Обозначим $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент t система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, \dots, n$). Очевидно, для любого момента t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Для того чтобы найти для любого t вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ необходимо знать характеристики процесса, аналогичные переходным вероятностям для марковской цепи. В случае процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотности вероятностей (или интенсивности) перехода λ_{ij} (поскольку вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент t будет равна нулю, так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Анализ случайных процессов с непрерывным временем, так же как марковских процессов с дискретным временем, удобно производить с помощью графа состояний и переходов (рис.1), на основании которого можно определить вероятности состояний $p_i(t)$ как функции времени.

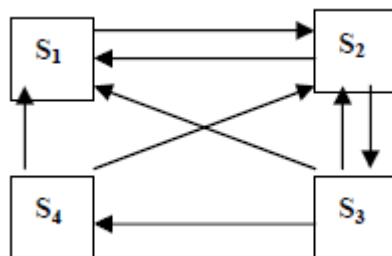


Рис. 1. Пример размеченного графа непрерывной цепи Маркова

Вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ находят решением системы линейных дифференциальных уравнений называемых уравнениями Колмогорова, имеющих вид:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij},$$

где $i = 0, 1, \dots, n$.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений, нужно задать начальное (при $t = 0$) распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$.

Выходными характеристиками марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем являются:

- нестационарное распределение вероятностей,
- стационарное распределение вероятностей,
- среднее время пребывания в фиксированном множестве состояний,
- интенсивности перехода из одного множества состояний в другое.

Весьма важным является вопрос о поведении функций $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$, а именно, будут ли они стремиться к каким-то пределам. Если эти пределы существуют, они называются предельными (финальными) вероятностями состояний:

$$\lim p(t) = (p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Очевидно, что предельные вероятности состояний в сумме должны давать единицу:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Доказано, что если число состояний системы S конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то предельные вероятности состояний существуют и не зависят от начального состояния системы.

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ в системе S устанавливается некоторый предельный стационарный режим: хотя система случайным образом и меняет свои состояния, но вероятность каждого из них не зависит от времени и каждое из состояний осуществляется с некоторой постоянной вероятностью, которая представляет собой среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии. Это свойство позволяет обходиться при нахождении параметров системы на основе моделирования одной достаточно длинной реализацией.

Для нахождения финальных вероятностей в системе дифференциальных уравнений Колмогорова все левые части уравнения (производные) принимают равными нулю. При этом система дифференциальных

превращается в систему линейных алгебраических уравнений (уравнений глобального баланса). Совместно с нормировочным условием эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности.

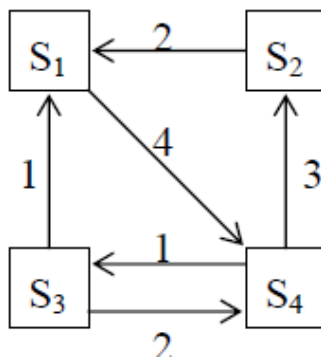
Задания на выполнение работы

Задание 1

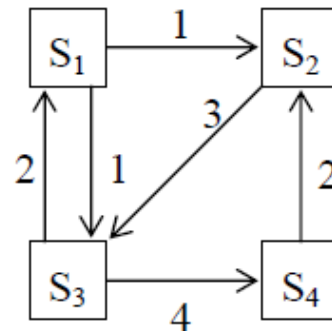
Рассматривается система с дискретными состояниями и непрерывным временем. Заданы размеченный граф состояний и интенсивности переходов. Все потоки событий простейшие.

Варианты заданий:

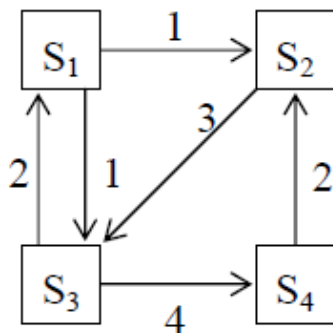
1.



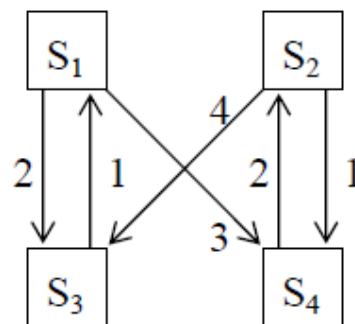
2.



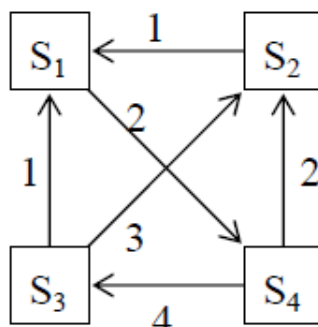
3.



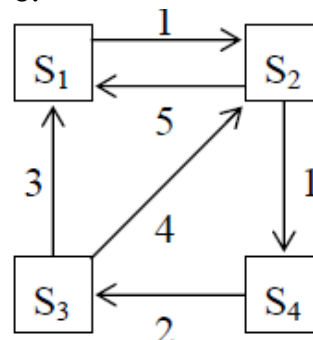
4.



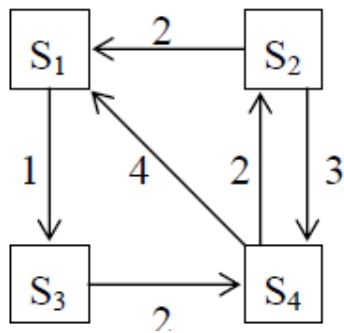
5.



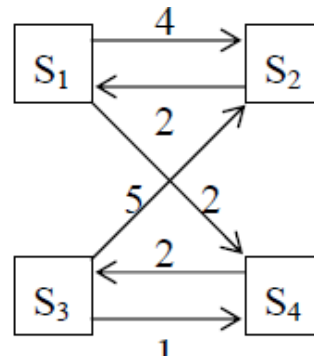
6.



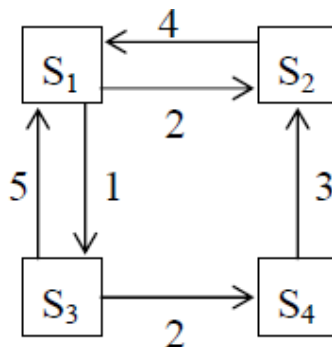
7.



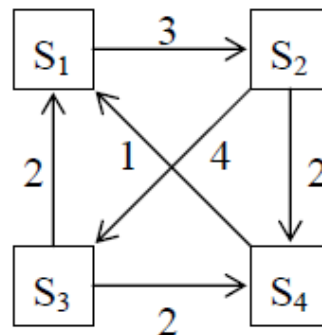
8.



9.



10.



Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Методика проведения работы

- 1) составьте матрицу интенсивностей переходов;
- 2) составьте систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; решите ее методом Рунге-Кутты;
- 3) найдите предельное распределение вероятностей;
- 4) разработайте алгоритм и программу для расчета на ЭВМ.

Задание 2

Автоматизированная сборочная линия предприятия в среднем 1 раз в месяц выходит из строя и ремонтируется в среднем 3 дня. Кроме того, в среднем 2 раза в месяц она проходит техническое обслуживание, которое длится в среднем 1 день. В среднем в одном случае из трех при техническом обслуживании обнаруживается неполадка, и линия ремонтируется. Определите, какую среднюю прибыль приносит линия за месяц, если за один день безотказной работы прибыль равна 15 тысячам рублей. Один день технической обработки обходится в 20 тысяч рублей, а один день ремонта – 30 тысяч рублей.

Разработайте алгоритм и программу для расчета на ЭВМ.

Задание 3

В туристическом агентстве работает продавец и менеджер. В среднем в агентство приходят 2 клиента за час. Если продавец свободен, он обслуживает клиента, если – занят, то клиента обслуживает менеджер, если оба заняты – клиент уходит. Среднее время обслуживания продавцом 20 минут, менеджером – 30 минут. Каждый клиент приносит среднюю прибыль 100 рублей.

Определите среднюю прибыль агентства за 1 час, и среднее число упущенных клиентов за час.

Разработайте алгоритм и программу для расчета на ЭВМ.

Задание 4

Центральный пульт управления лаборатории обрабатывает поступающие запросы с помощью Супер-ЭВМ. Периодически, в среднем 5 раз в месяц ЭВМ проходит тестирование, которое продолжается в среднем 1 день. В результате такого тестирования в среднем в двух случаях из пяти обнаруживаются проблемы, которые требуют перенастройки ЭВМ, которая длится в среднем 1 день. Кроме того, в среднем 2 раза в месяц ЭВМ производит сбой и требуется перенастройка. После перенастройки в 50 % случаев требуется ремонт, который длится в среднем 3 дня.

Необходимо определить сколько в среднем дней в месяц ЭВМ работает, тестируется, перенастраивается и ремонтируется.

Сколько нужно времени в среднем тратить на ремонт, чтобы ЭВМ в рабочем состоянии в среднем находилась 70% времени?

Разработайте алгоритм и программу для расчета на ЭВМ. Выполните в MS Excel.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методику выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение непрерывной цепи Маркова.
2. Перечислите параметры непрерывной цепи Маркова.
3. Чем отличаются однородные и неоднородные процессы?
4. Дайте характеристику пуассоновского потока.
5. Какими свойствами обладает простейший поток?
7. В чем отличие нестационарного пуассоновского потока от стационарного?

Лабораторная работа № 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ
ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

Цель работы: получить навыки построения графа состояний и матрицы плотностей вероятностей перехода, расчета по ним параметров модели марковского процесса гибели и размножения.

Основные теоретические сведения

Марковский процесс, протекающий в системе S с конечным числом состояний, называется процессом гибели и размножения, если граф его состояний имеет линейную структуру.

Пусть процесс гибели и размножения имеет размеченный граф состояний

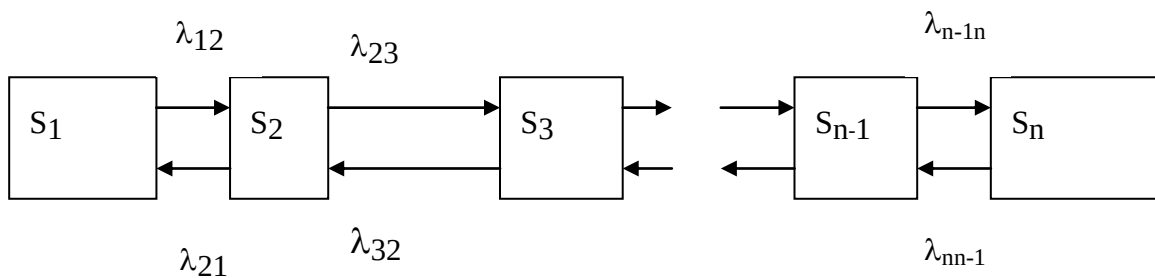


Рис. Пример графа процессов гибели и размножения

Специфика графа состоит в том, что каждое из состояний $S_2, \dots, S_k, \dots, S_{n-1}$ связано стрелками перехода с соседними состояниями за исключением S_1 и S_n . Система S , в которой протекает процесс гибели и размножения может из любого своего состояния непосредственно перейти только в одно из соседних состояний.

Название модели «гибель и размножение» связано с представлением, что стрелки вправо означают переход к состояниям, связанным с ростом номера состояния («рождение»), а стрелки влево – с убыванием номера состояний («гибель»).

Система уравнений Колмогорова, соответствующая этому графу, имеет вид:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) \\ P_k'(t) = -(\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1})P_k(t) + \lambda_{k-1,k}P_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}(t), \\ P_n'(t) = -\lambda_{n,n-1}P_n(t) + \lambda_{n-1,n}P_{n-1}(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$k = 2, \dots, n-1.$$

В случае стационарного пуассоновского процесса $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$. Для решения системы (1) следует задать вектор начального распределения вероятностей состояния $P_1(0), P_2(0), \dots, P_n(0)$, удовлетворяющий условию нормировки: $P_1(0) + P_2(0) + \dots + P_n(0) = 1$.

Система S гибели и размножения представляет собой эргодическую систему, и для нее существуют финальные вероятности состояния $P_1, \dots, P_n$.

Финальные вероятности $P_1, \dots, P_n$ процесса гибели и размножения с непрерывным временем можно вычислить по формулам:

$$\begin{cases} P_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k\right)^{-1} \\ P_k = \alpha_k \cdot P_1 \end{cases}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{kk-1} \lambda_{k-1k-2} \cdot \dots \cdot \lambda_{21}}. \quad (3)$$

Таким образом, вероятность k -го состояния в схеме гибели и размножения равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее S_k , а в знаменателе – произведение всех интенсивностей гибели, стоящих левее S_k , умноженной на вероятность крайнего левого состояния системы P_1 .

Если нумерацию состояний системы начинать с 0, то:

$$\begin{cases} P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k\right)^{-1} \\ P_k = \alpha_k \cdot P_0 \end{cases}.$$

Задания на выполнение работы

Задание 1

Проведите расчет системы, состоящей из n узлов. Каждый из узлов может находиться в исправном или неисправном состоянии. После выхода узла из строя он начинает немедленно восстанавливаться. Протекающий в системе процесс можно считать марковским. Все узлы однотипны. Это означает, что все они имеют одни и те же значения интенсивностей выхода из строя λ и восстановления μ .

Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы (табл. 1).

Таблица 1

Варианты исходных данных ($n = 4$)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
λ	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
μ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

Методика проведения работы

1. Откройте приложение *Microsoft Excel* и подготовьте таблицу для промежуточных и итоговых данных по работе.

2. Внесите в таблицу исходные данные для своего варианта.

3. Постройте размеченный граф состояний процесса.

Очевидно, что он представляет собой процесс гибели и размножения.

В случае, когда используются однотипные узлы, удобнее пронумеровать состояния системы номерами, соответствующими числу неисправных узлов, то есть, $0, 1, 2, \dots, n$, где n – число узлов. Тогда значения $\lambda_{k-1, k}$ и $\lambda_{k, k-1}$ будут определяться выражениями:

$$\lambda_{k-1, k} = (n - k)\lambda, k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$\lambda_{k, k-1} = k\mu, k = 1, 2, \dots, n.$$

4. Проведите расчет вероятностей нахождения системы в каждом из своих состояний с помощью аналитических выражений аппарата марковских процессов. Для проведения расчетов создайте таблицу (табл. 2), в которой столбцы 1, 2, ..., 5 используются следующим образом:

Таблица 2

Результаты расчета

k	$\lambda_{k, k+1}$	$\lambda_{k+1, k}$	α	Аналитическая модель, P_k
1	2	3	4	5
0				
1				
...				
n				
Σ				

- 1 – номер состояния,
- 2 – интенсивность перехода из данного состояния в состояние с номером на 1 большим,
- 3 – интенсивность перехода из состояния с номером на 1 большим в данное состояние,
- 4 – значения каждого слагаемого α , стоящего в выражении для вычисления P_0 (без 1),

5 – аналитически вычисленные значения P_k ,

Таблица должна содержать по одной строке для каждого состояния и одну строку для сумм по столбцам 4, 5.

Точность для первого столбца таблицы установите равной одному десятичному знаку, для второго и третьего – двум десятичным знакам, для четвертого, пятого – четырем десятичным знакам.

5. Постройте гистограммы для вероятностей состояний системы.

6. Проанализируйте полученные результаты и сделайте вывод.

Задание 2

В автохозяйстве 5 автомобилей. Каждый из них в среднем 4 раза в год ломается и ремонт длится в среднем 1 месяц.

1. Составьте размеченный граф состояния, матрицу плотностей вероятностей переходов.

2. Решите задачу аналитически. Определите, какую долю времени i автомобили исправны ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) и среднее число исправных автомобилей в произвольный момент времени. Решение представить таблицей *Excel*.

3. Разработайте алгоритм и программу для решения задачи для произвольного значения входных параметров.

Задание 3

Организация принимает заявки от населения на проведение ремонтных работ. Заявки принимаются по телефону, по двум линиям и их обслуживают два диспетчера. Если одна линия занята, заявка автоматически переключается на вторую. Если обе линии заняты – заявка теряется. Среднее число обслуживания одной заявки – 6 минут. В среднем одна заявка приносит прибыль в 30 рублей.

1. Составьте размеченный граф состояния, матрицу плотностей вероятностей переходов.

2. Решите аналитически. Какова прибыль за час? Целесообразно ли организовывать третий канал с третьим диспетчером, если его обслуживание обойдётся в 150 рублей в час? Решение представить таблицей в *Excel*.

4. Разработайте алгоритм и программу для решения задачи для произвольного значения входных параметров.

Задание 4

Имеется система из двух одинаковых и работающих параллельно компьютеров. Среднее время безотказной работы каждого компьютера 10 суток, а среднее время восстановления одного компьютера 0,1 суток.

1. Составьте размеченный граф состояния, матрицу плотностей вероятностей переходов.

3. Определите надежность характеристики этой системы.

4. Разработайте алгоритм и программу для решения задачи для произвольного значения входных параметров.

Задание 5

В полосе объединения работают передатчики противника. Подразделение операторов-связистов армейской контрразведки ведет поиск передатчиков по их радиоизлучениям. Каждый оператор, обнаружив передатчик противника, следит за его частотой, при этом новым поиском не занимается. В процессе слежения частота может быть потеряна, после чего оператор снова осуществляет поиск.

Разработайте математическую модель для определения эффективности службы подразделения операторов. Под эффективностью понимается среднее число обнаруженных передатчиков за установленный промежуток времени.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение процесса гибели и размножения.
2. Каковы характерные признаки графа состояний системы гибели и размножения?
3. Какой вид имеет матрица плотностей вероятностей перехода для процесса гибели и размножения?
4. Какие формулы применяются для расчета финальных вероятностей процесса гибели и размножения.

Лабораторная работа № 6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ одноканальные системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания заявок. Овладеть аналитическими и статистическими методами исследования.

Основные теоретические сведения

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризующая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания.

При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(t) = \lambda \cdot e^{(-\lambda t)},$$

где λ – интенсивность поступления заявок в систему.

Под интенсивностью потока понимают:

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m(t, t + \tau)}{\tau},$$

где $m(t, t + \tau)$ – среднее число событий в интервале $(t, t + \tau)$.

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(t) = \mu \cdot e^{(-\mu t)},$$

где μ – интенсивность обслуживания.

Поток заявок и обслуживания простейшие, т.е. обладающие свойствами стационарности (среднее число событий, воздействующих на систему, в течение единицы времени, остается постоянным), ординарности (вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала) и отсутствия последствия

(для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени). Для простейшего потока интенсивность $\lambda = \text{const}$.

Пусть система работает с отказами. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способности системы. Система имеет два состояния: S_0 – канал свободен и S_1 – канал занят. Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$ – вероятность состояния S_0 , $P_1(t)$ – вероятность состояния S_1 .

Составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} P_0(t) &= -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t), \\ \frac{d}{dt} P_1(t) &= -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t).\end{aligned}$$

С учетом того, что $P_0(t) + P_1(t) = 1$, решение системы:

$$P_0(t) = \frac{\lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t).$$

Для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы:

$$q = P_0(t).$$

По истечении большого интервала времени (при $t \rightarrow \infty$) достигается стационарный режим:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютная пропускная способность (A) – среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot P_0 \quad \text{или} \quad A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$P_{otk} = 1 - P_0.$$

Данная величина может быть интерпретирована как средняя доля не обслуженных заявок среди поданных.

Задания на выполнение работы

Задание 1

Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей $\lambda = 1,0$ (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания – 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживания являются простейшими.

Методика проведения работы (в *Microsoft Excel*)

1. Определите в установившемся режиме предельные значения:
 - а) относительной пропускной способности q ;
 - б) абсолютной пропускной способности A ;
 - в) вероятности отказа P_{otk} ;
2. Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.
3. Проведите статистическое моделирование задачи, для чего необходимо составить процедуру моделирования случайного процесса поступления и обслуживания заявок, приняв следующие обозначения. Переменные:
 - post – число поступивших заявок,
 - otk – число отказов в обслуживании,
 - obsl – число обслуженных заявок.
 Функция $k1 = rn_post()$ случайным образом принимает значения от 1 до 60 и служит для моделирования процесса поступления заявок. Отсчет времени ведем в минутах и моделируем как цикл с параметром t . Так как в среднем поступает одна заявка в час, то событие $k1 = 1$ означает, что заявка поступила в СМО. Время обслуживания определяется переменной $time_obsl$, которая инициализируется как случайная величина, распределенная

по закону Пуассона с математическим ожиданием (108 мин = 1,8 часа). Время окончания обслуживания заявки хранится в переменной t_{okon} .

Если $t_{okon} = 0$, то канал обслуживания свободен, и заявка, поступившая в СМО, будет обслужена ($obsl = obsl + 1$). Если $t_{okon} > 0$, то поступившая заявка получает отказ, что фиксируется как $otk = otk + 1$, а величина t_{okon} убывает с каждым циклом на одну минуту ($t_{okon} = t_{okon} - 1$).

Составьте схему алгоритма решения, задав продолжительность работы СМО в минутах, например, 480 минут (8 часов), и найдите ее параметры.

Повторите опыт, например, 50 раз в цикле для той же самой продолжительности работы СМО в 480 минут. Найдите статистические оценки характеристик СМО.

Убедитесь, что с увеличением числа повторений статистические оценки стремятся к теоретическим значениям характеристик СМО.

Выполните анализ результатов:

1) проанализируйте результаты, полученные теоретическим и экспериментальными способами, сравнив результаты между собой;

2) постройте на одной диаграмме графики зависимости $P_{отк}$ от времени обслуживания для теоретически и экспериментально полученных данных для случая экспоненциально распределенного времени обслуживания.

Задание 2

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока вызовов составляет 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет одну минуту.

Варианты индивидуальных заданий представлены в табл. 1. Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица

Варианты индивидуальных заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	1,45	1,52	1,67	1,71	1,75	1,79	1,82	1,84	1,91	1,96
μ	2,71	2,85	2,94	2,97	3,03	3,05	3,09	3,12	3,15	3,19
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ	1,98	2,03	2,07	2,11	2,13	2,15	2,17	2,19	2,25	2,32
μ	3,26	3,31	3,39	3,42	3,47	3,52	3,59	3,62	3,67	3,72

1. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

2. Проведите статистическое испытание работы СМО и найдите статистические оценки характеристик СМО.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание модели СМО с отказами.
2. Какими показателями характеризуется функционирование СМО с отказами?
3. Как рассчитывается вероятность P_0 ?
4. Как рассчитывается вероятность P_1 ?
5. Что такое относительная пропускная способность?
6. Что такое абсолютная пропускная способность?
7. Чему равна вероятность отказа обслуживания заявки?
8. Приведите примеры СМО с отказами.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ многоканальные системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания. Проанализировать влияние длины очереди на основные характеристики СМО.

Основные теоретические сведения

Пусть СМО с отказами имеет $n > 1$ каналов обслуживания, функционирующих независимо друг от друга. Входной поток заявок и поток обслуживания заявок являются пуассоновскими. Интенсивность поступления заявок равна λ , интенсивность обслуживания μ . Обозначим состояния СМО так:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

.....

S_k – заняты ровно k каналов, остальные свободны;

.....

S_n – все n каналов заняты, поступившая в СМО заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы $P_0, P_1, \dots, P_n$ будут иметь следующий вид:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu P_1;$$

$$\frac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) P_k + \mu \cdot (k+1) P_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n.$$

Начальные условия решения СМО таковы: $P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_n(0) = 0$.

Стационарное решение СМО имеет вид (формулы Эрланга):

$$P_k = \frac{\rho^k P_0}{k!}, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}},$$

где $\rho = \lambda / \mu$.

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме:

1) вероятность отказа

$$P_{otk} = P_n;$$

2) вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (относительная пропускная способность)

$$q = 1 - P_{otk};$$

3) абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda q;$$

4) среднее число каналов, занятых обслуживанием

$$k_{sr} = \rho(1 - P_{otk}).$$

Задания на выполнение работы

Задание 1

Пусть многоканальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность $\lambda = 1$ задачу в час. Средняя продолжительность обслуживания $1/\mu = 1,8$ часа. Поток заявок на решение задач и поток обслуживания этих заявок являются простейшими.

Методика проведения работы

1. Вычислите финальные значения:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

2. Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

3. Определите, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число не обслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз. Результат представьте в виде таблицы.

Задание 2

Оцените качество функционирования ВЦ методом статистических испытаний.

1. Испытайте работу СМО в течение 500 минут.

2. Задайте длительность испытания в 6000 минут и найдите оценки следующих характеристик СМО:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

3. Разработайте процедуру моделирования работы ВЦ для случая, когда интенсивности каналов обслуживания различные.

Задание 3

Выполните расчет показателей СМО на аналитической модели в *Excel* по вариантам. Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

T – средний интервал между заявками входного потока – порядковый номер в списке группы;

T_{obs} – среднее время обслуживания в канале определяется по правилу $T_{obs} = (0,5 \cdot T + 0,25 \cdot T \cdot i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

1. Примите $n = 2, 3, 4$. По каждому n необходимо найти теоретические и экспериментальные значения показателей СМО для пяти пар значений: T и T_{obs} . В столбцы с показателями аналитической модели впишите соответствующие формулы. В приложении *MS Excel* подготовьте таблицу (рис. 1).

Для каждого n постройте на одной диаграмме графики зависимости $P_{отк}$ от T_{obs} . Проанализируйте полученные результаты.

2. Выполните оптимизацию параметров СМО.

а) решите задачу нахождения количества приборов n (от 1 до 6) со средним временем обслуживания $T_{obs} = T$, оптимальное с точки зрения получения максимальной прибыли.

Параметры СМО			Аналитическая модель					
n	T	T_{obs}	ρ	P_0	$P_{отк}$	q	A	K_{sr}
2	30	15,0						
2	30	22,5						
2	30	30,0						
2	30	37,5						
2	30	45,0						
3	30	15,0						
...								
4	30	15,0						
...								

Рис. 1

В таблице *Excel* для новых параметров СМО рассчитайте характеристики модели, например (рис. 2).

Параметры СМО			Аналитическая модель				
n	T	T_{obs}	ρ	P_0	$P_{отк}$	q	A
1	5,0	5,0					
2	5,0	5,0					
..	..	..					
6	5,0	5,0					

Рис. 2

б) в качестве условий для оптимизации задачи примите:

- доход от обслуживания одной заявки равным 80 у.е./час,
- стоимость содержания одного прибора равным 1 у.е./час.

Таблица

Результаты расчета

Доход в единицу времени			Расход в единицу времени			Прибыль в единицу времени
Доход от одной заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на один прибор	Число приборов	Общий расход	

В столбцы с исходными данными разделов *Доход*, *Расход*, *Прибыль* внесите исходные значения.

В столбцах с вычисляемыми значениями разделов *Доход*, *Расход*, *Прибыль* запишите расчетные формулы:

- число заявок в единицу времени

$$N_r = A;$$

- суммарный доход в единицу времени

$$I_s = I_r * N_r;$$

- суммарный расход в единицу времени

$$E_s = E_d * n;$$

- прибыль в единицу времени

$$P = I_s - E_s,$$

где I_r – доход от одной заявки,

E_d – расход на один прибор.

в) среди нескольких значений n определите такое n_{opt} , при котором достигается максимум целевой функции;

г) постройте график зависимости прибыли в единицу времени от числа обслуживающих приборов, сделайте вывод.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание многоканальной модели СМО с отказами.
2. Какими показателями характеризуется функционирование многоканальной СМО с отказами?
3. Как рассчитывается вероятность p_0 ?
4. Как рассчитываются вероятности p_i ?
5. Как найти вероятность отказа обслуживания заявки?
6. Как найти относительную пропускную способность?
7. Чему равна абсолютная пропускная способность?
8. Как подсчитывается среднее число заявок в системе?
9. Приведите примеры СМО с отказами.

Лабораторная работа № 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ одноканальные системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания заявок в зависимости от условий ожидания.

Основные теоретические сведения

Одноканальная система с ожиданием и ограниченной очередью

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание – простейший поток с интенсивностью. Интенсивность потока обслуживания равна (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать обслуженных заявок). Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N -требований (заявок), т. е. клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость (рис).

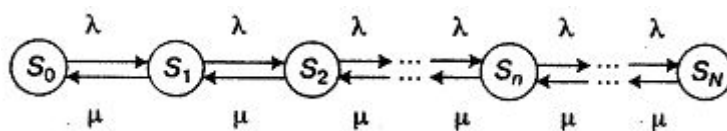


Рис. Граф состояний СМО с ожиданием (схема гибели и размножения)

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 – «канал свободен»;

S_1 – «канал занят» (очереди нет);

S_2 – «канал занят» (одна заявка стоит в очереди);

.....

S_n – «канал занят» ($n - 1$ заявок стоит в очереди);

S_N – «канал занят» ($N - 1$ заявок стоит в очереди).

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

при $n = 0$

$$-\rho \cdot P_0 + P_1 = 0;$$

при $0 < n < N$

$$-(1-\rho) \cdot P_n + P_{n+1} + \rho \cdot P_{n-1} = 0;$$

при $n = N$

$$-P_N + P_{N-1} = 0,$$

где $\rho = \lambda / \mu$, n – номер состояния.

Система уравнений имеет следующее решение:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{(N+1)}}, \quad P_n = P_0 \rho^n;$$

если $\rho \neq 1, n = 1, 2, \dots, N$

при $\rho = 1$

$$P_n = \frac{1}{N+1}.$$

Выполнение условия стационарности $\rho < 1$ не обязательно, поскольку число допускаемых в СМО заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди, которая не может превышать $N-1$.

Вероятностные характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной $(N-1)$:

1) вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{otk} = P_N;$$

2) относительная пропускная способность СМО:

$$q = 1 - P_{otk};$$

3) абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda q;$$

4) среднее число находящихся в СМО заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^N n P_n;$$

5) среднее время пребывания заявки в СМО:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1 - P_N)};$$

6) средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu};$$

7) среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q.$$

Одноканальная система с ожиданием и неограниченной очередью

Перейдем теперь к рассмотрению одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания (т. е. $N \rightarrow \infty$). Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Стационарный режим функционирования данной СМО существует при $t \rightarrow \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ и когда $\lambda < \mu$. Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \rightarrow \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$, имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, & n = 0 \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0, & n > 0 \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений имеет вид:

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

где $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди, следующие:

1) среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_s = \rho / (1 - \rho),$$

2) средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = L_s / \lambda = 1 / [\mu (1 - \rho)],$$

3) среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_q = L_s - \lambda / \mu = \rho^2 / (1 - \rho),$$

5) средняя продолжительность пребывания клиентов (заявок) в очереди на обслуживание:

$$W_q = L_q / \lambda = \rho / [\mu (1 - \rho)].$$

Задания на выполнение работы

Задание 1

Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно 3. Если все стоянки заняты, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность $\lambda = 0.85$ (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем составляет 1.05 час.

Методика проведения работы

1. Определите финальные вероятности системы, а также вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме (решение и результат представьте в *MS Excel*).

2. Выполните статистическое моделирование работы поста диагностики, приняв следующие обозначения:

$t_{och1}, t_{och2}, t_{och3}$ – количество минут, когда в очереди 1, 2 и 3 машины соответственно;

sm_t_obs – затрачено всего минут на обслуживание;

$post$ – прибыло машин на обслуживание;

otk – количество отказов в обслуживании;

$obs1$ – обслужено машин;

t_obs1 – продолжительность обслуживания машины, инициализируется как случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием 65 минут (1 час 5 минут);

t – параметр цикла (количество минут);

$t1$ – случайная величина, с одинаковой вероятностью принимающая целые значения из интервала от 1 до 1200.

Если $t_1 \geq 0$ и $t_1 \leq 17$, то считаем, что на пункт диагностики поступила заявка (интенсивность 0.85 заявки в час = 17/1200 заявки в минуту).

Проведите опыт продолжительностью в 5000 минут.

Повторите опыт 50 раз в цикле, найдите оценки характеристик СМО, сравните их с теоретическими значениями.

Задание 2

На станции техобслуживания в ГИБДД имеется одна компьютерная станция диагностики, проверяющая в рамках технического осмотра автомобилей их ходовые характеристики. В среднем за час на станцию пребывает $\lambda = 20$ автомобилей. Среднее время обслуживания автомобиля 2 минуты. В случае если станция диагностики занята, имеется стоянка для ожидания, рассчитанная на 19 мест (плюс одно для обслуживания). Если все места заняты, то вновь прибывающие автомобили не обслуживаются и заявки теряются.

1. Определите вероятности P_k того, что в системе будут находиться k автомобилей ($k = 0, 1, \dots, 20$).

2. Установите зависимость вероятности нахождения в системе k автомобилей P_k от времени обслуживания автомобиля, постройте график (решение и результат представьте в *MS Excel*).

Задание 3

Решите задание 1 при условии, что рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

1. Определите финальные значения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (поста диагностики);
- среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

2. Смоделируйте работу поста диагностики при условии, что число стоянок не ограничено.

Задание 4

Предположим теперь, что в условиях предыдущего задания 3 длина очереди на обслуживание автомобилей не ограничена. Определите вероятности P_k того, что в системе будут находиться k автомобилей ($k = 0, 1, \dots, 20$).

Проанализируйте зависимость вероятности нахождения в системе k автомобилей P_k от времени обслуживания автомобиля, постройте график.

Варианты индивидуальных заданий представлены в табл. 1. Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица

Варианты индивидуальных заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	3,71	3,55	3,57	2,18	2,82	3,47	4,15	2,65	3,17
μ	4,29	4,17	4,62	5,09	4,71	3,97	4,65	7,89	9,07

№ варианта	10	11	12	13	14	15	16	17	18
λ	2,79	3,16	3,15	2,13	2,22	2,33	2,79	3,08	4,12
μ	4,75	3,92	4,15	3,75	2,63	3,35	3,76	4,12	5,25

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание одноканальной модели СМО с ограниченной очередью.
2. Какими показателями характеризуется функционирование одноканальной СМО с отказами?
3. Чему равна абсолютная пропускная способность?

4. Как подсчитывается среднее число заявок в системе?

5. Приведите примеры СМО с ограниченной очередью

6. Что такое дисциплина обслуживания? Назовите примеры наиболее известных дисциплин.

7. Какие распределения времени обслуживания представляют наибольший интерес для практики? Опишите эти случаи.

8. От каких факторов зависят в основном значения показателей СМО с неограниченной очередью? Как можно влиять на эти факторы для улучшения показателей?

Лабораторная работа № 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ многоканальные системы массового обслуживания (СМО) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания. Проанализировать влияние длины очереди на основные характеристики СМО.

Основные теоретические сведения

СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть входной и выходной потоки являются пуассоновскими с интенсивностями λ и μ , соответственно. СМО имеет C каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна $1/\mu$.

В стационарном режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n\mu) \cdot P_n + (n+1) \cdot \mu P_{n+1} &= 0, \quad \text{при } C > n \geq 1, \\ \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + C\mu) \cdot P_n + C \cdot \mu P_{n+1} &= 0, \quad \text{при } n \geq C.\end{aligned}$$

Пусть $\rho = \lambda / \mu$. При условии $\rho / C < 1$ решение системы уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}P_0 &= \left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C! \left(1 - \frac{\rho}{C}\right)} \right)^{(-1)}, \\ P_n &= \frac{\rho^n P_0}{n!} \quad \text{при } 0 \leq n < C, \\ P_n &= \frac{\rho^n P_0}{C! C^{(n-C)}} \quad \text{при } n \geq C.\end{aligned}$$

Здесь P_n есть вероятность того, что в системе n клиентов находится на обслуживании.

Среднее число клиентов в очереди на обслуживание определяется следующей формулой:

$$L_q = \frac{C\rho P_C}{(C - \rho)^2}.$$

Среднее число находящихся в СМО клиентов (на обслуживании и в очереди):

$$L_s = L_q + \rho.$$

Средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограниченной очередью

Будем считать входящий поток заявок на обслуживание простейшим потоком с интенсивностью λ .

Интенсивность потока обслуживания равна μ . Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

Размер очереди допускает нахождение в ней m заявок.

Для нахождения предельных вероятностей можно использовать следующие выражения:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$P_{n+i} = \frac{\rho^{n+i}}{n^i n!} P_0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1},$$

где $\rho = \lambda / \mu$.

Вероятность отказа в обслуживании заявки (отказ произойдет в случае, если все каналы заняты и в очереди находятся m заявок):

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0.$$

Относительная пропускная способность:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right).$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_s = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right) = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right).$$

Для СМО с очередью среднее число занятых каналов не совпадает (в отличие от СМО с отказами) со средним числом заявок в системе. Отличие равно числу заявок, ожидающих в очереди.

Среднее число находящихся в очереди заявок, если $\chi \neq 1$, можно вычислить по формуле:

$$\bar{n}_w = \frac{\rho^{n+1} P_0}{nn!} \frac{1 - \chi^m (m + 1 - m\chi)}{(1 - \chi)^2}.$$

если $\chi = 1$ необходимо подсчитать сумму:

$$\bar{n}_w = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} P_0 (1 + 2\chi + 3\chi^2 + \dots + m\chi^{m-1}),$$

где $\chi = \rho / n$.

Среднее число находящихся в системе заявок:

$$\bar{n}_\Sigma = \bar{n}_w + \bar{n}_s.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди если $\chi \neq 1$:

$$\bar{t}_w = \frac{1}{\rho\mu} \bar{n}_w = \frac{\bar{n}_w}{\lambda} = \frac{\rho^n P_0}{n\mu n!} \frac{1 - \chi^m(m+1 - m\chi)}{(1-\chi)^2}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе, так же как и в случае с одноканальной СМО имеем:

$$\bar{t}_\Sigma = \bar{t}_w + \bar{t}_s = \frac{\bar{n}_w}{\lambda} + \frac{q}{\mu}.$$

Задания для выполнения работы

Задание 1

Проведите расчет характеристик СМО на аналитической модели в приложении *MS Excel*.

Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Методика проведения работы

Необходимо подготовить таблицу следующего вида:

[illegible]

1. В столбцах для параметров СМО таблицы запишите свои исходные данные, которые определяются по правилу:

$$n = 2, 3, 4$$

$$m = 3, 5, 7$$

Для каждой комбинации $\{n, m\}$ необходимо найти теоретические значения показателей СМО для таких пар значений:

$$T = \text{«порядковый номер в списке группы»};$$

$$T_{obs} = (0,5 \cdot T + 0,25 \cdot T \cdot i), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

2. В столбцы с показателями аналитической модели впишите соответствующие формулы.

3. Проанализируйте полученные результаты. Для одной из комбинаций $\{n, m\}$ постройте график зависимости $P_{отк}$ от T_{obs} .

5. Выполните оптимизацию параметров СМО.

Решите задачу оптимизации размера числа мест в очереди ($m = 1, 2, \dots, 7$) для количества приборов ($n = 2, 3, 4$) со средним временем обслуживания $T = T_{obs}$ с точки зрения получения максимальной прибыли. В качестве условий задачи возьмите:

- доход от обслуживания одной заявки равным 80 у.е./ час,
- стоимость содержания одного прибора – 1 у.е./ час,
- стоимость содержания одного места в очереди – 0,2 у.е. /час.

Таблица

Результаты задачи оптимизации

Доход в единицу времени			Расход в единицу времени				Прибыль в единицу времени
Доход от заявки	Число заявок	Общий доход	Расход на прибор	Число приборов	Расход на место в очереди	Число мест в очереди	

В столбцы с исходными данными разделов *Доход*, *Расход*, *Прибыль* внесите значения. В столбцах с вычисляемыми значениями разделов *Доход*, *Расход*, *Прибыль* запишите расчетные формулы:

- число заявок в единицу времени: $N_r = A$;
- суммарный доход в единицу времени: $I_s = I_r \cdot N_r$;
- суммарный расход в единицу времени: $E_s = E_s \cdot n + E_q \cdot m$;
- прибыль в единицу времени: $P = I_s - E_s$;

где I_r – доход от одной заявки;

E_s – расход на один прибор;

E_q – расход на одно место в очереди.

Найдите $m_{онт}$ для $n = 2, 3, 4$.

Постройте на одной диаграмме графики зависимости прибыли в единицу времени от места в очереди для $n = 2, 3, 4$. Сделайте вывод.

Задание 2

Механическая мастерская завода с тремя постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, – пуассоновский и имеет интенсивность $\lambda = 2,5$ механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно $t_{об} = 0,5$ сут.

Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь перед мастерской может расти практически неограниченно.

1. Вычислите следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

- вероятности состояний системы;
- среднее число заявок в очереди на обслуживание;
- среднее число находящихся в системе заявок;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;
- среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

Результаты представьте в форме таблицы.

2. Составьте процедуру статистического моделирования мастерской завода в предположении, что длина очереди составляет 4 места. Интенсивность поступления заявок 2,5 механизма в сутки = $5/48$ механизма в час, а среднее время ремонта одного механизма составляет 0,5 сутки = 12 часов. Проведите испытание в течение 1000 часов.

3. Уменьшите длину очереди до двух мест, интенсивность поступления заявок увеличьте до 10 механизмов в сутки и повторите испытание 20 раз при длительности работы СМО в 1000 часов. Вычислите оценки относительной и абсолютной пропускной способности СМО, среднюю продолжительность пребывания заявки в системе (в очереди), частоту отказов, среднее число заявок в системе (в очереди), сравнить их с соответствующими теоретическими характеристиками СМО. Рассмотрите случай, когда посты обслуживания работают с различной интенсивностью.

Задание 3

Система массового обслуживания – билетная касса с тремя окошками (с тремя кассирами) и неограниченной очередью. Пассажиров, желающих купить билет, приходит в среднем 5 человек за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 минут. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения.

1. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.
2. Составить процедуру статистического моделирования работы СМО и провести испытания

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ и обсуждение полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание многоканальной модели СМО с ожиданием.
2. Какими показателями характеризуется функционирование многоканальной СМО с ожиданием?
3. Как рассчитываются предельные вероятности многоканальной СМО с неограниченной и ограниченной очередью?
4. Как найти вероятность отказа обслуживания заявки?
5. Как найти относительную пропускную способность?
6. Приведите примеры многоканальной СМО с ограниченной и неограниченной очередью.

Лабораторная работа № 10

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ параметры замкнутой системы массового обслуживания.

Основные теоретические сведения

Рассмотрим СМО, для которых интенсивность λ входящего потока заявок зависит от состояния системы, причем источник требований является внутренним и генерирует ограниченный поток заявок. Например, обслуживается машинный парк, состоящий из N машин, бригадой из R механиков ($N > R$), причем каждая машина может обслуживаться только одним механиком. Интенсивность λ зависит от того, сколько машин в данный момент находится в эксплуатации ($N-k$) и сколько машин обслуживается или стоит в очереди, ожидая обслуживания (k). Входящий поток требований исходит из ограниченного числа эксплуатируемых машин ($N-k$), которые в случайные моменты времени выходят из строя и требуют обслуживания.

Общий входящий поток имеет интенсивность $\Lambda = (N-k) \lambda$.

Требование, поступившее в систему в момент, когда свободен хотя бы один канал, немедленно идет на обслуживание.

Если требование застаёт все каналы занятыми обслуживанием других требований, то оно не покидает систему, а становится в очередь и ждет, пока один из каналов не станет свободным. Таким образом, в замкнутой СМО входящий поток требований формируется из выходящего.

Состояние S_k системы характеризуется общим числом требований, находящихся на обслуживании и в очереди, равным k , $k = 0, 1, \dots, N$. При этом число объектов, находящихся в эксплуатации, равно $N-k$. Если λ – интенсивность потока требований в расчете на одну машину (объект), то:

при $0 \leq k \leq N$,	$\lambda_k = (n-k) \cdot \lambda$,
при $k > N$	$\lambda_k = 0$,
при $0 \leq k < R$	$\mu_k = k\mu$,
при $R \leq k \leq N$	$\mu_k = R\mu$,
при $k > N$	$\mu_k = 0$.

Система алгебраических уравнений, описывающих работу замкнутой СМО в стационарном режиме, выглядит следующим образом:

$$-\rho NP_0 + P_1 = 0;$$

при $0 < k < R$ $(N - k + 1)\rho P_{k-1} - ((N - k)\rho + k)P_k + (k + 1)P_{k+1} = 0,$

при $R \leq k < N$ $(N - k + 1)\rho P_{k-1} - ((N - k)\rho + R)P_k + RP_{k+1} = 0,$

$$\rho P_{N-1} - R P_N = 0.$$

Решая данную систему, находим вероятность k -го состояния:

при $1 \leq k < R$ $P_k = \frac{N! \rho^k P_0}{k!(N - k)!},$

при $R \leq k \leq N$ $P_k = \frac{N! \rho^k P_0}{R! R^{(k-R)}(N - k)!}.$

Величина P_0 определяется из условия: $\sum_{k=0}^N P_k = 1.$

Определим следующие *вероятностные характеристики СМО*:

1) среднее число требований в очереди на обслуживание:

$$L_q = \sum_{n=0}^N (k - R) P_k;$$

2) среднее число требований, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):

$$L_s = \sum_{k=1}^N k P_k;$$

3) среднее число каналов, простаивающих из-за отсутствия работы:

$$R_{pr} = \sum_{k=0}^{R-1} (R - k) P_k;$$

4) коэффициент простоя обслуживаемого объекта в очереди:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{L_q}{N};$$

5) коэффициент использования объектов:

$$\alpha_2 = 1 - \frac{L_s}{N};$$

6) коэффициент простоя обслуживающих каналов:

$$\alpha_3 = \frac{R_{pr}}{R};$$

7) среднее время ожидания обслуживания (время ожидания обслуживания в очереди):

$$W_q = \frac{1 - \alpha_2}{\lambda \alpha_2} - \frac{1}{\mu}.$$

Задание для выполнения работы

Пусть для обслуживания 10 персональных компьютеров (ПК) выделено два инженера одинаковой производительности. Поток отказов одного компьютера – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0,2$. Время обслуживания ПК подчиняется показательному закону. Среднее время обслуживания одного ПК одним инженером составляет $t_{об} = 1,25$ час.

Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК:

1. Оба инженера обслуживают все 10 компьютеров, так что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае $R = 2$; $N = 10$.

2. Каждый из двух инженеров обслуживает по пять закрепленных за ним ПК. В этом случае $R = 1$, $N = 5$.

Результаты двух вариантов представьте таблицей и выберите наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Методика проведения работы

Проведите статистическое испытание работы СМО в течение 2000 минут по первому варианту:

1. Повторите 20 раз в цикле испытание работы СМО и найдите среднее количество поломок ПК в течение 2000 минут, оценку интенсивности поломок ПК, среднее время ремонта ПК в течение 2000 минут, оценку интенсивности ремонта ПК, среднее время ожидания в очереди.

2. Модифицируйте процедуру для случая, когда инженеры обслуживают ПК с разной интенсивностью, например, первый инженер в среднем ремонтирует ПК 75 минут, а второй – 80 минут.

3. Составьте процедуру моделирования функционирования СМО по второму варианту.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте краткое описание замкнутой модели СМО.
2. При каких условиях в замкнутой СМО устанавливается стационарный режим?
3. Чем отличаются замкнутые и открытые СМО?

Лабораторная работа № 11

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель работы: исследовать с помощью ЭВМ системы массового обслуживания с разным законом распределения случайных величин.

Основные теоретические сведения

Рассматривается случай, когда поток требований на обслуживание распределен по закону Вейбулла с параметрами n, λ, L_0 , время обслуживания распределено по закону Релея, время пребывания в очереди случайно и распределено по показательному закону с параметром v .

Алгоритмы моделирования случайных величин, распределенных по основным вероятностным законам, приведены в табл. 1.

Таблица 1

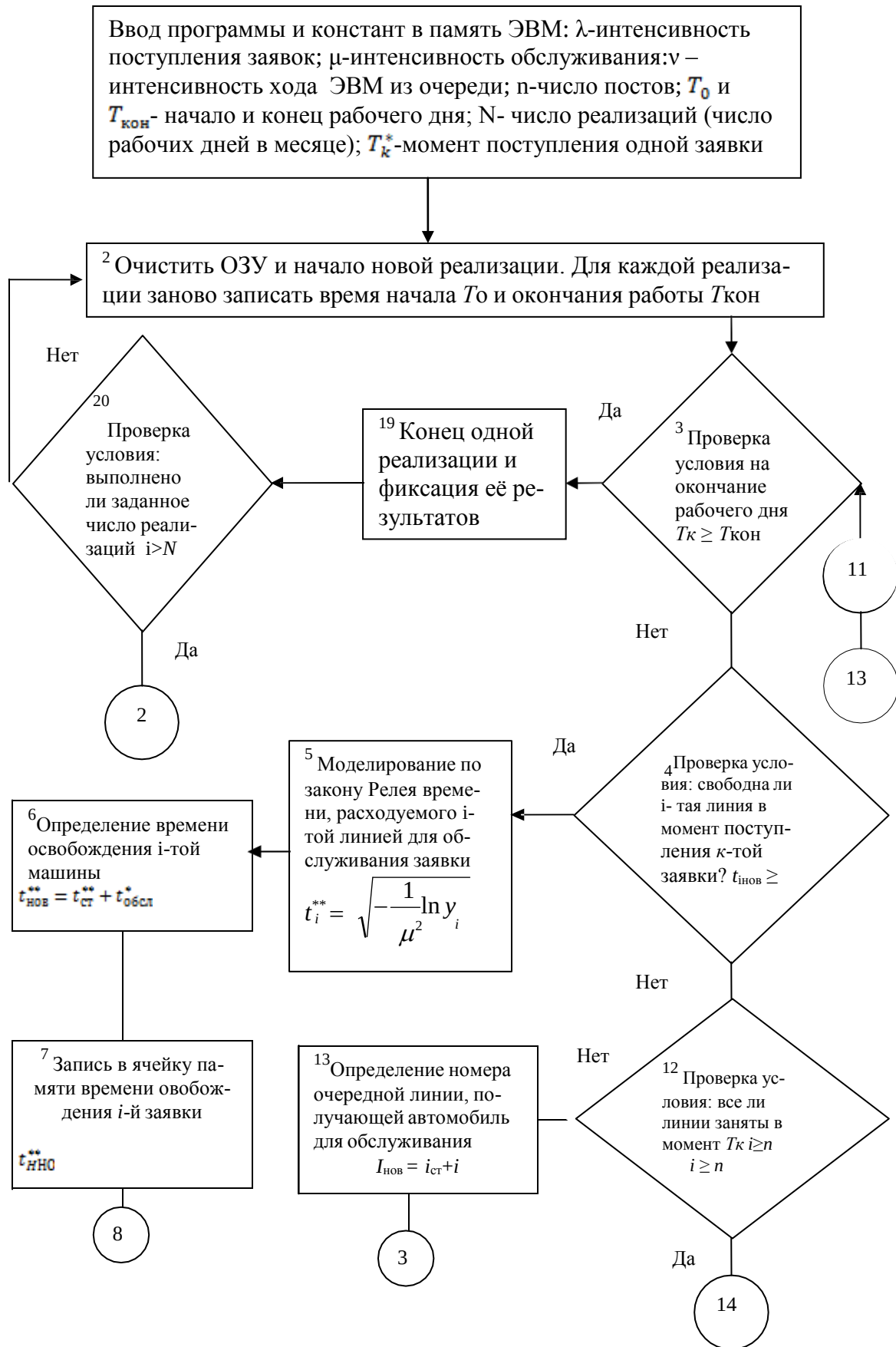
Вероятностный закон	Плотность вероятности закона	Алгоритм
Показательный закон	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$T_i = -\frac{1}{\lambda} \ln y_i$
Закон Релея	$f(t) = 2\lambda^2 t e^{-(\lambda t)^2}$	$T_i = \frac{1}{\lambda} \sqrt{-\ln y_i}$
Закон Вейбулла	$f(t) = n\lambda^n t^{(n-1)} e^{-(\lambda t)^n}$	$T_i = \frac{1}{\lambda} \sqrt[n]{-\ln y_i}$
Закон равномерной плотности	$F(x) = 1/(b-a)$	$X_i = (b-a)y_i + a$
Нормальный закон	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$X_i = \arg Q(Y_i)\sigma(X) + X_{cp}$

Задача не может быть решена с помощью основных положений теории массового обслуживания. Примем для её решения метод статистического моделирования (рис. 1).

Целевая функция в рассматриваемой задаче представляет собой производительность работы станции за один рабочий день, есть функция многих случайных аргументов:

$$W = \varphi(T_i^*, T_i^{**}, T_i^{***}, T_0, T_{\text{кон}} \dots),$$

где T_0 – начало работы объекта; $T_{\text{кон}}$ – конец рабочего дня.



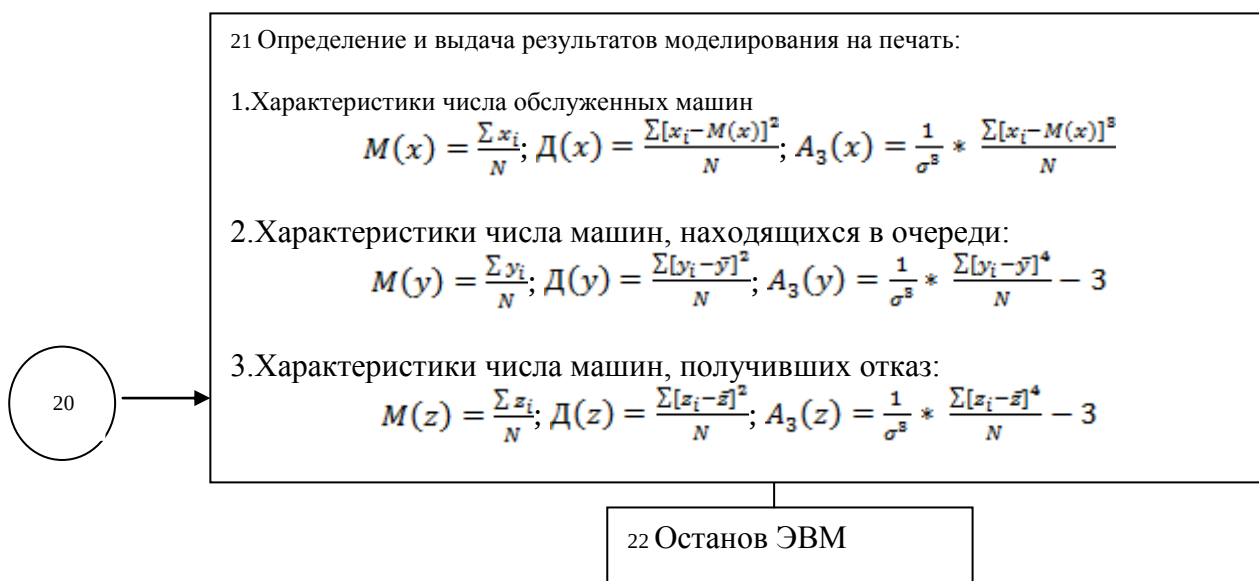
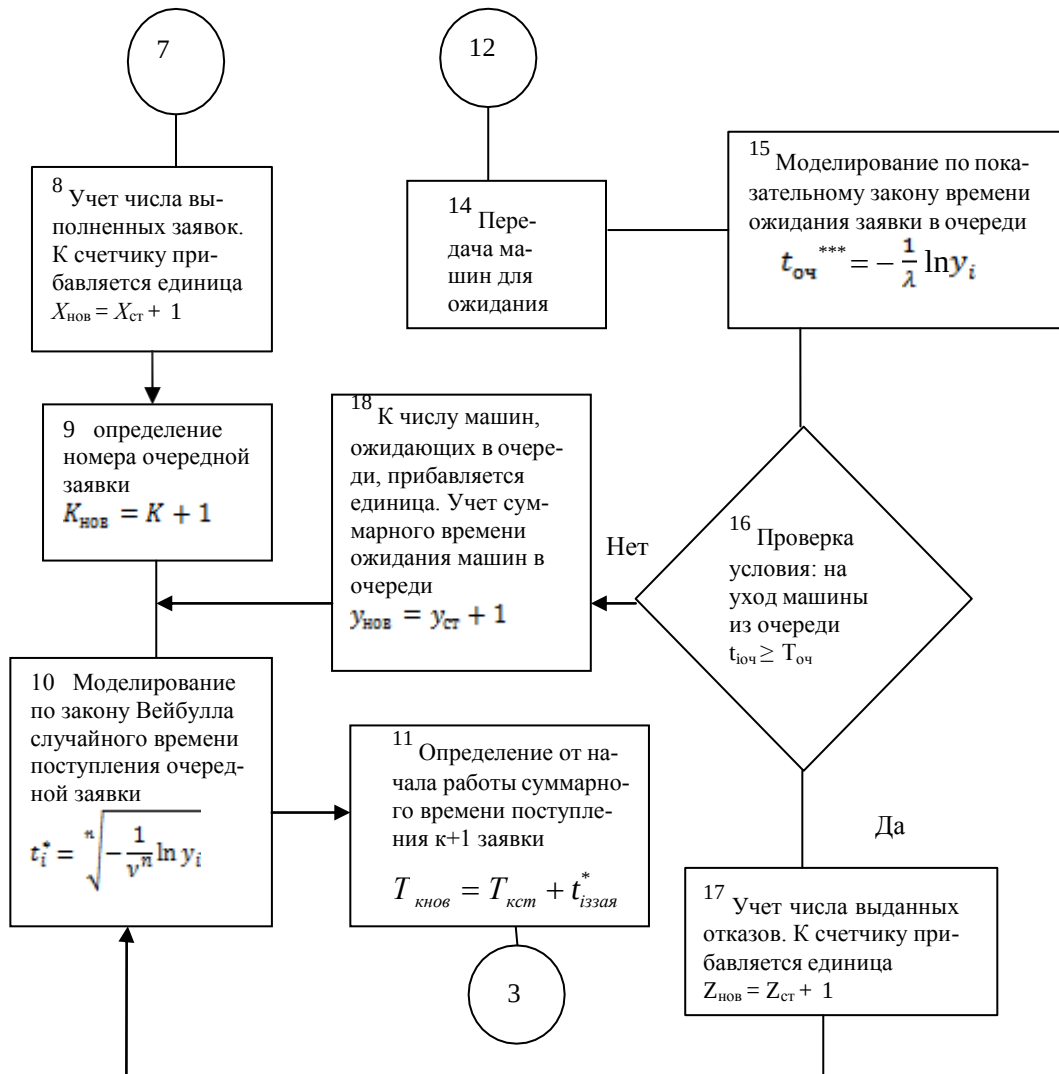


Рис. 1. Блок-схема алгоритма решения задачи

Ввиду того, что рассматриваемая задача представляет собой некоторый процесс во времени, моделирование работы станции будем осуществлять в дискретной схеме с шагом дискретности, равном одному месяцу. Это означает, что информация о течении процесса будет выдаваться на первое число каждого текущего месяца.

Задание для выполнения работы

Исследуется эффективность работы станции технического обслуживания автомобилей (СТОА), имеющей в своем распоряжении N постов. Станция начинает работать в $T_0 = 8.00$ и заканчивает в $T_{\text{кон}} = 20.00$. Станция работает по схеме с ожиданием прибывших машин в очереди с ограничением по времени.

Статистическими наблюдениями установлено, что автомобили прибывают на станцию в случайные моменты времени T_i^* , при этом время между двумя автомобилями распределено по закону Вейбулла с параметрами n, λ, L_0 . Время, расходуемое на обслуживание автомобилей T_i^{**} , случайно и распределено по закону Релея с параметром μ . Время пребывания в очереди T_i^{***} , случайно и распределено по показательному закону с параметром ν .

Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Входными данными для решения поставленной задачи служат: λ, μ, ν , получаемые на основе статистической обработки экспериментальных данных.

Методика проведения работы

1. Найдите числовые характеристики функционирования системы:
 - число обслуживаемых автомобилей;
 - число автомобилей, ожидающих в очереди;
 - число автомобилей, покидающих очередь не обслуженными.
2. По представленному алгоритму разработайте программу моделирования на ЭВМ. Результаты представьте в форме таблиц и графиков.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.

4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ и обсуждение полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. По каким формулам моделируются случайные числа, распределенные по законам: Вейбулла, Релея, показательному, нормальному.
2. Приведите примеры практического применения вышеперечисленных законов.
3. Перечислите основные этапы статистического моделирования.
4. Каковы особенности моделирования дискретной случайной величины?
5. Какова последовательность розыгрыша интервала времени прибытия заявок на обслуживание и времени обслуживания заявок?

Лабораторная работа № 12

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Цель работы: освоить применение метода Монте-Карло для статистического моделирования систем массового обслуживания.

Основные теоретические сведения

Метод Монте-Карло применяется для решения различных инженерных и экономических задач. Так, например, он может применяться для определения числовых характеристик функционирования сложных стохастических процессов. Часто метод Монте-Карло применяют для решения задач теории массового обслуживания, не попадающих под марковский случайный процесс.

Алгоритм применения метода статистического моделирования для определения числовых характеристик функционирования СМО рассмотрим на примере работы станции технического обслуживания (СТОА).

1. Пусть имеется два канала и два места для ожидания в очереди. Известны интенсивность поступления заявок λ и интенсивность обслуживания одного канала μ .

Составляется размеченный граф возможных состояний,

где S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал;

S_2 – заняты оба канала;

S_3 – оба канала заняты и одна заявка в очереди;

S_4 – оба канала заняты и две заявки в очереди.

2. Разыгрываются интервалы времени прибытия и время обслуживания заявок, для чего используется алгоритм моделирования случайной величины T , распределенной по показательному закону, то есть:

$$T_i^* = \ln(x_i)/\lambda, \quad T_i^{**} = \ln(x_i)/\mu,$$

где T_i^* – интервал времени прибытия заявок на СМО, T_i^{**} – время обслуживания i -й заявки.

3. Составляется таблица времени прибытия и времени обслуживания заявок, а процедура моделирования изображается графически (рис.1).

Для графического изображения процесса моделирования работы СМО возьмем несколько координатных осей, которые имеют один и тот же масштаб отсчета времени. На первой оси отложим астрономическое время, на второй отметим моменты поступления заявок на обслуживание. На оси S_0 изобразим состояние системы, когда все каналы свободны, на осях S_1 и S_2 – состояние первого и второго каналов, на осях S_3 и S_4 – состояние первого и второго мест в очереди.

До момента t_1^* – прихода первой заявки все каналы и все места в очереди свободны. В момент приходит первая заявка и занимает первый канал. Сколько времени он будет занят, решается разыгрыванием.

Первое разыгранное значение времени обслуживания откладываем на оси S_1 от точки с абсциссой t_1^* отмечаем его жирной линией. В момент t_2^* – прихода второй заявки первый канал занят, заявка занимает второй канал. Разыгрываем еще одно значение T_i^{**} – и обозначаем жирной линией на оси S_2 от точки с абсциссой t_2^* и т.д.

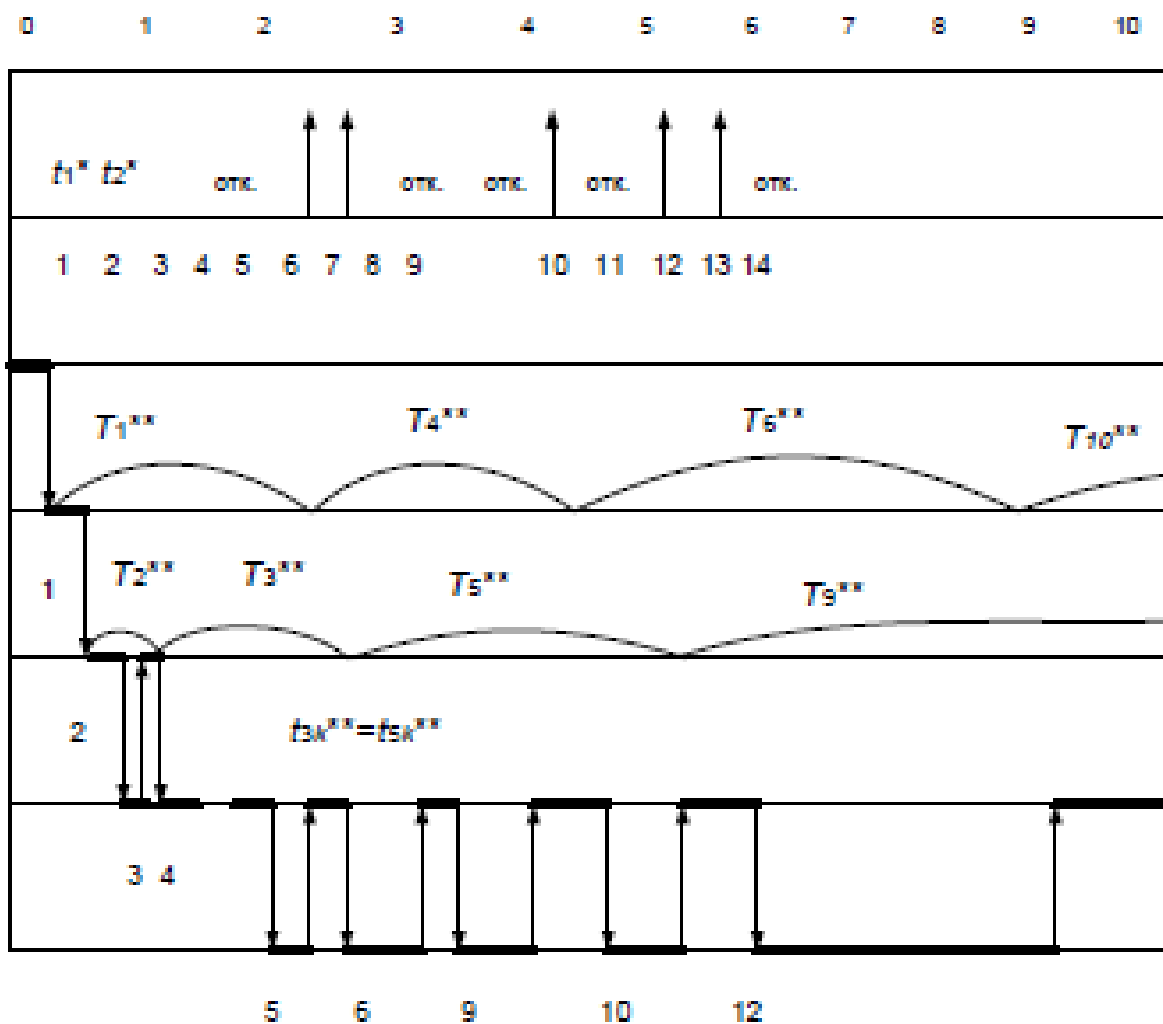


Рис 1. Графический процесс моделирования

Заявка, пришедшая в момент, когда все каналы и места в очереди заняты, получает отказ (она покидает СМО не обслуженной).

Предположим, что моделирование реализации продолжено достаточно долго. Вероятные характеристики СМО: P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 – вероятности того, что система находится соответственно в состояниях S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 , найдем по отношениям:

$$p_0 \approx \frac{\sum T_0}{T}; p_1 \approx \frac{\sum T_1}{T}; p_2 \approx \frac{\sum T_2}{T}; p_3 \approx \frac{\sum T_3}{T}; p_4 \approx \frac{\sum T_4}{T};$$

где $\sum T_0, \sum T_1, \sum T_2, \sum T_3, \sum T_4$ – суммы времени нахождения системы в состояниях S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 (берутся из данных рис);

T – рассматриваемый интервал времени.

Очевидно, что $\sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2 + \sum T_3 + \sum T_4 = T$.

Вероятность отказа находится на большом участке времени T как отношение числа N^* заявок, получивших отказ, к общему числу заявок, поступивших за это время:

$$P_{\text{отк}} = N^* / N,$$

– относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}};$$

– абсолютная пропускная способность

$$Q = \lambda q;$$

– среднее число занятых каналов

$$\bar{p} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 2(p_3 + p_4);$$

– среднее число занятых каналов очереди

$$\bar{m} = 0(p_0 + p_1 + p_2) + 1p_3 + 2p_4.$$

Задание на выполнение работы

Исследуется СТОА методом статистического моделирования для одной реализации, которая имеет два канала и два места для ожидания в очереди. Интенсивность поступления заявок $\lambda = 1,5$ заявки в час, интенсивность обслуживания одного канала $\mu = 0,5$ заявки в час.

Вариант индивидуального задания выбирается в соответствии с номером студента в списке группы.

Методика проведения работы

1. Составьте размеченный граф состояний.
2. Разыграйте интервалы времени прибытия и время обслуживания заявок на период $T = 8$ часов.
3. Составьте таблицу времени прибытия и времени обслуживания заявок.

Время прибытия

№ заявки (розыгрыша)	1	2	3	4	5	6	7	...	12
Случайное число x_i									
Интервал времени между двумя заявками T_i^*									
Момент прибытия i -й заявки									

Время обслуживания

№ заявки	1	2	3	4	5	6	7		12
Случайное число x_i									
Время обслуживания, T_i^{**}									
Начало обслуживания									
Конец обслуживания									

4. Представьте процедуру моделирования графически.
5. Рассчитайте все вероятностные характеристики.
6. Проведите анализ результатов, постройте графики.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ и обсуждение полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные этапы статистического моделирования.
2. В чем сущность метода Монте-Карло?
3. Каковы особенности моделирования дискретной случайной величины?
4. Каковы особенности моделирования непрерывной случайной величины?
5. Особенности моделирования функционирования СТОА методом Монте-Карло.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам: учебное пособие для вузов / Д. Т. Письменный. – 2-е изд. – М.: Айрис-Пресс, 2007. – 288 с.
2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 551 с. – Гл.7.
3. Введение в математическое моделирование: учебное пособие для вузов (Гл.5) / В.Н. Ашихмин и др., под ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2007. – 440 с.
4. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие для вузов / Е.С. Вентцель. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Академия, 2003. – 432 с.
5. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е.С. Вентцель. – 10-е изд., стер. – М.: Академия, 2005. – 576 с.
6. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учебное пособие / Е.С. Вентцель. – М.: КноРус, 2013. – 205 с.
7. Горлач, Б.А. Исследование операций.(Гл.6) [Электронный ресурс] СПб.: Лань, 2013. – 448 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4865>
8. Васильев, А.Н. Числовые расчеты в Excel [Электронный ресурс]: СПб.: Лань, 2014. – 608 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/68464>.
9. Бурнаева, Э.Г. Обработка и представление данных в MS Excel [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Э.Г. Бурнаева, С.Н. Леора. – СПб.: Лань, 2016. – 160 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/7170>.
10. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие для вузов / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 432 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В дисциплине «Прикладная теория систем массового обслуживания» излагаются основы теории марковских случайных процессов. Обсуждается их связь с пуассоновскими потоками событий. Иллюстрируется использование таких систем и потоков в качестве вероятностных моделей различных финансово-экономических ситуаций. На базе процесса «Гибели и размножения» рассматриваются основы теории массового обслуживания и ее применение в математическом моделировании финансово-экономических систем массового обслуживания.



Марков
Андрей Андреевич
2(14).6.1856 – 20.7.1922

Изучаемые в дисциплине случайные процессы с дискретным временем названы марковскими по имени их основоположника – выдающегося русского математика, ординарного академика Императорской Санкт-Петербургской Академии наук **Андрея Андреевича Маркова**. Основополагающий вклад в теорию случайных процессов с непрерывным временем внес великий советский математик, академик АН СССР, Герой Социалистического Труда **Андрей Николаевич Колмогоров**.



Пуассон
Симеон Дени
21.06.1781 – 5.04.1840

Создателем теории потоков событий, обладающих свойствами ординарности и отсутствия последействия, с которыми тесно связаны марковские процессы, был выдающийся французский математик, физик, механик, член Французской Академии наук **Симеон Дени Пуассон**.



Колмогоров
Андрей Николаевич
12(25).04.1903 – 20.10.1987

Основателем научного направления телетрафика и теории массового обслуживания является выдающийся датский математик, статистик и инженер Агнер Краруп Эрланг, именем которого названа единица измерения трафика. Значительный вклад в создание и разработку общей теории массового обслуживания внес выдающийся советский математик, член-корреспондент АН СССР, Александр Яковлевич Хинчин.



Эрланг
Агнер Краруп
01.01.1878 – 3.02.1929



Хинчин
Александр Яковлевич
19.06.1894 – 18.11.1959

Марковские процессы и теория массового обслуживания в настоящее время широко применяются в различных отраслях экономики и финансов.

- Производственная сфера: снабжение, ремонт и наладка оборудования, контроль качества продукции, расчет численности рабочих для обслуживания автоматов, инженерия.

- Внепроизводственная сфера: парикмахерские, мастерские, ателье, оптовая и розничная торговля, медицинское страхование.

- Транспортные перевозки: такси, грузовые перевозки, пассажирские перевозки, размещение грузов на складах.

- Связь: городская связь, междугородная связь, столы заказов.

- Вычислительные сети.

- Финансы: прогнозирование расходов населения, прогнозирование поведения долгосрочного уровня реального курса доллара к другим валютам, анализ и планирование развития платежной системы, оценка оптимального объема ресурсов для маржинального кредитования.

- Наука: теория автострахования, теория распознавания автора текста, анализ экономических циклов, прогнозирование демографической ситуации в мире, теория надежности, задачи управления запасами, менеджмент.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<i>Лабораторная работа № 1. Определение характеристик случайной функции .</i>	4
<i>Лабораторная работа № 2. Определение основных характеристик стационарной случайной функции.</i>	11
<i>Лабораторная работа № 3. Марковские процессы с дискретным состоянием и дискретным временем. Марковские цепи</i>	15
<i>Лабораторная работа № 4. Марковский случайный процесс с дискретным состоянием и непрерывным временем (непрерывные цепи Маркова)</i>	21
<i>Лабораторная работа № 5. Моделирование Марковских процессов гибели и размножения</i>	28
<i>Лабораторная работа № 6. Моделирование одноканальных систем массового обслуживания с отказами</i>	33
<i>Лабораторная работа № 7. Моделирование многоканальных систем массового обслуживания с отказами</i>	38
<i>Лабораторная работа № 8. Моделирование одноканальных систем массового обслуживания с ожиданием</i>	44
<i>Лабораторная работа № 9. Моделирование многоканальных систем массового обслуживания с ожиданием.</i>	51
<i>Лабораторная работа № 10. Моделирование замкнутой системы массового обслуживания</i>	58
<i>Лабораторная работа № 11. Статистическое моделирование систем массового обслуживания</i>	62
<i>Лабораторная работа № 12. Исследование характеристик функционирования систем массового обслуживания методом Монте-Карло</i>	67
Библиографический список	72
Приложение	73

Учебное издание

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ
СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Практикум

Составитель: **Будникова Иветта Константиновна**

Кафедра инженерной кибернетики КГЭУ

Редактор издательского отдела *М.М. Надыршина*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 27.02.2018.

Формат 60х84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 4,41. Уч.-изд. л. 2,11. Тираж 500 экз. Заказ № 184/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,
420066, Казань, Красносельская, 51