

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

**ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Для студентов заочной формы обучения
направления подготовки
210100.62 «Электроника и нанoeлектроника»,
профиля «Промышленная электроника»,
квалификации – бакалавр**

Казань 2013

УДК 519.6
ББК 22.19
В94

В94 Вычислительная математика: Программа, метод. указания по изучению дисциплины для студентов заочной формы обучения направления подготовки 210100.62 «Электроника и наноэлектроника». / Сост.: С.Г. Николаева – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2013. – 40 с.

Методические указания содержат структуру и содержание дисциплины, варианты контрольных заданий с необходимыми теоретическими сведениями и примерами выполнения в системе Mathcad и среде Excel.

Приведенные рекомендации по освоению дисциплины являются общими для технических направлений вуза, в том числе и для профиля подготовки «Промышленная электроника».

УДК 519.6
ББК 22.19

ВВЕДЕНИЕ

Освоение дисциплины «Вычислительная математика» должно сформировать у студента общее представление о предмете. Методические указания призваны помочь изучить теоретический материал курса с помощью подробно рассмотренных примеров применения численных методов на практике.

Программа отражает содержание и структуру дисциплины, включает в себя общие рекомендации по самостоятельному изучению курса, а также контрольные задания с необходимой теоретической поддержкой.

Разделы дисциплины соответствуют стандартному курсу вычислительной математики для технических специальностей высшего учебного заведения; это азы теории погрешностей, решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, аналитическое приближение табличных функций, численное дифференцирование и интегрирование, методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Наряду с тем, что изучению данной дисциплины отводится важная роль в общей математической подготовке студентов технического вуза, одной из главных задач курса является обучение студентов использованию вычислительных возможностей программ Excel и Mathcad. Выбор данных средств обусловлен прежде всего их доступностью и относительной простотой работы с ними. Практически в каждом примере проводится сравнение аналитического решения с численным, что позволяет глубже понять работу конкретного вычислительного метода.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины является изучение численных методов, формирование навыков их применения в научных исследованиях и умение решать прикладные инженерные задачи средствами вычислительной техники.

Задачей освоения дисциплины является формирование у обучающихся понимания математического содержания численных методов и умения использовать современные программные средства для решения поставленной задачи.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Вычислительная математика» является вариативной дисциплиной математического и естественнонаучного цикла Б.2 основной образовательной программы подготовки бакалавров заочной формы обучения по профилю «Промышленная электроника» направления 210100.62 Электроника и нанoeлектроника.

Предполагается, что студент, приступивший к изучению дисциплины, должен знать материал основных математических дисциплин (математический анализ, линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление), а также освоить информационные технологии.

Курс вычислительной математики является одним из основных для качественного усвоения как общих, так и специальных технических дисциплин, имеет практическую значимость при выполнении курсовых работ по специальности и выпускной квалификационной работы.

КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика» у обучающегося формируются следующие общекультурные (ОК) и профессиональные (ПК) компетенции или их составляющие:

- способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке целей и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- способность применять методы математического моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10);
- способность владеть основными методами и средствами обработки информации, иметь навыки работы с компьютером как средством управления информацией (ОК-12);
- способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ПК-2);
- способность владеть основными приемами обработки и представления экспериментальных данных (ПК-5).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

– основные понятия вычислительного эксперимента, области применения прямых и приближенных вычислительных методов, принципы решения задач на ЭВМ (ОК-12);

- классы нелинейных уравнений, условия существования единственного корня нелинейного уравнения, методы простой итерации, бисекции, касательных, хорд (ОК-10);

- векторно-матричный и полный вид записи системы линейных уравнений (СЛУ), условие существования единственного решения СЛУ, методы решения СЛУ (метод Крамера, методы Гаусса, Зейделя) (ОК-10);

- методы Ньютона и простой итерации для решения систем нелинейных уравнений (ОК-10);

- содержание терминов: итерация, регрессия, корреляция, аппроксимация, интерполяция, разностная схема (ОК-1);

- принципы численного дифференцирования (с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона) и интегрирования (методами прямоугольников, трапеций, парабол), оценку погрешности численного интегрирования (ОК-1, ПК-2).

Уметь:

- формализовать поставленную задачу, т.е. представить ее в виде формул, соотношений, ограничений (ОК-1);

- проводить аппроксимацию опытных данных методом наименьших квадратов, интерполяцию полиномами Лагранжа и Ньютона, интерполяцию сплайнами и оценивать погрешность выбранной модели (ПК-5);

- решать задачи численного интегрирования и дифференцирования (ОК-10);

- применять вычислительные методы для решения задач Коши и краевых задач (обыкновенные дифференциальные уравнения) (ПК-2);

- разрабатывать или выбирать алгоритм и программу для реализации вычислительного метода (ПК-2).

Владеть:

- терминологией соответствующих разделов лекционного курса (ОК-1);

- навыками решения нелинейных уравнений и СЛУ прямыми и итерационными методами (ПК-2);

- средствами обработки экспериментальных данных (ОК-12, ПК-5);

- методами Эйлера и Рунге-Кутты решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методом конечных разностей решения краевых задач (ПК-2, ПК-5);

- устойчивыми навыками работы в основных операционных средах и специальных пакетах прикладных программ (ОК-12).

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Общая трудоемкость дисциплин составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА» УЧЕБНОГО ПЛАНА НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ 210100.62

«ЭЛЕКТРОНИКА И НАНОЭЛЕКТРОНИКА», ПРОФИЛЯ «ПРОМЫШЛЕННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА», КВАЛИФИКАЦИИ – БАКАЛАВР ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ КГЭУ

Семестры	Зачет	Контрольные работы	Курсовые работы	Часы учебной работы					Примечание: занятия в интерактивном режиме
				Всего	Лекции	Практика	Лабораторные работы	Самостоятельная работа	
3	3	1	0	144	4	6	0	133	6

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Самостоятельная работа студента по освоению дисциплины включает в себя изучение разделов курса по указанной методической литературе с последующей самопроверкой и решением типовых задач, индивидуальные консультации (очные и письменные), выполнение практических работ, контрольной работы; посещение лекций, сдача дифференцированного зачета по теоретическому и практическому материалу дисциплины.

Начинать изучение дисциплины необходимо с рассмотрения её содержания по программе, затем приступить к рассмотрению отдельных тем. Переходить к изучению новой темы следует только после полного изучения теоретических вопросов, выполнения самопроверки и решения задач по предыдущей теме.

Самопроверка

Закончив изучение дисциплины, ответьте на вопросы для самопроверки, которые акцентируют внимание на наиболее важных вопросах темы. При этом старайтесь не пользоваться конспектом или учебником. Частое обращение к конспекту показывает недостаточное усвоение основных вопросов темы. Необходимость частого обращения к учебнику показывает неумение правильно конспектировать. Внесите коррективы в конспект, который впоследствии поможет при повторении материала в период подготовки к экзамену.

Для более прочного усвоения теоретического материала после самопроверки необходимо выполнить упражнения и решить задачи по пройденной теме. Для этого по всем основным темам приводится литература, указываются страницы учебника.

Контрольное задание

В процессе изучения дисциплины студент выполняет контрольную работу. Задачи контрольной работы необходимо решать по мере изучения соответствующих тем дисциплины. Неудача при решении задач контрольной работы показывает, что тема не проработана или решено недостаточное количество задач по этой теме. Нужно вернуться к рассмотрению основных положений этой темы, еще раз внимательно разобрать решение типовых задач и повторно решить предложенные задачи.

Контрольная работа должна решаться самостоятельно, поскольку она является формой методической помощи студентам при изучении дисциплины. Преподаватель-рецензент указывает студенту на недостатки.

Консультации

При возникновении затруднений в процессе изучения теоретической части дисциплины, при ответах на вопросы для самопроверки или решении задач следует обращаться за письменной или устной консультацией к прикрепленному преподавателю в университет. При этом необходимо точно сформулировать вопрос, вызывающий затруднение, указать место в учебнике, где он разбирается.

Практические занятия

Для более глубокого изучения дисциплины необходимо выполнить практические работы с проведением расчетов в системах Excel, Mathcad.

№ п/п	Тема практического занятия	Семестр	Номер раздела лекцион- ного курса	Продол- житель- ность (часов)
1	Аппроксимация функции методом наименьших квадратов	3	4	2
2	Интерполяция табличной функции для случая неравноотстоящих узлов	3	4	2
3	Решение обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты	3	6	2

Примечание: практические занятия состоят в выполнении вычислений с применением компьютерной техники.

Лекции

В период установочной или лабораторно-экзаменационной сессии студентам читаются лекции обзорного характера, на которых проводится обзор наиболее важных тем и разделов курса, а также рассматриваются вопросы, недостаточно полно или точно освещенные в учебной литературе или вызывающие затруднения у большого числа студентов.

Лекция №1 (2 часа) включает в себя материал разделов 1–3 и частично раздела 4 (аппроксимация).

Лекция №2 (2 часа) содержит материал разделов 4 (интерполяция), 5–7.

Зачет

После выполнения практических работ студенты сдают зачет. К сдаче допускаются студенты, имеющие зачетную контрольную работу и зачет по практическим работам. Зачет проводится в письменной форме. Каждый студент получает билет, содержащий два теоретических вопроса и задачу.

Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Введение. Основные понятия и положения курса

Цели и задачи курса. Физическое и математическое моделирование. Вычислительный эксперимент. Погрешность вычислений. Источники и виды погрешностей. Абсолютная и относительная погрешность. Формы записи данных.

Раздел 2. Методы решения нелинейных уравнений

Численные методы вычисления корней нелинейных уравнений: простой итерации, дихотомии (бисекции), касательных (Ньютона), хорд. Решение методом Ньютона в среде Excel. Сравнение методов (скорость сходимости, оценка погрешности решения).

Раздел 3. Методы решения систем линейных и нелинейных уравнений

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): метод Гаусса. Итерационные методы решения СЛАУ: метод итерации, метод Зейделя. Условия сходимости, скорость сходимости, оценка погрешности решения. Решение систем нелинейных уравнений: метод простой итерации, метод Ньютона.

Раздел 4. Приближение функций. Аппроксимация и интерполяция

Аппроксимация. Метод наименьших квадратов (МНК). Уравнение прямой и обратной регрессии. Коэффициент корреляции.

Интерполирование. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона. Оценка погрешности интерполяции полиномами Лагранжа и Ньютона. Интерполяция кубическими сплайнами.

Раздел 5. Численное дифференцирование и интегрирование

Численное дифференцирование. Аппроксимация производных. Погрешность численного дифференцирования. Численное интегрирование: интегральная сумма, геометрическая интерпретация численного интегрирования. Методы прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона (метод парабол). Оценка погрешностей.

Раздел 6. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Элементы теории разностных схем. Решение задачи Коши: метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, Адамса. Решение краевых задач: метод конечных разностей, метод прогонки. Оценка погрешности.

Раздел 7. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

Общие сведения и классификация уравнений в частных производных. Методы решения эллиптических уравнений. Явная и неявная разностная схемы для параболических и эллиптических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

а) Основная:

1. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: Физматлит. 2005.
2. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. 2006.
3. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

б) Дополнительная:

4. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа. 1990.
5. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. Учеб. пос. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1990.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Для облегчения самостоятельного изучения дисциплины по каждому разделу приводятся необходимая литература и вопросы для самоконтроля.

Раздел 1. Введение. Основные понятия и положения курса

Литература: [1] с. 10–14, с. 15–29; [2] с. 7–16; [3] с. 5–14, с. 195–213.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Определите понятия абсолютной и относительной погрешности числа.
- 2). Какие цифры называются значащими?
- 3). Когда значащая цифра верна в широком и узком смысле?
- 4). Как производится округление чисел?
- 5). Какой вид погрешности может быть выражен в процентах?

Раздел 2. Методы решения нелинейных уравнений

Литература: [1] с. 145–154; [2] с. 76–104, [3] с. 15–26, с. 220–231.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Какое уравнение называется нелинейным? Что является решением нелинейного уравнения?
- 2). Привести пример записи алгебраического и трансцендентного нелинейного уравнения.

- 3). Какой интервал называется интервалом изоляции корня?
- 4). Какая точка служит начальным приближением в методе бисекции?
- 5). Запишите условие прекращения итерационного процесса при решении методом касательных.
- 6). Приведите пример разрешающей формулы для метода простой итерации.
- 7). Опишите общую схему решения нелинейных уравнений итерационными методами.

Раздел 3. Методы решения систем линейных и нелинейных уравнений

Литератур: [1] с.1 07–131, с. 154–158; [2] с. 23–50, с. 109–120; [3] с. 27–52, с. 234–252.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Запишите общий вид системы линейных алгебраических уравнений (СЛУ) размерностью $n \times n$.
- 2). Является ли метод Гаусса решения СЛУ приближенным?
- 3). Что является решением СЛУ?
- 4). Опишите прямой ход метода Гаусса.
- 5). Является ли метод Зейделя решения СЛУ итерационным?
- 6). Можно ли получить решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона, если якобиан системы равен нулю?
- 7). Нужно ли задавать начальное приближение в методе простой итерации для систем нелинейных уравнений?

Раздел 4. Приближение функций. Аппроксимация и интерполяция

Литература: [1] с. 31–70; [2] с. 126–153; [3] с. 73–89, с. 104–119, с. 255–293.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Определите понятия аппроксимации и интерполяции функций.
- 2). По какому принципу находятся коэффициенты прямой и обратной регрессий?
- 3). Какие значения может принимать коэффициент корреляции? Что оценивает эта величина?
- 4). Запишите первую интерполяционную формулу Ньютона.
- 5). Сколько интерполяционных полиномов Лагранжа можно построить для конкретного набора пар (x_i, y_i) ?
- 6). Что такое конечная разность? Как понизить порядок конечной разности?

7). Какую степень имеет глобальный интерполяционный полином, построенный на 5-ти узлах?

Раздел 5. Численное дифференцирование и интегрирование

Литература: [1] с. 72–106; [3] с. 90–100, с. 304–310.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Аппроксимируйте производную первого порядка в точке x_3 с помощью центральных разностей.
- 2). Что называется погрешностью аппроксимации производной? Какова погрешность аппроксимации производной?
- 3). Какой из методов позволяет получить более точное решение: метод правых прямоугольников или метод трапеций?
- 4). Какую погрешность имеет метод левых прямоугольников?
- 5). В методе Симпсона подинтегральная функция заменяется квадратичной или кубической параболой?

Раздел 6. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Литература: [1] с. 194–222; [3] с. 134–149, с. 314–325.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Какие методы решения задачи Коши называются одношаговыми?
- 2). Какой метод решения ОДУ более точен: метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, метод Эйлера с пересчетом?
- 3). Сколько дополнительных условий необходимо записать для решения ОДУ второго порядка?
- 4). Постройте блок-схему алгоритма метода Адамса для ОДУ.
- 5). Приведите примеры постановки краевой задачи и задачи Коши для ОДУ.

Раздел 7. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

Литература: [1] с. 224–254; [3] с. 150–167, с. 329–342.

Вопросы для самопроверки:

- 1). Что такое разностная схема, сеточная функция?
- 2). Запишите явную разностную схему для эллиптического уравнения.
- 3). Каков алгоритм решения уравнения теплопроводности методом сеток?

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Студент выполняет одну контрольную работу, включающую в себя пять заданий, охватывающих основные разделы курса:

- 1). Определение абсолютной и относительной погрешности числа.
- 2). Решение нелинейного уравнения.
- 3) Интерполяция табличной функции для случая равноотстоящих узлов.
- 4). Приближенное вычисление определенного интеграла.
- 5). Решение обыкновенного дифференциального уравнения.

Выбор варианта осуществляется по последней цифре шифра студента, например, если это **4**, то выполняются задачи с номерами **4, 14, 24, 34, 44** и **54**. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

Работа должна быть оформлена в отдельной тетради (либо на листах формата А4), с оставлением поля для замечаний преподавателя – рецензента. На титульном листе (обложке) должны быть указаны: дисциплина, шифр, курс, фамилия, имя, отчество студента.

Все задачи предполагают как аналитическое решение, так и решение, полученное с помощью расчетов в пакете Excel или в системе Mathcad. Результаты вычислений фиксируются в контрольном задании.

Выполнение заданий необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать условие.

Контрольная работа выполняется любыми чернилами, кроме красных. По ходу решения задач должны быть приведены подробные вычисления и четкие пояснения. Ответ задачи должен быть вынесен в конец решения. В конце работы студент проставляет дату выполнения и подпись.

После получения отрецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае неудовлетворительной оценки работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

К высылаемым исправлениям должны быть обязательно приложены отрецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. Теория приближенных вычислений. Элементарная теория погрешностей

Анализ погрешностей в численном результате является важной составной частью любого серьезного вычисления. Исходная информация редко бывает точной, т.к. зачастую исходные величины являются экспериментальными данными или основаны на приблизительных оценках. Кроме того, сами процессы вычислений могут вносить в результат различного рода ошибки.

Виды погрешностей

У каждого приближенного числа существуют две характеристики, или, другими словами, две погрешности. Прежде чем рассматривать определения этих погрешностей, введем ряд обозначений: будем обозначать прописными латинскими буквами точное значение чисел: $A, B, C, \dots$. Приближенное значение чисел будем обозначать соответствующими строчными латинскими буквами: $a, b, c, \dots$

***Абсолютной погрешностью** числа называют модуль разности между точным значением числа (считая это значение известным) и его приближенным значением:*

$$|A - a| = \Delta a \quad (1.1)$$

Приближенное число вместе с абсолютной погрешностью записывают следующим образом: $a \pm \Delta a$. Абсолютная погрешность всегда берется по модулю и с ее помощью можно определить отрезок, на котором находится точное значение величины: $A \in [a - \Delta a; a + \Delta a]$.

В связи с тем, что абсолютная погрешность непригодна для оценки точности заданного числа, либо точности проведенных расчетов, приближенные числа имеют еще одну характеристику.

***Относительной погрешностью** числа называют отношение абсолютной погрешности числа к его приближенному значению:*

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \quad (1.2)$$

Относительная погрешность так же берется по модулю, и нередко ее рассматривают выраженной в процентах:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\% \quad (1.3)$$

Таким образом, относительная погрешность применяется для определения точности результата; она показывает, насколько велика погрешность по сравнению с самим числом.

Для округления чисел нам понадобится понятие значащих цифр.

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Например, в приведенных ниже числах значащие цифры подчеркнуты:

3.15478; 0.0154; 0.1200

На практике вместо абсолютной погрешности применяется *предельная абсолютная погрешность*, которая определяется неравенством

$$|A - a| \leq \Delta a \quad (1.4)$$

и *предельная относительная погрешность*

$$\delta a \geq \frac{\Delta a}{|a|} \quad (1.5)$$

причем слово «*предельная*» для краткости будем опускать.

Понятие предельной абсолютной погрешности, так же как и понятие предельной относительной погрешности, появилось в связи с тем, что в ходе проведения операций с приближенными числами и вычислениями их погрешностей, получаются бесконечные десятичные дроби. Поэтому принято в записи погрешности оставлять одну или две значащие цифры, причем округление погрешности всегда производится в большую сторону.

Значащая цифра является верной в узком (строгом) смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.

То есть, для того чтобы определить, является ли данная цифра верной или сомнительной в узком смысле, необходимо сравнить абсолютную погрешность с половиной единицы разряда, соответствующего рассматриваемой цифре.

Рассмотрим число 32.0457 ± 0.03 ; первая цифра этого числа «3». Сравним абсолютную погрешность с половиной единицы соответствующего разряда, т.е. с $10/2=5$: $5 > 0.03$, неравенство выполняется, следовательно, данная цифра верная. Следующая цифра – «2», неравенство $0,5 > 0.03$ также верное, значит цифра «2» – верная. Цифра «0». Соответствующее неравенство $0.05 > 0.03$ выполняется, а значит и сама цифра верная. Рассмотрим следующую цифру «4»: для нее неравенство $0.005 > 0.03$ уже не выполняется, следовательно, эта цифра, а также все последующие будут сомнительными. Таким образом, верными цифрами числа будут цифры «3», «2», «0».

В записи числа при округлении оставляют только значащие цифры. В рассмотренном примере после округления получим: 32.0 ± 0.03 . Так как цифра «0» верная, то ее в записи числа оставляют.

Значащая цифра является верной в широком смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре. Чтобы определить, является ли данная цифра верной или сомнительной в широком смысле, необходимо сравнить абсолютную погрешность с единицей разряда, соответствующего рассматриваемой цифре.

Пример. Число x , все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата x_1 вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешности.

Решение в системе Mathcad

$$\begin{aligned}
 x &:= 1.1426 \\
 x_1 &:= 1.143 \\
 ex &:= \frac{0.0001}{2} \\
 \Delta_{окр} &:= |x - x_1| \\
 ex_1 &:= ex + \Delta_{окр} \\
 ex_1 &= 0.00045 \\
 ex_1 &< 0.0005 = \frac{0.001}{2}
 \end{aligned}$$

Это значит, что в числе 1.143 четыре цифры до тысячных (1,1,4,3) верны в строгом смысле по абсолютной погрешности.

$$\delta x_1 := \left| \frac{ex_1}{x_1} \right|$$

$$\delta x_1 = 0.00039$$

т.к. первая значащая цифра в относительной погрешности $3 < 5$, то сравниваем относительную погрешность с числом

$$\delta x_1 < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

Это значит, что в числе 1.143 три цифры (1,1,4) верны в строгом смысле по относительной погрешности.

Варианты заданий

1–10. Число x , все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $x_1 \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешностям.

1. 3549

2. 32,147

3. 35,085

4. 7,544

5. 198,745

6. 37,4781

7. 0,183814

8. 0,009145

9. 11,3721

10. 0,2538

Тема 2. Численные методы решения нелинейных уравнений

Нелинейным называется уравнение вида

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

где $f(x)$ – алгебраическая или трансцендентная функция переменной x , определенная и непрерывная на некотором интервале $[a, b]$. Всякое число $\tilde{x} \in [a, b]$, при котором функция обращается в нуль, называется *корнем уравнения* (2.1).

Задача численного нахождения корней уравнения (2.1) обычно разбивается на два этапа:

Первый этап состоит в **отделении корней**, т.е. находят достаточно малые окрестности в рассматриваемой области, в которых содержится одно значение корня. Для отделения корня пользуются теоремой математического анализа, утверждающей, что если значения *непрерывной* функции на концах

отрезка $[a, b]$ имеют разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения. Если внутри интервала $[a, b]$ производная $f'(x)$ знак сохраняет, то этот корень на интервале единственный. Такой интервал называют **интервалом изоляции корня**.

На втором этапе производится уточнение этих корней с помощью численных методов, в том числе итерационных, для достижения заданной точности нахождения корней уравнения.

Метод Ньютона (касательных)

Пусть дано нелинейное уравнение $f(x)=0$ и пусть на интервале изоляции $[a, b]$ (рис. 2.1) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки. В качестве начального приближения x_0 выбираем конец интервала изоляции, на котором знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают (на рис. 2.1, например, $f(x_0)$ и $f''(x_0)$ положительны, поэтому принимаем $x_0 = a$).

В точке M с координатами $(x_0, f(x_0))$ проводим касательную к графику функции $f(x)$ до пересечения с осью абсцисс. Уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

В точке пересечения касательной с осью абсцисс имеем $x = x_1$, $y = 0$, откуда следует, что приближение $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Таким образом, формула метода Ньютона отыскания следующего приближения имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i), \quad (2.2)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$

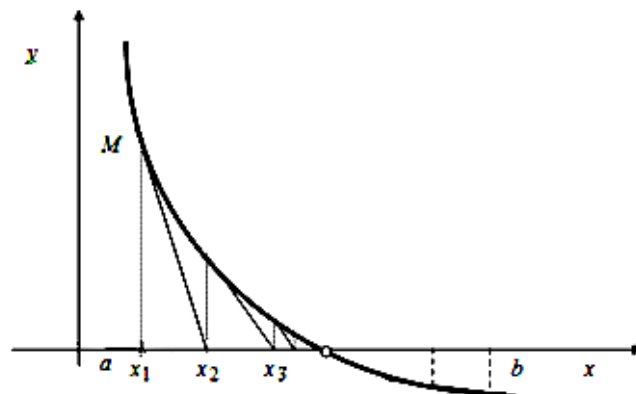


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация метода касательных

Вычислительный процесс по этой формуле продолжают до тех пор, пока значение $|f(x)|$ не станет меньше заранее заданного числа ε , то есть на некотором шаге n не будет выполняться условие

$$|f(x_n)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

Пример: Вычислить корень нелинейного уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ методом касательных с заданной точностью $\varepsilon = 0,001$, интервал изоляции корня $[1; 2]$.

Решение.

1) Записываем первую и вторую производные функции

$$f(x) = x^3 - x - 1; f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1, f''(x) = 6 \cdot x$$

2) Для концов интервала изоляции корня определяем:

$$\begin{aligned} f(1) \cdot f''(1) &= (1^3 - 1 - 1) \cdot (6 \cdot 1) = -1 \cdot 6 = -6 < 0; \\ f(2) \cdot f''(2) &= (2^3 - 2 - 1) \cdot (6 \cdot 2) = 5 \cdot 12 = 60 > 0 \end{aligned}$$

3) Так как $f(2) \cdot f''(2) > 0$, то за начальное приближение принимаем $x_0 = 2$ и вычисляем величины (вычисления ведем с пятью знаками после запятой):

$$f(x_0) = f(2) = 5; f'(x_0) = 11; f(x_0)/f'(x_0) = 5/11 = 0,45455,$$

по формуле (1.1) находим $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 2 - 0,45455 = 1,54545$

Делаем проверку $|f(x_1)| = 1,14572 > 0,001$, значит, необходимо продолжать вычисления. По рекуррентной формуле (2.2) находим приближение x_2 и т.д.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_i)/f'(x_i)$	x_{i+1}
0	2	5	11	0,45455	1,54545
1	1,54545	1,14576	6,16529	0,18584	1,35961
2	1,35961	0,15370	4,54566	0,03381	1,32580
3	1,32580	0,00462	4,27325	0,00108	1,32472
4	1,32472	0,00000	4,26464	0,00000	1,32472

Ответ: При $i = 4$ получено $|f(x_4)| = 0,0000 < 0,001$, значит, корень уравнения равен $x = 1,3247$.

Решение уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ в пакете Mathcad

1. Для этого в основном окне определим границы интервала поиска корня и функцию $f(x)$. С помощью панели «Исчисление» задаем первую и вторую производные этой функции. Далее, последовательно используя опции «add line», «if», «otherwise» панели программирования, определяем выбор начального приближения (a или b .) После набора « $x =$ » и нажатия «Enter» получим начальное значение $x = 2$.

$$a := 1 \quad b := 2$$

$$f(x) := x^3 - x - 1$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \quad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$x := \begin{cases} a & \text{if } f(a) \cdot f2(a) > 0 \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x = 2$$

2. С помощью встроенной функции root() найдем корень уравнения с точностью 0,001

$$\text{root}(f(x), x) = 1.325$$

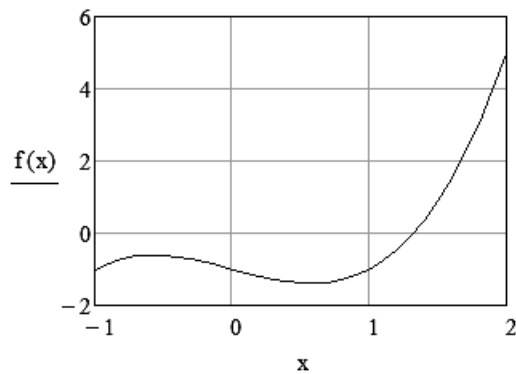
3. Решим уравнение графически. Определяем диапазон изменения переменной, например, $[-1, 2]$. Шаг изменения возьмем равным 0,1. После ввода переменной и знака присваивания (**Shift** + **:**) введем начальное значение интервала, запятую и нажмем клавишу **;** (точка с запятой). В появившийся шаблон

$$x := -1, \dots$$

вводим следующее значение переменной с учетом выбранного шага, затем – конечное значение переменной.

$$x := -1, -0.9 \dots 2$$

Чтобы построить график, можно воспользоваться панелью графиков или установить курсор в месте размещения графика и нажать **Shift** + **2**. В метку на оси ординат вводится имя функции $f(x)$, в метку на оси абсцисс – имя переменной x . Можно отредактировать график, нажав на области графика правую клавишу мыши и выбрав опцию «Формат» или «Свойства».



4. Выведем все промежуточные значения корня с проверкой условия прекращения счета на каждой итерации. Для этого в основном окне Mathcad кроме интервала изоляции корня, функции и начального значения введем рекуррентную формулу метода касательных и определим количество итераций от 0 до 5. Соответствующие результаты появляются после ввода $x_{i+1} =$ или $|f(x_{i+1})| =$ и знака равенства. Ниже приведен результат вышеописанных действий.

$$a := 1 \quad b := 2$$

$$f(x) := x^3 - x - 1$$

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$i := 1$$

$$x_{i-1} := 2$$

$$i := 0..5$$

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f1(x_i)}$$

$$x_{i+1} =$$

1.545
1.36
1.326
1.325
1.325
1.325

$$|f(x_{i+1})| =$$

1.146
0.154
$4.625 \cdot 10^{-3}$
$4.658 \cdot 10^{-6}$
$4.74 \cdot 10^{-12}$
0

Варианты заданий

11–21. Вычислить корень нелинейного уравнения методом касательных с заданной погрешностью вычисления $\varepsilon = 0,001$. Интервал изоляции корня указан в квадратных скобках. Вычисления выполнить: а) вручную, б) в пакете MathCad.

- | | |
|-----------------------------------|--------------|
| 11. $\cos 3x - x^3 = 0$ | [0,1; 1,5] |
| 12. $\operatorname{tg} x + x = 1$ | [0; 1] |
| 13. $\sin(e^x) + 3x = 0$ | [-1; 0,1] |
| 14. $x^2 + \sin^2 x = 2$ | [-1,5; -0,5] |
| 15. $x^4 - \sin^2 x + x = 1$ | [0,5; 1,5] |
| 16. $e^x (x - 5) + 3 = 0$ | [-1; -0,1] |
| 17. $x^5 - 2 \cos x = 0$ | [0,5; 1,5] |
| 18. $\cos^2 x - x^4 = 0$ | [0,5; 1] |
| 19. $e^{-x} - 3x - 5 = 0$ | [-1; -0,5] |
| 20. $\sin x - x^2 + 1 = 0$ | [1; 2] |

Тема 3. Интерполяционные полиномы

Интерполяция функции

Результаты экспериментов обычно бывают представлены ограниченным числом в виде таблиц, отражающих зависимость величины исследуемого явления y от фактора x . Для практического же применения, как правило, необходимо знать и промежуточные, по отношению к табличным, значения y . Зачастую явная связь между y и x неизвестна, поэтому возникает необходимость приближенной замены данной функции $f(x)$ некоторой функцией $g(x)$. Процедура нахождения функции $g(x)$ для данной функции $f(x)$ называется **приближением функций**.

Интерполяция есть восстановление функции (точное или приближенное) по известным ее значениям.

Пусть в результате эксперимента для функции $y = f(x)$ получены табличные ее значений $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ в точках $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ (называемых **узлами интерполирования**) отрезка $[a, b]$. **Интерполирующую функцию** обычно разыскивают в виде

$$g(x) = F(x, a_1, \dots, a_n), \quad (3.1)$$

где параметры $a_1, \dots, a_n$ подбирают так, чтобы $g(x)$ и $f(x)$ в узлах интерполирования совпадали, то есть

$$F(x_j, a_1, \dots, a_n) = f(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

При интерполировании наиболее трудным является удачный подбор интерполирующей функции $g(x) = F(x, a_1, \dots, a_n)$. Обычно выражение для $g(x)$ выбирают так, чтобы оно позволяло достаточно просто вычислять значения интерполирующей функции. После этого приближенно полагают $f(x) \approx g(x)$ для всех x из $[a, b]$. Чаще всего $g(x)$ разыскивают в виде полинома степени n , так как существует единственный полином степени не выше n , принимающий в точках $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ заданные значения $y = y_0, y_1, \dots, y_n$. Тогда коэффициенты $a_0, \dots, a_n$ в выражении (3.1) можно определить из системы линейных уравнений

[illegible]

Вычислив коэффициенты $a_0, \dots, a_n$, однозначно определяем интерполирующую функцию $g(x)$ в виде

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad (3.3)$$

Первая интерполяционная формула Ньютона (или интерполяционный многочлен для интерполирования вперед) имеет вид:

$$g(x) = y_0 + \frac{q}{1!} \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1) \cdots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (3.4)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$, $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ – конечные разности.

Разности первого порядка функции есть:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Разности второго порядка функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots, \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}.$$

Аналогично составляются разности порядка k :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для удобства конечные разности представляют в виде таблицы, в которую выписываются также значения аргумента x и функции y . Такую таблицу называют *таблицей конечных разностей*.

Таблица конечных разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

Вторая интерполяционная формула Ньютона (или интерполяционный многочлен для интерполирования назад) записывается в виде:

$$g(x) = y_n + \frac{q}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1) \dots (q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (3.5)$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Выбор исходной формулы выполняется следующим образом. Для вычисления значения функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка $[x_0, x_n]$ используется формула (3.4), для вычисления функции в точках правой половины отрезка $[x_0, x_n]$ - формула (3.5).

Пример. Задана таблица значений функции $y_i = f(x_i)$. Вычислить значение функции в промежуточной точке $x=2,3$, используя интерполяционные формулы Ньютона. Результат записать с тремя разрядами.

i	0	1	2	3	4
x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	4	5	5,5	5,7	5,8

Решение.

1. Функция рассчитывается для значения аргумента $x = 2,3$, принадлежащего левой половине рассматриваемого отрезка $[2, 4]$, поэтому основная формула – (3.4).

2. Рассчитаем вспомогательные величины.

Максимальная степень интерполяционного полинома n должна быть на единицу меньше числа узловых точек. В нашем случае узловых точек $k = 5$, а степень полинома $n = 4$.

Величина $q - n + 1 = q - 4 + 1 = q - 3$, шаг интерполяции составляет $h = x_1 - x_0 = 2,5 - 2,0 = 0,5$.

$$\text{При } x = 2,3 \text{ имеем } q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2,3 - 2}{0,5} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

3. Результаты расчетов конечных разностей функции y представим в табличном виде.

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	2,0	4	1,000	-0,500	0,200	0,000
1	2,5	5	0,500	-0,300	0,200	
2	3,0	5,5	0,200	-0,100		
3	3,5	5,7	0,100			
4	4,0	5,8				

Каждая последующая конечная разность получается путем вычитания в предыдущей колонке верхней строки из нижней.

4. Исходная формула (3.4) в нашем случае ($n = 4$) будет иметь вид:

$$g(x) = y_0 + \frac{q}{1!} \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

Используя ее, выполним расчеты:

$$\begin{aligned} g(2,3) = & 4 + 0,6 \cdot 1,0 + \frac{0,6(0,6-1)}{2} \cdot (-0,5) + \frac{0,6(0,6-1)(0,6-2)}{6} \cdot 0,2 + \\ & + \frac{0,6(0,6-1)(0,6-2)(0,6-3)}{24} \cdot 0,0 = 4,6712 \approx 4,671 \end{aligned}$$

5. Для сравнения проведем аналогичные вычисления по формуле (3.2), которая будет иметь вид:

$$g(x) = y_4 + \frac{q}{1!} \Delta y_3 + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_1 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

В этом случае $q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2,3 - 4}{0,5} = \frac{-1,7}{0,5} = -3,4$.

Тогда

$$\begin{aligned} g(2,3) = & 5,8 - 3,4 \cdot 0,1 + \frac{-3,4(-3,4+1)}{2} \cdot (-0,1) + \\ & + \frac{-3,4(-3,4+1)(-3,4+2)}{6} \cdot 0,2 + \\ & + \frac{-3,4(-3,4+1)(-3,4+2)(-3,4+3)}{24} \cdot 0,0 = 4,6712 \approx 4,671 \end{aligned}$$

Выводы: результаты вычислений значения функции в промежуточной точке $x = 2,3$ по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона с точностью округлений совпадают: $g(2,3) = 4,671$.

Решение в среде Excel

Вначале вычисляется *таблица конечных разностей*. Исходные данные разместим в ячейках A1:A3 и B1:B3 (рис. 3.1). Присвоим ячейкам B1, B2, B3 имена h , x , q соответственно (выделить ячейку или диапазон, далее использовать команду «Вставка-Имя-Присвоить»). В ячейку с адресом B3 поместим формулу $= (x - \$B\$6)/h$.

Заполнение ячеек A5:A13, A5:G5, B6:B10, C6:C10 также показано на рис. 3.1. В D6 пишем формулу $= C7 - C6$, получаем результат (клавиша Enter), затем, щелкнув D6, скопируем действие вниз до D9 (протянем мышью знак «+», появившийся в нижнем правом углу ячейки). Далее опять выделим D6 и протянем вправо до G6. Выполним копирование действия из E6 до E8, из F6 до F7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	h=	0,5					
2	x=	2,3					
3	q=	0,6					
4							
5	i	x	y_i	Δy_i	Δ²y_i	Δ³y_i	Δ⁴y_i
6	0	2	4	1,000	-0,500	0,200	0,000
7	1	2,5	5	0,500	-0,300	0,200	
8	2	3	5,5	0,200	-0,100		
9	3	3,5	5,7	0,100			
10	4	4	5,8				
11							
12	Коэффициенты	1	0,6	-0,12	0,056	-0,0336	f(x)
13	Слагаемые	4	0,6	0,06	0,0112	2,98E-17	4,6712

Рис. 3.1 Интерполяция в среде Excel

Следующий этап – вычисление коэффициентов, слагаемых и самого значения функции в точке 2,3 согласно первой интерполяционной формуле Ньютона. Для этого в указанные ячейки введем формулы:

	B	C	D	E	F	G
11						
12	1	=q	=C12*(q-1)/2	=D12*(q-2)/3	=E12*(q-3)/4	f(x)
13	=B12*C6	=C12*D6	=D12*E6	=E12*F6	=F12*G6	=СУММ(B13:F13)
..						

Рис. 3.2. Формулы для поиска коэффициентов и вспомогательных величин

Результат $f(2,3) = 4,6712$ получен в ячейке G13.

Аналогично проводятся вычисления по второй интерполяционной формуле Ньютона.

Варианты заданий

21–30. Функция $f(x)$ задана дискретно значениями y_i в узлах x_i . Используя первую и вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции $f(x)$ в точке $x = 1,7$. Исходные данные приведены в таблице согласно номерам заданий.

x_i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1,0	1,0	1,1	0,9	0,9	0,8	1,1	1,0	1,2	1,2	1,1
1,2	2,1	2,2	2,0	1,9	2,0	2,2	2,1	1,8	2,0	1,9
1,4	2,9	3,2	3,0	3,2	2,9	3,2	3,1	3,2	3,0	3,2
1,6	3,8	4,2	3,8	3,8	4,2	4,2	3,8	4,1	3,8	3,8
1,8	5,2	5,2	5,1	5,1	5,2	5,1	5,2	5,2	5,0	4,9
2,0	5,9	6,0	5,8	6,1	5,8	5,9	6,2	6,1	6,1	5,8

Тема 4. Численное интегрирование

Постановка задачи

При вычислении определенного интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, не всегда удается воспользоваться известной формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (4.1)$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Далее, если подынтегральная функция задается таблицей или графиком, интегрирование по формуле (4.1) также не представляется возможным.

В подобных случаях применяют различные методы приближенного вычисления интегралов. Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют *квадратурными формулами*. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа $L_n(x)$ и получается приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx \quad (4.2)$$

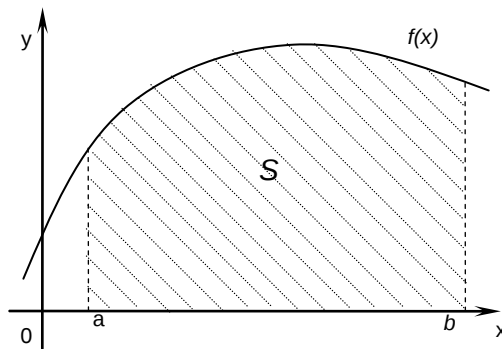


Рис. 4.1. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Формулы приближенного интегрирования можно получить и другим способом – исходя из геометрической интерпретации интеграла, а именно: *значение определенного интеграла на отрезке $[a, b]$ равняется площади подынтегральной кривой.*

4.1 Метод трапеций

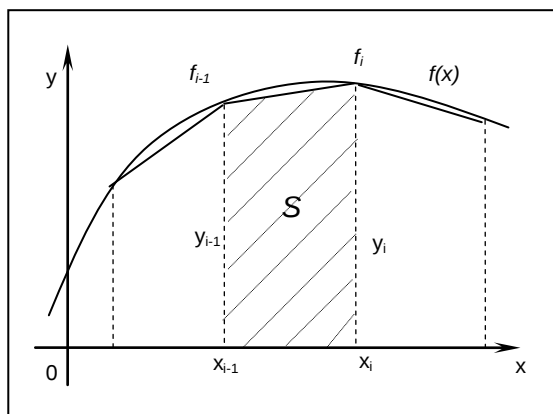


Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация метода трапеций

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом трапеций

разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей. Шаг разбиения будет равен $h = \frac{b-a}{n}$.

На каждом из отрезков заменим криволинейную фигуру трапецией: y_{i-1} и y_i – основания трапеции, $h = x_i - x_{i-1}$ – высота трапеции. Площадь трапеции находится по известной формуле:

$$S = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot h$$

Так как всего таких трапеций n штук, суммируя площади каждой из них, получим:

$$S = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

Преобразуем выражение: вынесем общий множитель h за скобки и приведем подобные:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (4.3)$$

Формула (4.3) называется **формулой метода трапеций**.

При замене криволинейной фигуры трапецией, возникает погрешность: часть фигуры между кривой и боковым ребром трапеции (на рисунке – отрезком (f_{i-1}, f_i)) остается неучтенной. Для того чтобы уменьшить погрешность, необходимо увеличить количество разбиений.

4.2 Метод прямоугольников

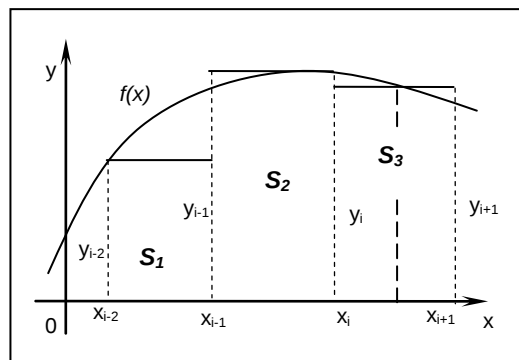


Рис. 4.3. Геометрическая интерпретация метода прямоугольников

Для нахождения значения определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, разобьем

отрезок $[a, b]$ на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Заменим на каждом частичном отрезке криволинейную фигуру прямоугольником.

Одна сторона прямоугольника равна шагу разбиения, а в зависимости от того, какой будет вторая сторона, меняется и формула метода прямоугольников:

1. Метод **левых прямоугольников** (на рисунке – S_1). Для построения прямоугольника берется значение функции на левом конце отрезка. Вычисляется площадь каждого из прямоугольников, а затем найденные площади суммируются. С учетом обозначения $y_i = f(x_i)$ формула приобретает вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot h \quad (4.4a)$$

Значение функции в точке x_n не берется, т.к. по данному значению прямоугольник уже не строится (выходим за пределы отрезка $[a, b]$).

2. Метод **правых прямоугольников** (на рисунке – S_2). Прямоугольник строим по значению функции на правом конце отрезка, крайнее левое значение (т.е. $f(x_0)$) не учитываем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n y_i \cdot h \quad (4.4б)$$

3. Метод **средних прямоугольников** (на рисунке – S_3). Найдем середину частичного отрезка и вычислим значение функции в этой точке. По полученному значению построим прямоугольник. Формула примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \cdot h \quad (4.4в)$$

Наименьшую погрешность имеет метод средних прямоугольников. Для того чтобы получить более точное значение интеграла, необходимо увеличить число разбиений.

4.3 Метод Симпсона

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, причем количество разбиений n обязательно должно быть четным. Заменяем график функции $f(x)$ квадратичной параболой, проходящей через три точки с координатами (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Для получения формулы метода Симпсона воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа в виде

$$y(x) = y_0 \cdot A_0(x) + y_1 \cdot A_1(x) + y_2 \cdot A_2(x) \quad (4.5)$$

где
$$A_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad A_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

$$A_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

При $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$ получим:

$$A_0(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{2h^2} = \frac{x^2 - x \cdot 3h + 2h^2}{2h^2},$$

$$A_1(x) = \frac{x(x-2h)}{h \cdot (-h)} = \frac{x^2 - 2hx}{-h^2}, \quad A_2(x) = \frac{x(x-h)}{2h^2} = \frac{x^2 - hx}{2h^2}.$$

Подставляя найденные значения $A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ в формулу (4.5) и вычисляя значение интеграла полученного многочлена, получим:

$$\begin{aligned} \int_{x_0=0}^{x_0+2h} y(x) dx &= \int_0^{2h} y_0 \cdot A_0(x) dx + \int_0^{2h} y_1 \cdot A_1(x) dx + \int_0^{2h} y_2 \cdot A_2(x) dx = \\ &= \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3} = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Распространяя найденную формулу на все отрезки, получим:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \quad (4.6)$$

Формула (4.6) называется **формулой метода Симпсона**. Чаще ее записывают, группируя значения функции с одинаковыми коэффициентами:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$$

Метод Симпсона имеет самую высокую точность результата вычислений по сравнению с методами прямоугольников и трапеций.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$ с помощью метода трапеций с разбиением интервала интегрирования $[0,1]$ на $n = 10$ частей. Шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Очевидно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} I_{mp} &\approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} \right) = \\ &= h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) = 0,1 \cdot \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(0,1) + f(0,2) + \dots + f(0,9) \right) = \\ &= 0,1 \cdot \left(\frac{1/(0^2 + 1) + 1/(1^2 + 1)}{2} + 1/(0,1^2 + 1) + 1/(0,2^2 + 1) + \dots + 1/(0,9^2 + 1) \right) = \\ &= 0,1 \cdot \left(\frac{1 + 0,5}{2} + 0,990 + 0,962 + \dots + 0,552 \right) = 0,7849 \end{aligned}$$

Найдем этот же интеграл по формуле Симпсона.

$$\begin{aligned} I_{см} &\approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] = \\ &= \frac{0,1}{3} \cdot [f(0) + f(1) + 4(f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)) + \\ &\quad + 2(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8))] = \end{aligned}$$

$$= \frac{0,1}{3} \cdot [1 + 0,5 + 4(0,990 + 0,917 + 0,8 + 0,671 + 0,552) + 2(0,962 + 0,862 + 0,735 + 0,610)] = 0,7854$$

Решение в среде Excel

Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ с помощью методов трапеций и Симпсона

с разбиением интервала интегрирования $[0,1]$ на $n = 10$ частей.

В столбцы А и В занесем соответственно значения индекса i и переменной x . В ячейку с адресом С2 введем формулу $= 1/(B2^2+1)$, нажмем Enter, скопируем маркером заполнения (навести курсор мыши на нижний правый угол этой ячейки, захватить появившийся знак «+») в С3:С12. В 15-й строке столбцов А, В, С, D разместим значения границ интервала интегрирования, количество разбиений и шаг интегрирования.

В ячейке E10 произведем подсчет по формуле метода трапеций: $=D15*((C2+C12)/2+СУММ(С3:С11))$, в ячейке F10 по формуле метода Симпсона: $=D15*(C2+C12+4*(C3+C5+C7+C9+C11)+2*(C4+C6+C8+C10))/3$. Результаты вычислений приведены ниже

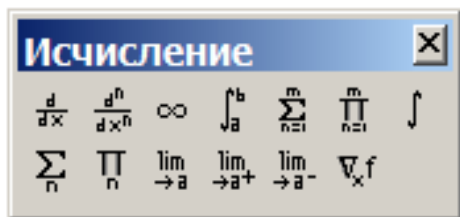
	A	B	C	D	E	F
1	i	x_i	y_i			
2	0	0	1			
3	1	0,1	0,990099			
4	2	0,2	0,961538			
5	3	0,3	0,917431			
6	4	0,4	0,862069			
7	5	0,5	0,8		метод	метод
8	6	0,6	0,735294		трапеций	Симпсона
9	7	0,7	0,671141			
10	8	0,8	0,609756		0,784981	0,785398
11	9	0,9	0,552486			
12	10	1	0,5			
13						
14	a	b	n	h		
15	0	1	10	0,1		

Рис. 4.1 Численное интегрирование в среде Excel

Решение в системе Mathcad

Приближенное интегрирование в Mathcad производится несколькими численными методами, причем в зависимости от вида подинтегральной функции автоматически выбирается наиболее эффективный из них.

Подсчет определенного интеграла выполняется с помощью панели инструментов «Исчисление» (можно нажать клавиши Shift+&),



откуда надо выбрать шаблон $\int_a^b f(x) dx$

После заполнения шаблона (ввести в верхнюю и нижнюю метки границы интегрирования, в среднюю метку - подинтегральную функцию, в крайнюю правую – переменную интегрирования) вводится знак равенства (=). Для нашего примера результат следующий

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 0.785$$

Варианты заданий

31-40. 1. Вычислить определенный интеграл по формулам методов трапеций и метода Симпсона с шагом $h = \frac{b-a}{10}$. Сравнить полученные результаты.

2. Провести решение в среде Excel и системе Mathcad.

$$31. \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 1}, \quad a = -1, \quad b = 9$$

$$32. \quad f(x) = \frac{8}{(3x + 4)^2}, \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$33. \quad f(x) = \frac{1 + e^{2x}}{5}, \quad a = 0, \quad b = 3$$

$$34. \quad f(x) = 3x + \ln x, \quad a = 1, \quad b = 2$$

$$35. \quad f(x) = \frac{12}{(4x - 9)^2}, \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$36. \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 8}, \quad a = -2, \quad b = 8$$

$$37. \quad f(x) = \sqrt{27 - x^3}, \quad a = -7, \quad b = 3$$

$$38. \quad f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad a = 1, \quad b = 7$$

$$39. \quad f(x) = \sqrt{2 - x^3}, \quad a = -9, \quad b = 1$$

$$40. \quad f(x) = \frac{1}{1 + x}, \quad a = 0, \quad b = 9$$

Тема 5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (5.1)$$

$$\text{с начальным условием (задача Коши)} \quad y(x_0) = y_0 \quad (5.2)$$

Выбирая достаточно малый шаг h , на оси абсцисс построим систему равноотстоящих точек (узлов) $x_i = x_0 + i h$, ($i = 0, 1, 2, \dots$).

и для каждой точки x_i получим решение уравнения (5.1) – y_i по следующей рекуррентной формуле метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, 3, \dots). \quad (5.3)$$

Пример. Методом Эйлера решить уравнение

$$y' = x + y \quad (5.4)$$

на отрезке $[0; 0,5]$ с шагом $h = 0,05$, при начальном условии $y_0 = y(0) = 1$.

Решение.

Определяем значение производной при $x_0 = 0$:

$$y'(0) = (x + y)_{x=0, y(0)=1} = (x_0 + y_0) = 0 + 1 = 1.$$

Теперь по формуле (5.3) вычисляем y_1 при $x = 0,05$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0,05 \cdot 1 = 1,05$$

Вычисляем производную при $x_1 = x_0 + h = 0 + 0,05 = 0,05$:

$$y'(0,05) = (x + y)_{x=0,05, y(0,05)=1,05} = 0,05 + 1,05 = 1,10$$

Искомое значение функции при $x_2 = x_1 + h = 0,05 + 0,05 = 0,1$ составит $y_2 = y(0,1) = 1,05 + 0,05 \cdot 1,10 = 1,1050$.

Дальнейшие вычисления продолжаем по формуле (5.3). Результаты представим в табличном виде (табл. 5.1) (в столбце 4 табл. 5.1 для сравнения приведены результаты точного решения уравнения (5.4) $y = 2e^x - x - 1$ для соответствующих значений аргументов. (Замечание: при выполнении задания столбец 4 заполнять не нужно).

Таблица 5.1

Интегрирование ОДУ методом Эйлера

i	x_i	y_i	$2e^x - x - 1$
1	2	3	4
1	0,05	1,0500	1,0525
2	0,10	1,1050	1,1103
3	0,15	1,1652	1,1738
4	0,20	1,2310	1,2428
5	0,25	1,3026	1,3180
6	0,30	1,3802	1,3997
7	0,35	1,4642	1,4881
8	0,40	1,5549	1,5836
9	0,45	1,6527	1,6866
10	0,50	1,7578	1,7974

Решение задачи Коши методом Эйлера в среде Mathcad

Ниже приведен ход решения рассмотренного примера. Вначале определяется функция, границы диапазона изменения параметра x , записывается начальное условие как $y_0 = 1$. Затем задаем шаг интегрирования h , определяем размерность массивов x и y (n и i).

Следующее действие: присваиваем элементу массива y_0 начальное значение y_0 , определяем массив x_i и записываем формулу метода Эйлера для поиска значений y_i .

Ниже набираем « $x =$ », « $y =$ », получаем результат в виде таблиц. Точность решения по умолчанию (значение параметра TOL) составляет 0,001.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &:= x + y & a &:= 0 & b &:= 0.5 & y_0 &:= 1 \\
 h &:= 0.05 & n &:= \frac{b - a}{h} & n &= 10 \\
 i &:= 0..n \\
 y_0 &:= y_0 & x_i &:= a + i \cdot h \\
 y_{i+1} &:= y_i + h \cdot f(x_i, y_i)
 \end{aligned}$$

 $x =$

	0
0	0
1	0.05
2	0.1
3	0.15
4	0.2
5	0.25
6	0.3
7	0.35
8	0.4
9	0.45
10	0.5

 $y =$

	0
0	1
1	1.05
2	1.105
3	1.165
4	1.231
5	1.303
6	1.38
7	1.464
8	1.555
9	1.653
10	1.758
11	1.871

Как видно, результаты расчетов в программе Mathcad совпадают со значениями в таблице 5.1, полученными непосредственным интегрированием с помощью метода Эйлера. Заметим, что погрешность вычисления функции в узлах увеличивается вместе с номером i .

Варианты заданий

41–50. Используя метод Эйлера, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$; шаг h ; интервал $[a, b]$. Результаты вычислений в таблицу записать с точностью 0,0001.

№	$f(x, y)$	$[a, b]$	$y(x_0) = y_0$	h
41	$3x^2 + 0,1xy$	$[0; 1]$	$y(0) = 0,2$	$0,1$
42	$x + \cos\left(\frac{y}{3}\right)$	$[1,6; 2,6]$	$y(1,6) = 4,6$	$0,1$
43	$x + \sin\left(\frac{y+1}{\sqrt{13}}\right)$	$[0,2; 1,2]$	$y(0,2) = 1,1$	$0,1$
44	$-3y + \sqrt{4x^2 + 1}$	$[2,6; 4,6]$	$y(2,6) = 3,5$	$0,2$
45	$e^{2x} + 0,25y^2$	$[0; 0,5]$	$y(0) = 2,6$	$0,05$
46	$\sin(x + y) + 1,5$	$[1,5; 2,5]$	$y(1,5) = 4,5$	$0,1$
47	$2,5x + \cos(y + 0,6)$	$[1; 3]$	$y(1) = 1,5$	$0,2$
48	$\frac{1}{1+x^3y} + 2y$	$[1,5; 2]$	$y(1,5) = 2,1$	$0,05$
49	$1 + 2,2\sin x + 1,5y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	$0,1$
50	$\cos(x - y) + \frac{1,25y}{1,5 + x}$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	$0,1$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Программа дисциплины	6
Рекомендации по изучению дисциплины «Вычислительная математика»	6
Литература	10
Методические указания по изучению дисциплины «Вычислительная математика»	10
Правила выполнения и оформления контрольной работы по дисциплине «Вычислительная математика»	13
Задания контрольной работы	14

Учебное издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для студентов заочной формы обучения
направления подготовки
210100.62 «Электроника и нанoeлектроника»,
профиля «Промышленная электроника»,
квалификации – бакалавр

Составитель: **Николаева Светлана Глебовна**

Кафедра инженерной кибернетики КГЭУ

Авторская редакция
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 28.03.13.

Формат 60×84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,58. Тираж 500 экз. Заказ 4602

Редакционно-издательский отдел КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51