МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.Ш. ХАКИМУЛЛИНА

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Динамика

Учебное пособие

Казань 2013

УДК 531
ББК 22.21
Х16

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической
и прикладной механики КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева *А.Ю. Хасанов*;
кандидат технических наук, зав. кафедрой ГТЭУД Казанского
государственного энергетического университета *А.В. Титов*

Хакимуллина, Л.Ш.
Х16 **Лекции по теоретической механике. Динамика**: Учеб. пособие / Л.Ш. Хакимуллина. − Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2013. − 136 с.

Изложена вторая часть двухсеместрового курса теоретической механики, включающая раздел «Динамика». Содержание лекций соответствует государственным образовательным стандартам дисциплины «Теоретическая механика» для направления «Энергетическое машиностроение». Теоретический материал сопровождается примерами.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению 141100 «Энергетическое машиностроение».

УДК 531
ББК 22.21

ПРЕДИСЛОВИЕ

«*Ясные и широкие идеи Ньютона навечно сохранят своё значение фундамента, на котором построены наши современные физические представления*».

Альберт Эйнштейн

Настоящее учебное пособие представляет вторую часть двухсеместрового курса лекций автора по дисциплине «Теоретическая механика», включающую раздел «Динамика». Опубликованная ранее первая часть содержит разделы «Статика» и «Кинематика». Лекции адресованы студентам, обучающимся по направлению подготовки бакалавров 141100 «Энергетическое машиностроение», для которых указанная дисциплина относится к базовой части профессионального цикла основной образовательной программы. Содержание лекций соответствует учебной программе дисциплины для данного направления подготовки. Цель лекций – обучить студентов основным задачам и методам динамики и аналитической механики. В условиях сокращения часов на дисциплину и важности для технических специальностей практического применения полученных знаний, в лекциях теоретические обоснования и доказательства теорем, где это возможно, упрощены и, по возможности, больше внимания уделено примерам. Помимо общих разделов динамики, в лекции включены вопросы определения динамических реакций опор вращающегося тела и условия его динамической уравновешенности, рассмотрены гироскопические явления в динамике твердого тела, полезные, с точки зрения автора, для обучающихся специальности «Газотурбинные, паротурбинные установки и двигатели».

При самостоятельной проработке курса лекций рекомендуется ответить на вопросы и решить примеры для самоконтроля, приведенные в конце каждой лекции.

Содержание и изложение лекций базируется на материалах учебников и учебно-методических пособий [1]–[8].

ЛЕКЦИЯ № 1
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Инерциальные системы отсчета. Аксиомы динамики

Материальной точкой в механике называют простейшую модель физического тела любой формы, размерами которого и вращением можно пренебречь в рассматриваемой задаче, и которое можно принять за геометрическую точку, наделенную механическими свойствами. Эти свойства материальной точки определяются аксиомами динамики, называемыми также законами Ньютона, поскольку Ньютон впервые объединил их в систему, представляющую в современной трактовке основы динамики.

А1 Аксиома инерции, или принцип инерции, открытый Галилеем (первый закон Ньютона)

Изолированная материальная точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока на нее не подействуют силы.

Под изолированной материальной точкой понимается материальная точка, свободная от силового воздействия. Система отсчета, в которой справедлива аксиома А1, называется *инерциальной системой отсчета*. Аксиома инерции фактически постулирует существование инерциальной системы отсчета. В действительности, инерциальных систем отсчета не существует. Это абстрактное понятие. Но для движений внутри Солнечной системы с большой точностью за инерциальную можно считать гелиоцентрическую систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на условно «неподвижные» звезды. При решении большинства технических задач, пренебрегая малой неинерциальностью, за инерциальную принимают систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Для инерциальной системы отсчета справедлива вторая аксиома динамики.

А2 Второй закон Ньютона, или основной закон динамики

Ускорение, сообщаемое точке силой, ей пропорционально и сонаправлено и обратно пропорционально массе точки:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m},}$$

где m – масса материальной точки, $\bar{a}$ – ее ускорение, $\bar{F}$ – сила, действующая на материальную точку, которая может зависеть от времени, положения точки и ее скорости, но не зависит от ускорения точки.

Обычно в механике основной закон динамики принято записывать в виде:

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}}$$

А3 Аксиома равенства действия и противодействия, или третий закон Ньютона

При взаимодействии двух материальных точек силы действия и противодействия являются противоравными силами.

Указанные силы не уравновешиваются, так как приложены к разным материальным объектам. Этой аксиомой уже пользовались в статике. Она также играет большую роль в динамике механической системы, как устанавливающая зависимости между действующими на материальные точки системы внутренними силами.

А4 Аксиома независимости действия сил, или закон сложения сил

Ускорение, сообщаемой материальной точке при одновременном действии нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых этой точке каждой силой в отдельности.

То есть, если на точку действует система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$,

то

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i, \quad \bar{a}_i = \frac{\bar{F}_i}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и основной закон динамики примет вид

$$\boxed{m\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.}$$

Это равенство называют также *основным уравнением динамики*. Частным случаем аксиомы для двух сил является аксиома параллелограмма сил, которую рассматривали в статике.

Примечания

1. Ускорения, которые фигурируют в аксиомах А2 и А4, являются абсолютными ускорениями.

2. Аксиомы А1-А4 справедливы для свободной материальной точки.

Материальная точка называется *свободной*, если её перемещения не ограничены другими телами (связями).

Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки

Пусть *Oxyz* – инерциальная система отсчета (ИСО). В ИСО справедливы аксиомы А1 и А2:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \qquad (1.1)$$

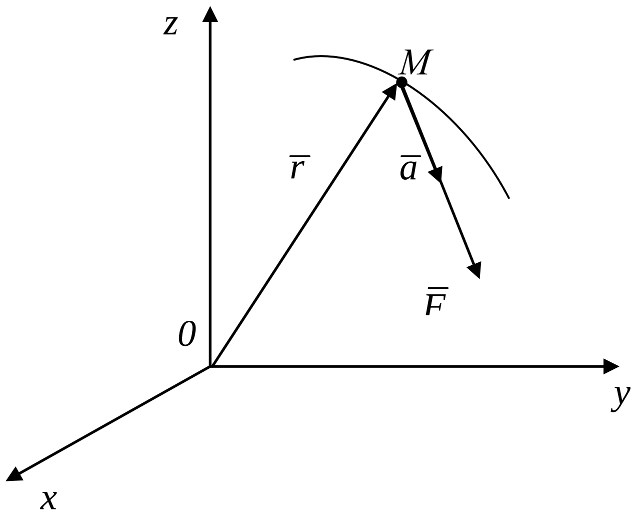


Рис. 1.1

Учитывая, что по определению ускорение точки равно $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ и подставляя это выражение в формулу (1.1), получим

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}). \qquad (1.2)$$

В уравнении (1.2) допускается, что сила может зависеть от времени t, положения (определяется радиус-вектором $\bar{r}$) и скорости $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Получили, что радиус-вектор $\bar{r}$ в каждый момент времени является содержимым дифференциального уравнения. Таким образом, формула (1.2) определяет *дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в векторной форме.*

Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в координатной форме

Проектируя уравнение (1.2) на оси ИСО *Oxyz*, получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

В этих уравнениях x, y, z – это координаты движущейся точки M (проекции радиус-вектора $\bar{r}$), $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекции вектора $\overline{V}$ скорости точки, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора $\bar{a}$ ускорения точки на оси системы координат *Oxyz*.

Уравнения (1.3) являются *дифференциальными уравнениями движения свободной материальной точки в координатной форме*.

Естественные уравнения движения свободной материальной точки

Введем вместо декартовых осей естественные оси $M\bar{\tau}\bar{n}\bar{b}$ на траектории точки в каждый момент времени и спроектируем на них основной закон динамики (1.1):

$$\begin{cases} ma_\tau = F_\tau, \\ ma_n = F_n, \\ ma_b = F_b. \end{cases}$$

Учитывая, что касательное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n и бинормальное ускорение a_b точки равны

$$a_\tau = \ddot{s}\,,\; a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\,,\; a_b = 0\,,$$

где s – дуга, определяющая положение точки M на траектории, ρ – радиус кривизны траектории в текущем положении точки M, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ \frac{m(\dot{s})^2}{\rho} &= F_n(t, s, \dot{s}), \\ 0 &= F_b(t, s, \dot{s}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) являются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в естественной форме.* Их также называют уравнениями в форме Эйлера.

Основные задачи динамики свободной материальной точки

Выделяют две основные задачи динамики свободной материальной точки:

1. *Прямая задача.*

Считая заданным движение материальной точки массой *m*, например, в векторной форме $\bar{r} = \bar{r}\,(t)$, определить равнодействующую сил $\bar{F} = \bar{F}(t)$, вызывающих это движение.

Чтобы решить эту задачу, нужно определить ускорение $\bar{a}$ точки, продифференцировав дважды заданный закон движения точки

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

и подставить его в основной закон динамики:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Таким образом, прямая задача всегда решается до конца.

Пример 1. Пусть уравнения движения точки заданы координатным способом:
$x = a\cos kt,\quad y = b\sin kt.$ Определить $\bar{F} = \bar{F}(t)$.

Решение. Траекторией точки является эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из уравнений (1.3) $F_x = m\ddot{x} = -mak^2\cos kt = -mk^2x,$

$$F_y = m\ddot{y} = -mbk^2\sin kt = -mk^2y.$$

Разложим вектор силы по ортам осей *x* и *y*:

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} = -mk^2(x\bar{i} + y\bar{j}) = -mk^2\bar{r}. \qquad (1.5)$$

Из формулы (1.5) видно, что сила $\bar{F}$ будет всегда направлена вдоль радиус-вектора точки $\bar{r}$ в противоположную ему сторону.

По модулю сила равна

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=mk^2\sqrt{a^2\cos^2 kt+b^2\sin^2 kt}.$$

2. *Обратная задача.* (*Основная задача динамики свободной точки*)

Определить движение, которое будет совершать точка массой m, под действием заданных сил, равнодействующая которых равна $\bar{F}=\bar{F}(t,\bar{r},\frac{d\bar{r}}{dt})$.

Решение. Используем уравнения (1.3). Чтобы решить обратную задачу, нужно найти решение дифференциальных уравнений (1.3), т.е. проинтегрировать их. Аналитически эта задача решается только в частных случаях. Если аналитическое решение системы (1.3) невозможно, оно решается численно.

Если систему уравнений (1.3) удастся один раз проинтегрировать, то полученные новые зависимости будут включать время, координаты, их первые производные и три константы интегрирования C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases}\Phi_1(t;\, x,y,z;\, \dot{x},\dot{y},\dot{z};\, C_1,C_2,C_3)=0,\\ \Phi_2(t;\, x,y,z;\, \dot{x},\dot{y},\dot{z};\, C_1,C_2,C_3)=0,\\ \Phi_3(t;\, x,y,z;\, \dot{x},\dot{y},\dot{z};\, C_1,C_2,C_3)=0.\end{cases} \tag{1.6}$$

Систему (1.6) называют системой первых интегралов уравнений динамики точки.

Если систему (1.6) удастся проинтегрировать еще раз, то полученное решение будет зависеть еще от 3-х констант интегрирования C_4, C_5, C_6:

$$\begin{cases}\Psi_1(t;\, x,y,z;\, C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0,\\ \Psi_2(t;\, x,y,z;\, C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0,\\ \Psi_3(t;\, x,y,z;\, C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0.\end{cases} \tag{1.7}$$

Для определения констант интегрирования используют начальные условия, которые задают начальное положение точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и ее начальную скорость $\bar{V}_0(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$ в момент времени $t = t_0$:

$$\begin{cases}x=x_0;\ y=y_0;\ z=z_0;\\ \dot{x}=\dot{x}_0;\ \dot{y}=\dot{y}_0;\ \dot{z}=z_0.\end{cases} \tag{1.8}$$

Подставляя начальные условия (1.8) в выражения (1.6) и (1.7), составляют шесть уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{cases} \Phi_1(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\, C_1, C_2, C_3) = 0, \\ \Phi_2(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\, C_1, C_2, C_3) = 0, \\ \Phi_3(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\, C_1, C_2, C_3) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_1(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0, \\ \Psi_2(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0, \\ \Psi_3(t_0;\, x_0, y_0, z_0;\, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0. \end{cases}$$

После определения констант интегрирования решение задачи, соответствующее заданным начальным условиям (1.8), записывается в виде:

$$\begin{cases} x = x(t;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y = y(t;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z = z(t;\, x_0, y_0, z_0;\, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{cases}$$

Пример 2. Задача Галилея

Рассмотрим движение тяжелой материальной точки в поле постоянной силы тяжести, брошенной с начальной скоростью V_0 под углом α_0 к горизонту.

Будем считать, что плоскость $\overline{V}_0 zy$ совпадает с плоскостью бросания в момент времени $t = 0$ (рис. 1.2).

Дано: $P = mg$. Начальные условия: При $t = 0$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_{0x} = 0$, $\dot{y}_0 = V_{0y} = V_0 \cos\alpha$, $\dot{z}_0 = V_{0z} = V_0 \sin\alpha$.

Найти $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

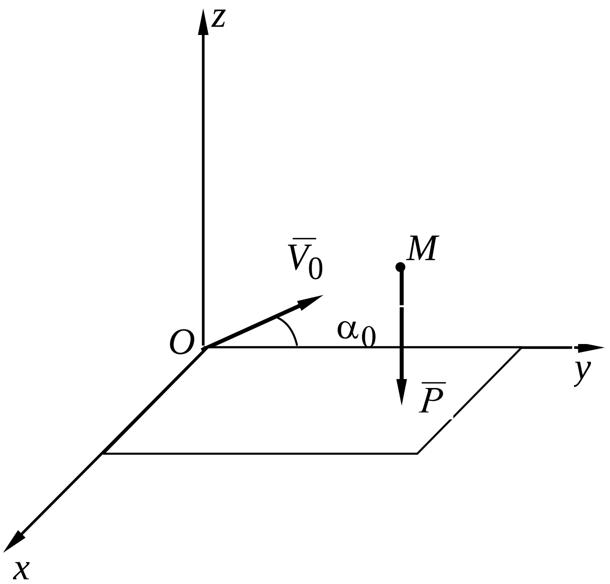


Рис. 1.2

Решение. Основное уравнение динамики свободной материальной точки запишется в виде

$$m\overline{a} = \overline{P}. \tag{1.9}$$

Проектируя уравнение (1.9) на оси Ox, Oy, Oz, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P_x = 0, \\ m\ddot{y} = P_y = 0, \\ m\ddot{z} = P_z = -mg. \end{cases} \tag{1.10}$$

Разделяя переменные и сокращая на *m*, получим:

$$d\dot{x} = 0\,, d\dot{y} = 0\,, d\dot{z} = -g\,. \tag{1.11}$$

Интегрируя уравнения (1.11), будем иметь

$$\dot{x} = C_1\,, \dot{y} = C_2\,, \dot{z} = -gt + C_3\,, \tag{1.12}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования.

Подставляя в уравнения (1.12) начальные условия, получим

$$C_1 = 0\,,\ \ C_2 = V_0\cos\alpha\,,\ C_3 = V_0\sin\alpha\,.$$

$$\dot{x} = 0\,,\ \dot{y} = V_0\cos\alpha\,,\ \dot{z} = -gt + V_0\sin\alpha\,. \tag{1.13}$$

Вновь разделяя переменные в уравнениях (1.13) и интегрируя, получим

$$x = C_4\,,\ y = (V_0\cos\alpha)t + C_5\,,\ z = -\frac{gt^2}{2} + (V_0\sin\alpha)t + C_6\,.$$

Используя начальные условия $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, определим константы интегрирования C_4, C_5, C_6:

$$C_4 = 0\,,\ C_5 = 0\,,\ C_6 = 0\,.$$

Следовательно, закон движения точки имеет вид:

$$x \equiv 0\,,\ y = (V_0\cos\alpha)t\,,\ z = -\frac{gt^2}{2} + (V_0\sin\alpha)t.$$

Из уравнений видно, что траекторией точки является плоская кривая (парабола), расположенная в вертикальной плоскости.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте аксиомы динамики.
2. Какая система отсчета называется инерциальной?
3. Запишите дифференциальные уравнения свободной материальной точки в проекциях на оси декартовой системы координат.
4. В чем заключаются две основные задачи динамики свободной материальной точки?
5. На материальную точку, кроме силы тяжести, действует сила $\overline{F} = gmt\overline{k}$, где m – масса точки, g – ускорение свободного падения, $\overline{k}$ – орт вертикальной оси z декартовой системы координат. Точка движется из состояния покоя. Определить закон движения точки. (Ответ : $g(t^3/6 - t^2/2)$).

ЛЕКЦИЯ № 2
ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если точка во всё время движения (независимо от действующих сил) вынуждена двигаться по поверхности, либо по линии, либо в ограниченной области пространства, то она называется несвободной, а её движение – несвободным.

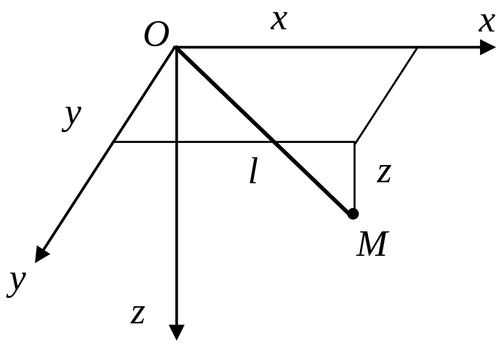


Рис. 2.1

Рассмотрим движение материальной точки M, находящейся на конце нерастяжимого стержня длиной l, другой конец которого закреплён с помощью шарнира в точке O (рис. 2.1). При любых силах, приложенных к материальной точке, она совершает движение по поверхности сферы, радиус которой равен длине стержня. Координаты точки не будут независимыми, так как они должны удовлетворять уравнению сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \tag{2.1}$$

Ограничения, благодаря которым материальная точка вынуждена совершать несвободное движение, называются *связями*. Это понятие уже встречалось в статике. При изучении несвободного движения пользуются также знакомым из курса статики *принципом освобождаемости от связей*, а именно: при рассмотрении несвободного движения следует действие связей на материальную точку заменить реакциями этих связей и рассмотреть материальную точку как свободную, но находящуюся под действием как активных сил, так и реакций связей.

Уравнения линии или поверхности, по которым совершает движение точка, называются *уравнениями связей*. Примером уравнения связи, когда точка движется по поверхности, является уравнение (2.1). Если материальная точка движется по линии, то уравнения связи можно представить в виде

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

т.е. в виде уравнений поверхностей, линией пересечения которых является траектория точки.

Если точка принуждена оставаться в некоторой области пространства, то уравнение связи аналитически задаётся в виде неравенства. Например, если в вышеуказанном случае (рис. 2.1) заменить стержень нитью, уравнение связи будет иметь вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \le 0. \tag{2.2}$$

Такая связь называется *неудерживающей*. Если точка благодаря связи вынуждена оставаться на поверхности либо на линии, то такая связь называется *удерживающей*. Уравнение связи в этом случае записывается в виде равенства. Таким образом, связь в первом случае (рис. 2.1) является удерживающей.

Если время t явно не входит в уравнение связи, то связь называется *стационарной*. В примерах (2.1), (2.2) связи являются стационарными.

Если время t входит явно в уравнение связи, то связь называется *нестационарной*. Например, если в вышеуказанном случае (2.1) стержень втягивать, то уравнение связи будет иметь вид:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0. \tag{2.3}$$

Связи делятся также на *геометрические* и *кинематические*. Когда уравнения связывают координаты точки, связь называют *геометрической*. В приведённых примерах (2.1), (2.2), (2.3) связи являются геометрическими. Если уравнения связывают кроме координат также и скорость (проекции скорости) точки, то такие связи называются *кинематическими:*

$$\varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0.$$

При движении точки по поверхности либо по линии реакцию связи можно разложить на касательную и нормальную составляющие. Касательная составляющая представляет собой силу трения. Связи без трения, реакции которых не имеют касательных составляющих, называются *идеальными связями.*

Основные уравнения динамики несвободной точки

Рассмотрим движение несвободной материальной точки массой *m*, на которую действуют силы, от связей не зависящие и которые, как известно, называются активными. Пусть $\overline{F}$ – равнодействующая активных сил. Применим принцип освобождаемости от связей и приложим к точке реакции связей. Пусть $\overline{R}$ – равнодействующая реакций связей. Теперь точка стала свободной, но во всё время движения должна удовлетворять уравнениям связей. Следовательно, к основному уравнению динамики необходимо добавлять уравнения связей. Тогда в инерциальной системе отсчёта основное уравнение динамики имеет вид:

$$\begin{cases} m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}, \\ \{\textit{уравнения связей}\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Основные задачи динамики несвободной материальной точки

Как и в случае свободной точки, имеем две основные задачи.

1. *Прямая задача.* Зная движение $\overline{r} = \overline{r}(t)$ материальной точки массой *m* и действующую на неё равнодействующую активных сил $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \frac{d\overline{r}}{dt})$, определить возникающую при этом реакцию связи $\overline{R} = \overline{R}(t)$.

Для решения этой задачи используем основное уравнение динамики несвободной точки. Получим

$$\overline{R} = m\overline{a} - \overline{F} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} - \overline{F}(t) \equiv \overline{R}(t).$$

Прямая задача всегда решается до конца.

2. *Обратная задача.* Зная равнодействующую активных сил $\overline{F}=\overline{F}(t,\overline{r},\frac{d\overline{r}}{dt}),$ действующих на несвободную точку массой $m,$ определить её движение $\overline{r}=\overline{r}(t)$ и равнодействующую возникающих при этом реакций связей $\overline{R}=\overline{R}(t)$.

Решение этой задачи связано с интегрированием дифференциальных уравнений движения, удовлетворяющих заданным уравнениям связей

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{F}+\overline{R}, \\ \{\text{уравнения связей}\}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Задача в общем случае практически не разрешима, поскольку количество неизвестных превышает число уравнений.

Решение задачи принципиально возможно, если сделаны некоторые дополнительные предположения о характере наложенных на материальную точку связей.

Рассмотрим следующий случай движения несвободной материальной точки.

Движение материальной точки по неподвижной кривой

Будем считать, что кривая, по которой движется материальная точка, задана. Примером такого движения точки может служить бусинка, движущаяся по проволоке. Для произвольного момента времени изобразим точку M в текущем положении (рис. 2.2).

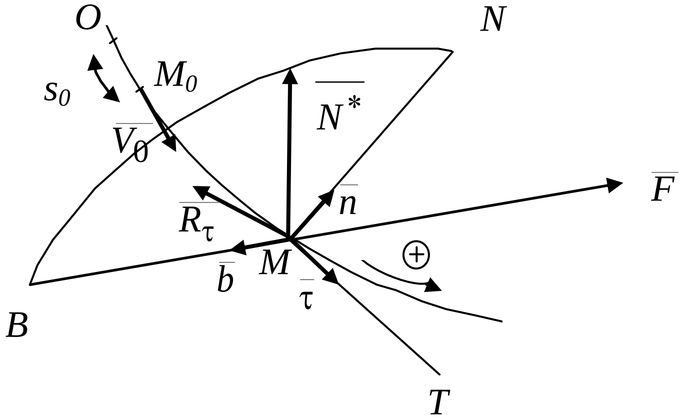


Рис. 2.2

Применим естественный способ задания движения точки. Построим естественный трёхгранник *MTNB* и направим по направлениям *T*, *N*, *B* единичные векторы $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$.

Пусть $\bar{F}$ – активная сила, действующая на точку, $\bar{R}$ – реакция связи. Обозначим R_τ проекцию реакции связи на касательную, а проекции реакции на нормаль и бинормаль обозначим для удобства N_n и N_b соответственно. Тогда

$$\bar{R} = R_\tau \bar{\tau} + N_n \bar{n} + N_b \bar{b}.$$

Выделим (рис. 2.2) вектор $\bar{N}^* = N_n \bar{n} + N_b \bar{b}.$
Запишем основное уравнение динамики несвободной точки.

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}.$$

Спроектируем его на естественные оси:

$$\begin{cases} ma_\tau = F_\tau + R_{\tau,} \\ ma_n = F_n + N_n,. \\ ma_b = F_b + N_b. \end{cases} \tag{2.6}$$

Пусть точка *O* – начало отсчёта дуги *s* на траектории точки. Тогда $a_\tau = \ddot{s},\ a_n = \dfrac{(\dot{s})^2}{\rho},\ a_b = 0,$ где ρ – радиус кривизны траектории в точке *M*.

Подставляя проекции ускорения в уравнения (2.6), получим:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}) + R_{\tau,} \\ m\dfrac{(\dot{s})^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}) + N_n,. \\ 0 = F_b(t, s, \dot{s}) + N_b. \end{cases} \tag{2.7}$$

Система уравнений (2.7) имеет четыре неизвестных:

$$s = s(t),\ R_\tau = R_\tau(t),\ \ N_n = N_n(t),\ \ N_b = N_b(t).$$

Для того чтобы система была замкнутой, необходимо сделать одно дополнительное предположение. Наложим условия на силу трения $\bar{R}_\tau = R_\tau \bar{\tau}$.

Рассмотрим три модели для силы трения.

I. Связь идеальная. $R_\tau \equiv 0$.

Система уравнений движения точки в этом случае будет замкнутой:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t,s,\dot{s}), \\ m\dfrac{(\dot{s})^2}{\rho} = F_n(t,s,\dot{s}) + N_n, \\ 0 = F_b(t,s,\dot{s}) + N_b. \end{cases} \tag{2.8}$$

Пусть M_0 – начальное положение точки. Оно не обязательно совпадает с началом отсчёта O (рис. 2.2). Зададим начальные условия:

$$s\big|_{t=0} = s_0, \ \ \dot{s}\big|_{t=0} = V_0. \tag{2.9}$$

Уравнения (2.8) решаются в следующем порядке:

1) Интегрируя первое уравнение системы при начальных условиях (2.9), определяется закон движения точки:

$$s = s(t, s_0, V_0). \tag{2.10}$$

2) Подставляя закон движения (2.10) во второе и третье уравнения системы, определяются N_n и N_b:

$$N_n = \frac{m(\dot{s})^2}{\rho} - F_n(t,s,\dot{s}), \ \ N_b = -F_b(t,s,\dot{s}).$$

3) По теореме Пифагора определяется модуль реакции связи N^*

$$N^* = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}.$$

Вектор реакции связи $\overline{N}^*$ лежит в нормальной плоскости естественного трёхгранника кривой (рис. 2.2).

II. «Сухое», или кулоновское трение.

$$R_\tau = -fN\,\mathrm{sgn}(\dot{s}). \tag{2.11}$$

В формуле (2.11) функция $\mathrm{sgn}(\dot{s})$ определяет знак проекции скорости на касательную $V_\tau = \dot{s}$:

$$\mathrm{sgn}V_\tau = \frac{V_\tau}{|V_\tau|},\ \ V_\tau \neq 0,$$

где f – коэффициент трения скольжения. Он всегда меньше коэффициента трения покоя. N – нормальная составляющая реакции связи. По формуле (2.11) сила трения $\overline{R}_\tau$ всегда направлена противоположно скорости движения. При $V = 0$ (трение покоя) она не определена и может принимать значения в промежутке $[-fN, fN]$ (рис. 2.3).

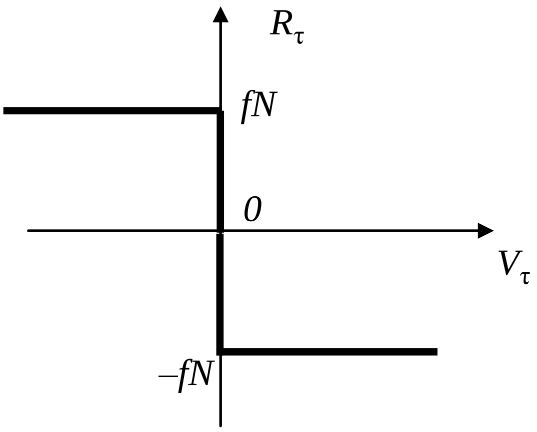


Рис. 2.3

Система уравнений движения точки в этом случае будет также замкнутой:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t,s,\dot{s}) - fN\,\mathrm{sgn}(\dot{s}), \\ m\dfrac{(\dot{s})^2}{\rho} = F_n(t,s,\dot{s}) + N_n, \\ 0 = F_b(t,s,\dot{s}) + N_b. \end{cases} \tag{2.12}$$

Уравнения (11.12) следует решать в следующем порядке:

1. Из второго и третьего уравнения выразить N_n и N_b как функции $t, s, \dot{s}$:

$$N_n = \frac{m(\dot{s})^2}{\rho} - F_n(t,s,\dot{s}) = N_n(t,s,\dot{s}), \quad N_b = -F_b(t,s,\dot{s}). \tag{2.13}$$

2. Подставить полученные выражения в первое уравнение системы

$$m\ddot{s} = F_\tau(t,s,\dot{s}) - f\sqrt{N_n^2 + N_b^2}\,\mathrm{sgn}\,\dot{s} = \varphi(t,s,\dot{s}). \tag{2.14}$$

Теперь правая часть уравнения (2.14) будет известной функцией времени, положения и скорости и, интегрируя уравнение, можно принципиально отыскать закон движения точки $s = s(t)$.

3. Подставляя закон движения в формулы (2.11) и (2.2), можно определить R_τ, N_n, N_b.

III. Вязкое трение

$$R_\tau = -\mu V_\tau = -\mu\dot{s}. \tag{2.15}$$

Такая модель трения применяется, когда между трущимися поверхностями присутствует смазка.

Система уравнений движения точки в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}) - \mu\dot{s}, \\ m\dfrac{(\dot{s})^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}) + N_n,. \\ 0 = -F_b(t, s, \dot{s}) + N_b. \end{cases} \tag{2.16}$$

Уравнения (2.16) решаются в той же последовательности, что и уравнения (2.8).

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются дифференциальные уравнения свободной и несвободной материальных точек?
2. Запишите дифференциальные уравнения несвободной материальной точки в проекциях на естественные оси.
3. В чем заключаются две основные задачи динамики несвободной материальной точки?
4. Материальная точка массой m = 10 кг движется из состояния покоя по гладкой горизонтальной направляющей под действием силы F = 30 Н, вектор которой образует постоянный угол γ = 30° с направляющей. Определить скорость точки через 10 с. (Ответ: 26 м/с)
5. Запишите уравнения движения материальной точки по неподвижной кривой, используя модель кулоновского трения.

ЛЕКЦИЯ № 3
ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (продолжение)

Рассмотрим пример на несвободное движение материальной точки, когда она удерживается на линии.

Плоский математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой нити, совершающая движение в одной вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Рассмотрим движение маятника массой m и длиной нити $OM = l$ (рис. 3.1) в вертикальной плоскости Oxy, используя оси естественного трехгранника $M\bar{\tau}\,\bar{n}\,\bar{b}$. Пусть O_1 – начало отсчёта дуги s, определяющей положение материальной точки M на траектории, а M_0 – её начальное положение (необязательно совпадает с началом отсчёта), определяемое дугой s_0. $\bar{V}_0$ – начальная скорость точки. Освободимся от связи и заменим действие нити реакцией нити $\bar{N}$, направленной вдоль нити к точке подвеса O. Тогда материальная точка будет двигаться под действием двух сил:

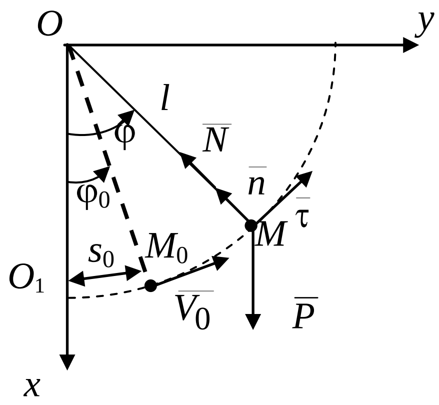


Рис. 3.1

силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и реакции нити $\bar{N}$. Основной закон динамики будет иметь вид

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{N}. \tag{3.1}$$

Проектируя (3.1) на естественные оси, получим дифференциальные уравнения движения точки в форме Эйлера:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= P_\tau, \\ \frac{m(\dot{s})^2}{\rho} &= P_n + N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В уравнениях (3.2) перейдём к новой, более удобной при движении точки по дуге окружности переменной – углу φ, образованному нитью с осью Ox (рис. 3.1): $\varphi = \dfrac{s}{l}$.

Тогда в уравнениях (3.2)

$$\dot{s} = l\dot{\varphi}, \quad \ddot{s} = l\ddot{\varphi}, \quad P_\tau = -mg\sin\varphi, \quad P_n = -mg\cos\varphi, \quad \rho = l$$

и, следовательно, после преобразований получим:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0, \\ N = mg\cos\varphi + ml(\dot{\varphi})^2. \end{cases} \tag{3.3}$$

При решении обратной задачи несвободной точки первое уравнение системы (3.3) определяет закон движения точки, второе – реакцию нити. Первое уравнение представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение, которое не интегрируется в элементарных функциях.

Рассмотрим случай малых колебаний маятника, положив $\sin\varphi \approx \varphi$ и обозначив $k^2 = \dfrac{g}{l}$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения маятника примет вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \tag{3.5}$$

Так как его корнями являются мнимые числа $\lambda_1 = ki,\ \ \lambda_2 = -ki$ (i – мнимое число), то общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{3.6}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий:

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \frac{V_0}{l}. \tag{3.7}$$

Так как

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \tag{3.8}$$

то, подставляя начальные условия (3.7) в решения (3.6) и (3.8), получим

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{lk}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt + \frac{V_0}{lk} \sin kt. \tag{3.9}$$

Преобразуем решение (3.9), умножив и разделив правую часть на выражение $A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{V_0}{l_k}\right)^2}$:

$$\varphi(t) = A \left\{ \frac{\varphi_0}{A} \cos kt + \frac{V_0}{lk \cdot A} \sin kt \right\}.$$

Так как $\frac{\varphi_0}{A} \le 1$, обозначим $\sin\alpha = \frac{\varphi_0}{A}$.

Тогда $\frac{V_0}{lk \cdot A} = \cos\alpha$ и, следовательно,

$$\varphi = A(\sin\alpha \cdot \cos kt + \cos\alpha \cdot \sin kt)$$

или

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha). \tag{3.10}$$

Получили, что материальная точка совершает движение по синусоидальному закону. Такое движение точки называется *гармоническими колебаниями.* Характеристиками такого движения являются:

A – амплитуда колебаний;

$k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – круговая частота колебаний;

$kt + \alpha$ – фаза колебаний;

α – начальная фаза колебаний;

T – период колебаний (время в секундах, за которое фаза колебаний изменится на 2π):

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Таким образом, *малые колебания математического маятника будут гармоническими колебаниями с частотой колебаний* $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ *и периодом малых колебаний* $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. *Они будут также изохронными*, так как период колебаний не зависит от начальных условий.

Подставляя решение (3.10) во второе уравнение системы (3.3), определим силу натяжения нити N.

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера применяется при решении первой основной задачи динамики несвободной точки, когда известны движение точки и действующие на неё активные силы, а отыскивается возникающая реакция связи.

Запишем основное уравнение динамики несвободной точки в инерциальной системе отсчёта:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}\,.$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\overline{F} + \overline{R} + \left(-m\overline{a}\right) = 0\,.$$

Обозначив $\overline{\Phi}^{\text{ин}} = -m\overline{a}$, получим

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi}^{\text{ин}} = 0, \qquad (3.11)$$

где вектор $\overline{\Phi}^{\text{ин}}$ называется *Даламберовой силой инерции*.

Формулировка принципа: *В каждый момент движения несвободной материальной точки равнодействующие активных сил и реакций связей уравновешиваются Даламберовой силой инерции***.**

Проектируя векторное уравнение (3.11) на какие-либо координатные оси, мы получим соответствующие уравнения равновесия, пользуясь которыми, можно находить неизвестные реакции.

Спроектируем уравнение (3.11) на естественные оси:

$$\begin{cases} F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau^{\text{ин}} = 0, \\ F_n + R_n + \Phi_n^{\text{ин}} = 0, \\ F_b + R_b + \Phi_b^{\text{ин}} = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

где $\Phi_n^{\text{ин}} = -ma_n = -m\dfrac{V^2}{\rho}$ называется центробежной силой инерции, всегда направленной в отрицательную сторону главной нормали; $\Phi_\tau^{\text{ин}} = -ma_\tau = -m_\tau \dot{V}_\tau$; $\Phi_b^{\text{ин}} = -ma_b = 0$.

Примечания

1) В действительности, к точке, помимо сил $\overline{F}$ и $\overline{R}$, каких-либо других физических сил не приложено и три силы не составляют уравновешенную систему сил. В этом смысле Даламберова сила инерции является фиктивной силой, условно прикладываемой к точке.

2) Принцип Даламбера следует рассматривать как удобный методический прием, позволяющий задачу динамики свести к задаче статики.

Пример 1. Определим реакцию связи, действующую на лётчика при выходе самолёта, движущегося в вертикальной плоскости, из пикирующего полёта (рис. 3.2).

На лётчика действует сила тяжести $m\overline{g}$ и реакция сидения $\overline{R}$. Применим принцип Даламбера, присоединив к этим силам Даламберову силу инерции:

$$m\overline{g} + \overline{R} + \overline{\Phi}^{\text{ин}} = 0. \tag{3.13}$$

Запишем уравнение (3.13) в проекциях на нормаль $\overline{n}$:

$$-mg + R_n - \frac{mV^2}{r} = 0, \tag{3.14}$$

где r – радиус окружности при выходе самолёта на горизонтальный полёт,
V – максимальная скорость самолёта в этот момент.

Из уравнения (3.14)

$$R_n = mg\left(1 + \frac{V^2}{gr}\right). \tag{3.15}$$

Так как лётчик будет давить на сидение с той же силой, он при этом будет испытывать ощущение «перегрузки». Дополнительное слагаемое $\frac{V^2}{gr}$ называется коэффициентом «перегрузки».

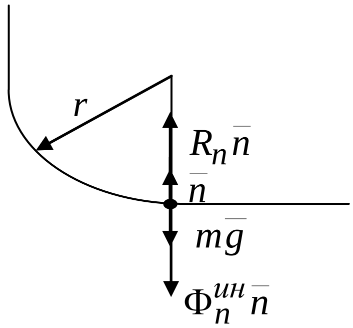


Рис. 3.2

Пример 2. Определим теперь ту же реакцию, действующую на лётчика в момент выхода из режима набора высоты (рис. 3.3).

Уравнение (3.13) в проекциях на нормаль $\bar{n}$ будет иметь вид:

$$mg - R_n - \frac{mV^2}{r} = 0 \tag{3.16}$$

и, следовательно,

$$R_n = mg\left(1 - \frac{V^2}{gr}\right).$$

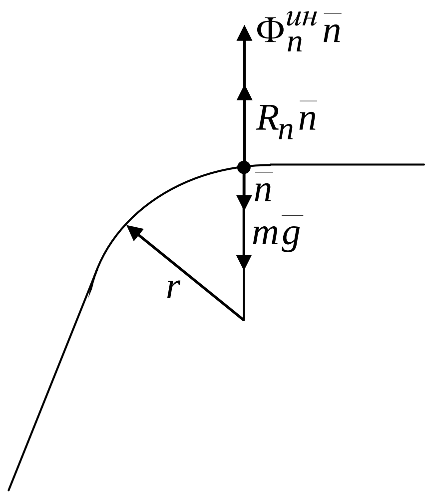


Рис. 3.3

В этом случае реакция R_n, действующая на летчика, равна нулю при $\frac{V^2}{gr} = 1$.

Так как при этом давление лётчика на сидение также равно нулю, то имитируется ощущение невесомости.

Относительное движение материальной точки

Если системы отсчета движутся относительно инерциальной системы отсчета не поступательно, либо неравномерно, или криволинейно движутся начала их координат, то такие системы отсчета являются *неинерциальными*. В этих системах отсчета аксиомы А1 и А2 не соблюдаются, но из этого не следует, что в динамике исследуются лишь движения, происходящие в инерциальных системах отсчета. Рассмотрим движение материальной точки в неинерциальной системе координат, если известны силы, действующие на материальную точку, и задано движение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета. В дальнейшем инерциальная система отсчета будет называться неподвижной, а неинерциальная – подвижной системой отсчета. Пусть $\bar{F}$ – равнодействующая активных сил, действующих на точку, а $\bar{R}$ – равнодействующая реакции связей; $0_1x_1y_1z_1$ – неподвижная система координат; $0xyz$ – подвижная система координат.

Рассмотрим движение материальной точки *M* (рис. 3.4), не связанной жестко с подвижной системой координат, а движущейся по отношению к ней. Это движение точки в кинематике называли относительным, движение точки относительно неподвижной системы координат – абсолютным, движение подвижной системы координат – переносным.

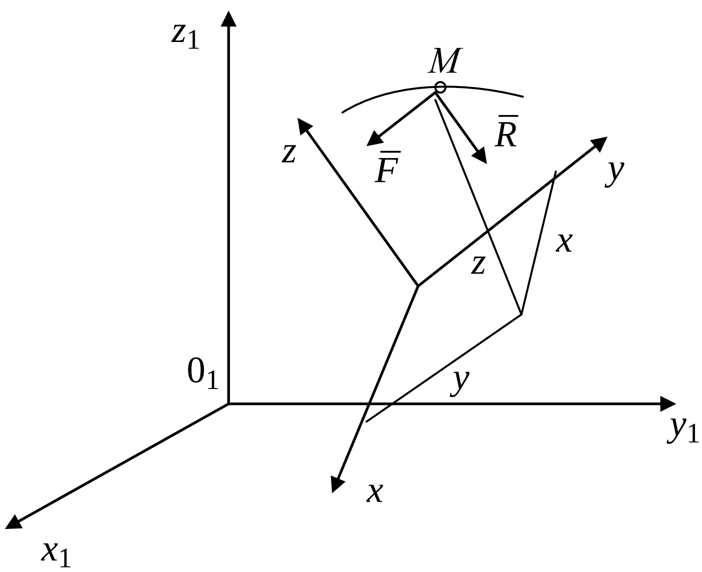


Рис. 3.4

Основной закон динамики для абсолютного движения точки *M* будет иметь вид

$$m\bar{a}_a = \bar{F} + \bar{R}, \tag{3.17}$$

где $\bar{a}_a$ – абсолютное ускорение точки.

На основании теоремы сложения ускорений кинематики (теоремы Кориолиса) абсолютное ускорение складывается из относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.17), получим

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_e + m\bar{a}_c = \bar{F} + \bar{R}$$

и после переноса и ввода обозначений

$$\boxed{m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c,} \tag{3.19}$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$; вектор $\bar{\Phi}_e$ называют переносной силой инерции; $\bar{\Phi}_c$ – кориолисовой силой инерции.

Равенство (3.19) выражает закон относительного движения точки. Следовательно, движение точки в неинерциальной системе отсчета можно рассматривать как движение в инерциальной системе, если к числу действующих на точку активных сил и реакций связей добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Частные случаи

1. Если подвижная система координат движется поступательно, то угловая скорость подвижной системы координат $\bar{\omega} = 0$ и, следовательно,

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c = 0,$$

так как кориолисово ускорение $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r = 0.$

Закон относительного движения в этом случае принимает вид

$$m\bar{a}_r = F + R + \bar{\Phi}_e.$$

2. Если точка относительно подвижной системы координат находится в покое, то относительная скорость и относительное ускорение равны нулю

$\bar{V}_r = 0, \bar{a}_r = 0$ и, следовательно, $\bar{\Phi}_c = 0.$

Тогда равенство (3.19) примет вид

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0. \tag{3.20}$$

Равенство (3.20) представляет уравнение относительного равновесия материальной точки.

3. Если подвижная система координат движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_c = 0$ и закон относительного движения материальной точки будет иметь такой же вид, что и закон движения относительно инерциальной системы координат. Следовательно, системы координат, движущиеся поступательно, равномерно и прямолинейно будут инерциальными. Отсюда следует принцип относительности Галилея: *никакими механическими экспериментами нельзя определить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение*.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается принцип Даламбера для материальной точки?
2. Запишите основное уравнение относительного движения материальной точки.
3. Чему равна кориолисова сила инерции при переносном поступательном движении?
4. Как определяется переносная сила инерции?
5. Запишите условия относительного равновесия материальной точки.
6. Сформулируйте принцип относительности Галилея.

ЛЕКЦИЯ № 4
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предположим теперь, что имеем не одну точку, а $n > 1$ взаимосвязанных материальных точек.

Определение. *Под механической системой понимается совокупность взаимодействующих между собой материальных точек, движения которых взаимосвязаны.*

В качестве примера рассмотрим движение гантели, под которой понимаются две материальных точки M_1 и M_2, соединённые невесомым, недеформируемым стержнем длиной l (рис. 4.1). В этом примере $n = 2$.

Во время движения координаты материальных точек должны удовлетворять уравнению связи:

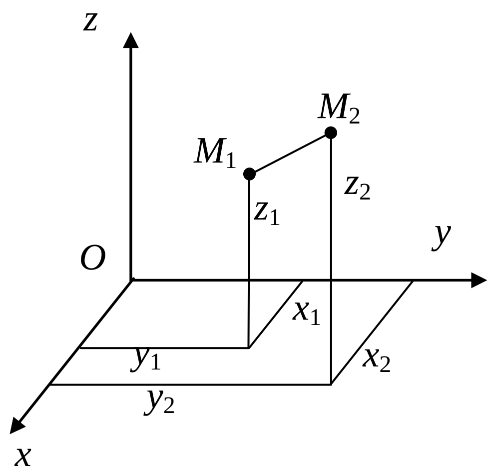


Рис. 4.1

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0.$$

Как видно из уравнения, связь в этом случае является геометрической. Частным случаем дискретной механической системы, состоящей из отдельных точек, является *неизменяемая механическая система*, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях. Примером такой системы и является гантель.

Абсолютно твёрдое тело также называют неизменяемой механической системой, но точек в этом случае не n, а бесчисленное множество, массы которых распределены в теле непрерывно.

Внешние и внутренние силы

В курсе статики все силы, приложенные к твёрдому телу или к системе тел, делили на активные силы и реакции связей. Активными силами называли силы, не зависящие от связей. Силы разделяются также на *внутренние* и *внешние*.

Силы, действующие на точки системы, называются внешними, если они вызваны действием тел, не входящих в механическую систему.

Силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему, называются внутренними.

Внешние силы будем обозначать $\overline{F}^e$, внутренние – $\overline{F}^i$.

Примером внешней силы является сила тяжести, которая вызывается действием на тела механической системы со стороны Земли.

Свойства внутренних сил

Из аксиомы А3 следует, что внутренние силы входят в систему попарно (рис. 4.2).

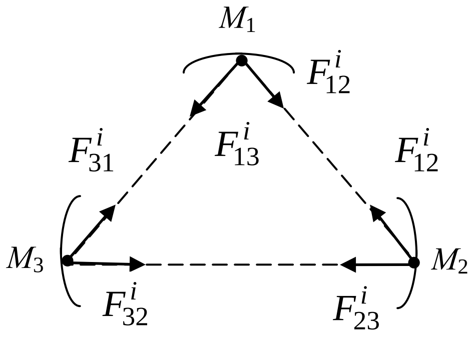


Рис. 4.2

Материальные точки M_1 и M_2 действуют друг на друга силами $\overline{F}^i_{12} = -\overline{F}^i_{21}$, M_2 и M_3 – силами $\overline{F}^i_{23} = -\overline{F}^i_{32}$, M_3 и M_1 – силами $\overline{F}^i_{31} = -\overline{F}^i_{13}$ и т.д. Из этого следуют два свойства внутренних сил:

1. Геометрическая сумма всех внутренних сил (главный вектор внутренних сил) во всё время движения системы равна нулю:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}^i_k = 0$, где $\overline{F}^i_k$ – равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к точке с номером k:

$$\overline{F}^i_k = \sum_{j=1}^{n} \overline{F^i_{jk}}\,, \quad (j \neq k).$$

2. Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил системы относительно произвольной точки (главный момент внутренних сил) во всё время движения системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r_k} \times \overline{F^i_k} = 0, \text{ где } \overline{F}^i_k = \sum_{j=1}^{n} \overline{F^i_{jk}} \quad (j \neq k).$$

Докажем это свойство для трёх точек M_1, M_2, M_3 (рис. 4.3). Моменты пар противоравных сил взаимодействия пар точек относительно произвольной точки O будут противоравными векторами:

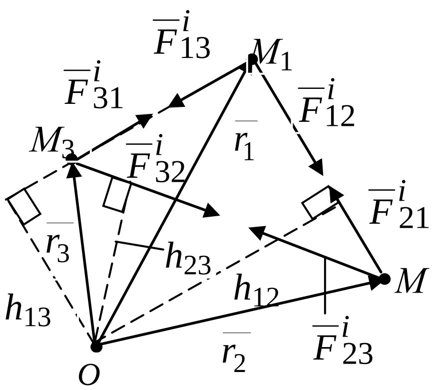


Рис. 4.3

$$\overline{r_1} \times \overline{F^i_{12}} = -\overline{r_2} \times \overline{F^i_{21}}, \quad \overline{r_2} \times \overline{F^i_{23}} = -\overline{r_3} \times \overline{F^i_{32}},$$
$$\overline{r_3} \times \overline{F^i_{31}} = -\overline{r_1} \times \overline{F^i_{13}},$$

так как

$$\overline{F^i_{12}} = -\overline{F^i_{21}}, \quad \overline{F^i_{23}} = -\overline{F^i_{32}}, \quad \overline{F^i_{31}} = -\overline{F^i_{13}}$$

и плечо h_{12} относительно точки O является общим для сил $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$, h_{23} – для сил $\overline{F_{32}^i}$ и $\overline{F_{23}^i}$, h_{13} – для сил $\overline{F_{31}^i}$ и $\overline{F_{13}^i}$ соответственно.

Следовательно, сумма моментов всех внутренних сил относительно точки O будет равна нулю. Очевидно, что и для любого количества внутренних сил это свойство будет справедливо, так как внутренние силы входят в систему сил, действующих на точки механической системы попарно.

Примечание. Несмотря на то, что главный вектор и главный момент внутренних сил системы равны нулю, внутренние силы системы не уравновешиваются, так как они приложены к разным материальным точкам системы и могут вызвать перемещения этих точек относительно друг друга. Примером может служить Солнечная система, планеты которой движутся под действием одних внутренних сил.

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из $n > 1$ материальных точек M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), положение которых относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$ определяются радиус-векторами $\overline{r}_k$ (рис. 4.4). Пусть m_k – массы точек M_k, имеющих в данный момент времени скорости $\overline{V}_k$ и ускорения $\overline{a}_k$.

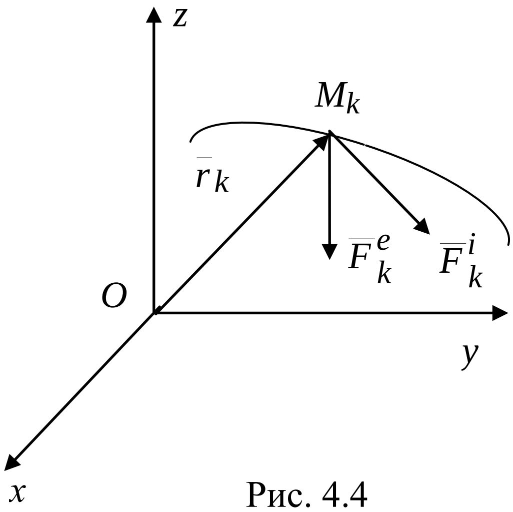


Рис. 4.4

Применим к механической системе принцип освобождаемости от связей и заменим связи их реакциями. Обозначим через $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил (сюда входят как активные силы, так и реакции связей), приложенных к k-й материальной точке. Тогда каждую точку можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием сил $\overline{F}_k^i, \overline{F}_k^e$ и к каждой точке применим основной закон динамики:

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \quad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{4.1}$$

Учитывая, что $\bar{a}_k = \dfrac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}$, перепишем равенства (4.1) в виде дифференциальных уравнений:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{4.2}$$

Таких уравнений будет (n) штук. Это векторная форма записи дифференциальных уравнений дискретной механической системы. В уравнениях силы могут зависеть только от времени, положения и скорости точек системы.

Перепишем уравнения (4.2) в проекциях на неподвижные оси системы координат $Oxyz$:

$$\begin{cases} m_k \dfrac{d^2 x_k}{dt^2} = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \dfrac{d^2 y_k}{dt^2} = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad (k = 1,2,\ldots,n) \\ m_k \dfrac{d^2 z_k}{dt^2} = F_{kz}^e + F_{kz}^i, \end{cases} \tag{4.3}$$

Получим скалярную форму ($3n$) дифференциальных уравнений движения механической системы.

Основная задача динамики механической системы состоит в том, чтобы по известным силам, действующим на точки механической системы, определить движение каждой точки системы. Неизвестными при этом являются также внутренние силы (структура которых должна быть задана) и реакции внешних связей. Решение основной задачи сводится к интегрированию уравнений (4.3). К уравнениям необходимо присоединять также уравнения связей.

Если уравнения удовлетворяют условиям существования и единственности решения, то общее решение системы (4.3) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_k = x_k(t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}) \\ y_k = y_k(t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}) \quad (k = 1,2, \ldots n). \\ z_k = z_k(t, C_1, C_2, \ldots C_{6n}) \end{cases}$$

Чтобы из этого семейства решений выделить одно, необходимо задать начальные условия:

$$\begin{cases} x_k\big|_{t=t_0} = x_k^0, & \dot{x}_k\big|_{t=t_0} = V_{kx}^0, \\ y_k\big|_{t=t_0} = y_k^0, & \dot{y}_k\big|_{t=t_0} = V_{ky}^0, \quad (k=1,2,\ldots,n) \\ z_k\big|_{t=t_0} = z_k^0, & \dot{z}_k\big|_{t=t_0} = V_{kz}^0. \end{cases}$$

Имеем $6n$ условий для определения $6n$ констант интегрирования.

Определив константы интегрирования, получим окончательно частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} x_k = x_k(t, t_0, x_1^0, \ldots V_{nx}^0), \\ y_k = y_k(t, t_0, x_1^0, \ldots V_{ny}^0), \qquad (k=1,2,\ldots,n). \\ z_k = z_k(t, t_0, x_1^0, \ldots V_{nz}^0). \end{cases}$$

Поскольку общее аналитическое решение основной задачи динамики механической системы затруднительно в общем случае, то в конкретных задачах системы уравнений (4.3) с заданными начальными условиями решаются численными методами. Дифференциальные уравнения движения (4.3) имеют практическое значение лишь при небольшом количестве материальных точек, составляющих механическую систему.

Рассмотрим простой пример.

Пример. Два ползуна с массами m_1 и m_2, соединённые жестким стержнем пренебрежимой массы, движутся по двум параллельным направляющим в горизонтальной плоскости. К ползуну массой m_1 приложена вдоль направляющей постоянная сила $\overline{P}$. Стержень длиной l наклонён к направляющей под углом α (рис. 4.5). Считая связи идеальными, определить закон движения ползунов и реакции связей.

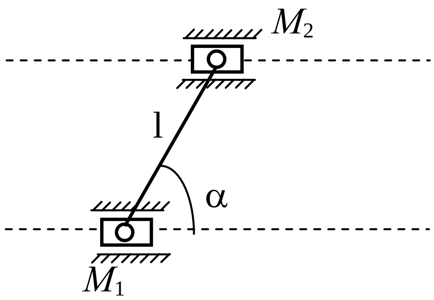


Рис. 4.5

Решение. Так как оба ползуна будут двигаться поступательно, примем их за материальные точки M_1 и M_2. Освободимся от связей. Для двух точек, соединённых стержнем, направляющие являются внешними связями. Заменим их действие реакциями N_1 и N_2, перпендикулярными гладким направляющим (рис. 4.6). Стержень является внутренней связью.

Его действие заменим реакциями R_1 и R_2, являющимися противоравными внутренними силами $\overline{R}_1 = -\overline{R}_2$, направленными вдоль стержня. Таким образом, имеем механическую систему, состоящую из двух материальных точек M_1 и M_2, движущихся под действием как внешних сил ($\overline{P}, \overline{N}_1, \overline{N}_2$), так и внутренних сил ($\overline{R}_1, \overline{R}_2$).

Направим ось Ox вдоль направляющей точки M_1 (рис. 4.6). Применим к материальным точкам основной закон динамики:

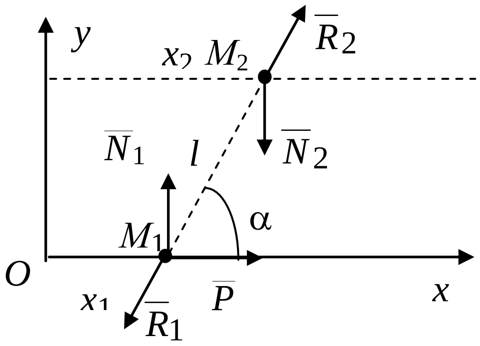


Рис. 4.6

$$\begin{aligned} m_1\overline{a}_1 &= \overline{P} + \overline{N}_1 + \overline{R}_1, \\ m_2\overline{a}_2 &= \overline{N}_2 + \overline{R}_2. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Уравнения связей в указанной на рис. 4.6 системе координат будут следующими:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = l\sin\alpha; \quad x_2 - x_1 = l\cos\alpha. \qquad (4.5)$$

Проектируя векторные равенства (4.4) на ось x, получим дифференциальные уравнения движения точек:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= P - R_1\cos\alpha, \\ m_2\ddot{x}_2 &= R_2\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Обозначая $R = R_1 = R_2$ и учитывая условия, налагаемые связями $\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, из уравнений (4.6) получим:

$$R = \frac{P}{\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)\cos\alpha}, \qquad (4.7)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{P}{m_1 + m_2}. \qquad (4.8)$$

Интегрируя уравнение (4.8), получим:

$$\dot{x}_1 = \frac{P}{m_1 + m_2} t + C_1, \quad x_1 = \frac{P}{2(m_1 + m_2)} t^2 + C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования, которые определим из начальных условий. Пусть начальные скорости точек равны V_0. Тогда $x_1\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_1\big|_{t=0} = V_0$ и закон движения точки M_1 запишется в виде

$$x_1 = \frac{P}{2(m_1 + m_2)} t^2 + V_0 t.$$

Закон движения точки M_2 с учётом уравнения связей будет следующим

$$x_2 = \frac{P}{2(m_1 + m_2)} t^2 + V_0 t + l\cos\alpha.$$

Проектируя равенства (4.4) на ось y и учитывая уравнения связей (4.5), получим уравнения для определения реакций $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$:

$$O = -R\sin\alpha + N_1; \quad O = R\sin\alpha - N_2.$$

Откуда $N_1 = N_2 = R\sin\alpha = \dfrac{P \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение механической системы.
2. Какие силы называются внешними?
3. Назовите свойства внутренних сил.
4. Запишите дифференциальные уравнения движения механической системы в координатной форме.
5. Сформулируйте основную задачу динамики механической системы.
6. Как определить константы интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения механической системы?

ЛЕКЦИЯ № 5
ГЕОМЕТРИЯ МАСС

Центр масс механической системы

Пусть дана механическая система, состоящая из $n > 1$ материальных точек $M_k (k = 1,2,\ldots n)$ имеющих массу m_k, положение которых относительно системы отсчёта *Oxyz* в каждый момент времени определяется радиус-вектором $\bar{r}_k$ (рис. 5.1).

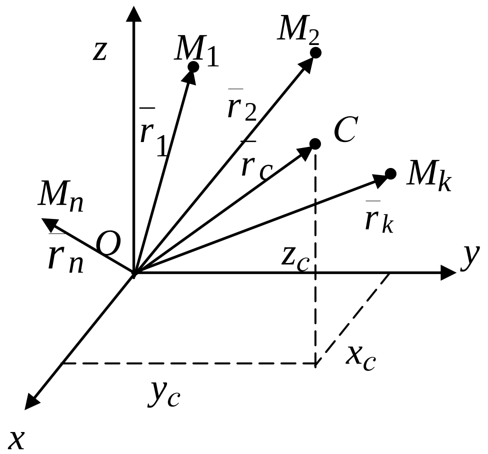


Рис. 5.1

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, радиус-вектор которой в выбранной системе координат определяется формулой

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k , \tag{5.1}$$

где n – число материальных точек системы, m_k – масса k-й точки, $\bar{r}_k$ – ее радиус-вектор, $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ – масса всей системы.

Декартовы координаты центра масс определяются соответственно формулами:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k , \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k , \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k , \tag{5.2}$$

где x_k, y_k, z_k – координаты k-й точки.

Для абсолютно твердых тел при $n \to \infty$ суммы, стоящие справа в формулах (5.1) и (5.2), в пределе перейдут в интегралы:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\int\limits_{(M)} \bar{r}\,dm;$$

$$x_C = \frac{1}{M}\int\limits_{(M)} x\,dm; \quad y_C = \frac{1}{M}\int\limits_{(M)} y\,dm; \quad z_C = \frac{1}{M}\int\limits_{(M)} z\,dm .$$

В этих формулах интегралы, записанные условно, берутся по массе всего тела. Для твердых тел, находящихся вблизи поверхности Земли, центр масс и центр тяжести совпадают.

В формулах выше $dm = \gamma(x, y, z)dxdydz$, где $\gamma(x, y, z)$ – плотность тела в данной точке. Если тело однородное, то $\gamma(x, y, z) = const = \dfrac{M}{V}$, где V – объём тела.

Тогда

$$\bar{r}_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_V \bar{r}dxdydz\,.$$

Если однородное тело представляет однородную пластину, либо поверхность, либо оболочку, когда один из размеров тела существенно меньше двух других (рис. 5.2), то

$$\bar{r}_C = \frac{1}{S}\iint\limits_S \bar{r}ds,$$

где S – площадь тела. $\delta << L_1$, $\delta << L_2$.

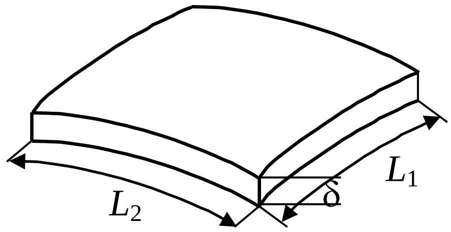


Рис. 5.2

Для однородной линии (рис. 5.3), когда существенен один размер

$$\bar{r}_C = \frac{1}{L}\int\limits_L \bar{r}dl,$$

где L – длина линии. $\delta_1 << L$, $\delta_2 << L$

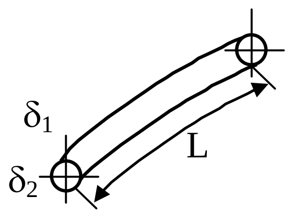


Рис. 5.3

Способы определения центра масс механической системы совпадают со способами определения центра тяжести тел в статике.

Моменты инерции

Рассмотрим неизменяемую механическую систему. Момент инерции материальной точки M_k механической системы относительно какой-либо оси равен произведению массы m_k этой точки на квадрат её расстояния h_k до этой оси (рис. 5.4).

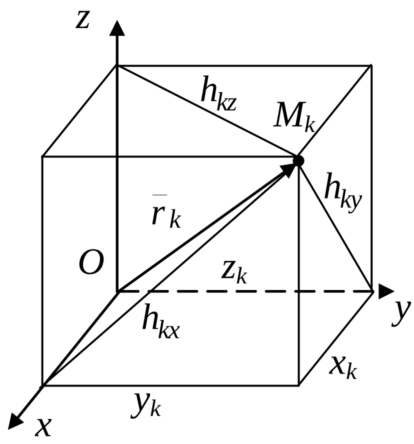


Рис. 5.4

Моментом инерции механической системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно этой оси.

Так как расстояния до осей определяются координатами точек

$$h_{kx}^2 = y_k^2 + z_k^2,\ h_{ky}^2 = x_k^2 + z_k^2,\quad h_{kz}^2 = x_k^2 + y_k^2,$$

то моменты инерции относительно осей x, y, z определяются соответственно по формулам:

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right);\ J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right);$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right). \qquad (5.3)$$

Вводятся также три *центробежных момента инерции*, определяемые формулами:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k;\ J_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k;\ J_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k. \qquad (5.4)$$

Совокупность трёх осевых моментов инерции (5.3) и трёх центробежных моментов инерции (5.4) определяют инерционные свойства механической системы.

Для абсолютно твёрдых тел суммы в формулах (5.3) и (5.4) перейдут в интегралы:

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2) dm;\ \ J_y = \int_M (x^2 + z^2) dm;\ J_z = \int_M (x^2 + y^2) dm \qquad (5.5)$$

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm;\ J_{yz} = \int_{(M)} yz dm;\ J_{xz} = \int_{(M)} xz dm. \qquad (5.6)$$

Осевые моменты инерции характеризуют меру инерции тел при вращательном движении. Центробежные моменты инерции характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей. Как и выше, в формулах (5.5), (5.6) интегралы записаны условно.

Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

Момент инерции тела относительно любой оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельной данной и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пусть ось l параллельна оси, проходящей через центр масс тела l_c, d – расстояние между ними. Выберем систему координат, совместив ее начало с центром масс C и направив ось z вдоль оси l_c. Ось y направим так, чтобы она пересекла ось l. Выделим в теле произвольный элемент массой dm и опустим из него перпендикуляры ρ и ρ_1 на оси l_c и l (рис. 5.5).

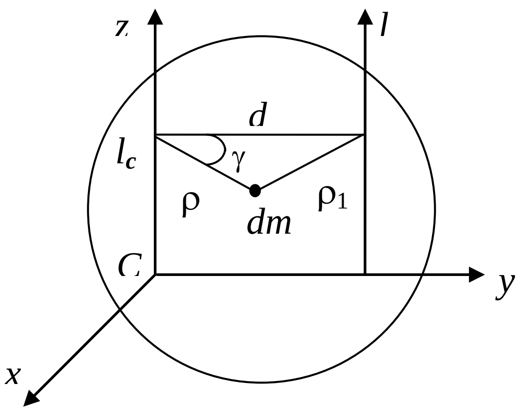


Рис. 5.5

По определению, моменты инерции тела относительно осей l_c и l равны

$$J_{l_c} = \int\limits_{(M)} \rho^2 dm, \quad J_l = \int\limits_{(M)} \rho_1^2 dm.$$

Согласно теореме косинусов, $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d\cos\gamma$, или $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2yd$, где $y = \rho\cos\gamma$ – ордината элемента dm. Следовательно, имеем

$$J_l = \int\limits_{(M)} (\rho^2 + d^2 - 2yd)dm = \int\limits_{(M)} \rho^2 dm + d^2 \int\limits_{(M)} dm - 2d \int\limits_{(M)} ydm =$$
$$= J_{l_c} + d^2 M - 2d \int\limits_{(M)} ydm.$$

Так как в последнем выражении $\int\limits_{(M)} y dm = My_C = 0,$ получим

$$\boxed{J_l = J_{l_c} + Md^2.} \qquad (5.7)$$

Теорема доказана.

Ось (например, z) называется *главной осью инерции тела*, если равны нулю центробежные моменты инерции, содержащие в обозначениях индекс этой оси $(J_{yz} = J_{zx} = 0)$.

Если главная ось проходит через центр масс, то она называется *главной центральной осью инерции тела.*

Введем понятие *радиуса инерции* ρ тела относительно оси. Под ним понимается расстояние ρ от оси, например z, до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси. Тогда момент инерции тела относительно оси z определяется по формуле

$$J_z = M\rho^2.$$

Рассмотрим пример на вычисление момента инерции тонкого однородного стержня массой M и длиной l относительно оси z, проходящей через его конец перпендикулярно стержню. Направим по стержню ось Ox (рис. 5.6). Выделим элемент длиной dx. Тогда $dm = \gamma dx$, где $\gamma = \dfrac{M}{l} = const$ – погонная плотность стержня. По определению момент, инерции стержня относительно оси равен

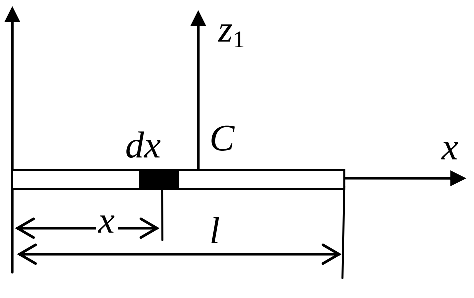


Рис. 5.6

$$J_z = \int\limits_{(L)} x^2 dm = \gamma\int\limits_0^l x^2 dx = \frac{M}{l}\int\limits_0^l x^2 dx = \frac{Ml^2}{3}.$$

Определим также момент инерции стержня относительно оси Cz_1, проходящей через центр масс стержня, используя формулу Гюйгенса-Штейнера (5.7):

$$J_z = \frac{Ml^2}{3} = J_{Cz_1} + Md^2, \qquad \text{где } d = \frac{l}{2}$$

Отсюда
$$J_{Cz_1} = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Моменты инерции некоторых однородных тел будут следующими:

1) *Круглая однородная пластина радиуса* R *и массой* M (рис. 5.7):

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4};$$

$$J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

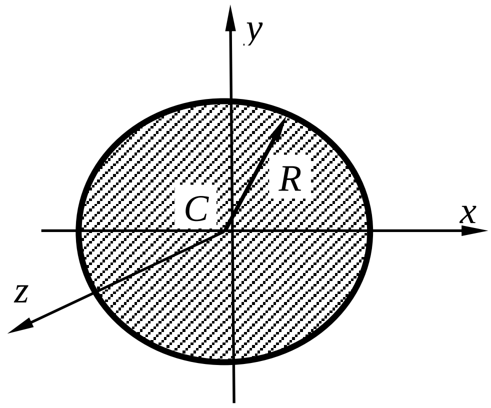


Рис. 5.7

2) *Тонкое однородное кольцо радиуса R и массой M* (рис. 5.8):

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_z = MR^2.$$

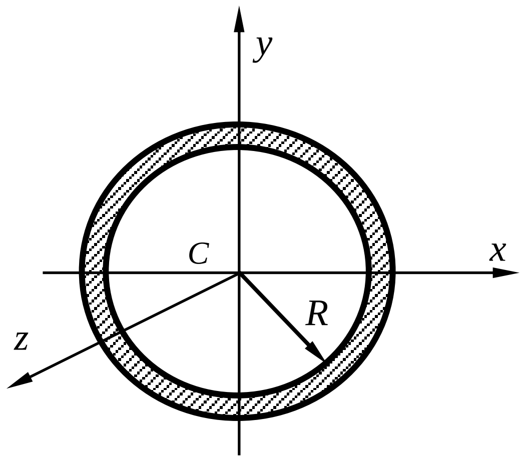


Рис. 5.8

3) Однородная прямоугольная пластина массой M со сторонами 2a и 2b

$$(\, J_x = \frac{Mb^2}{3};\; J_y = \frac{Ma^2}{3};$$

$$J_z = \frac{M(a^2+b^2)}{3}.$$

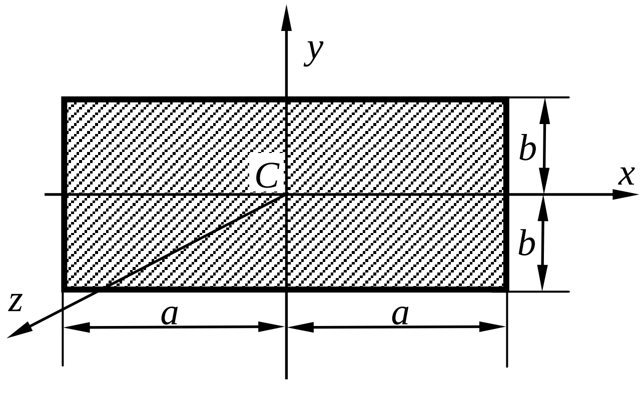
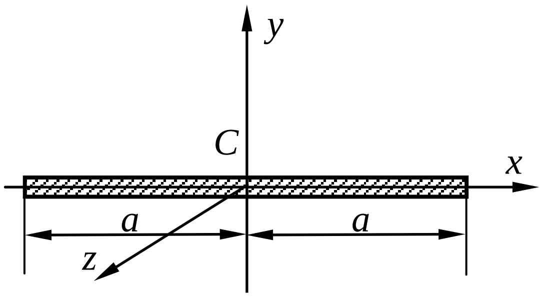


Рис. 5.9

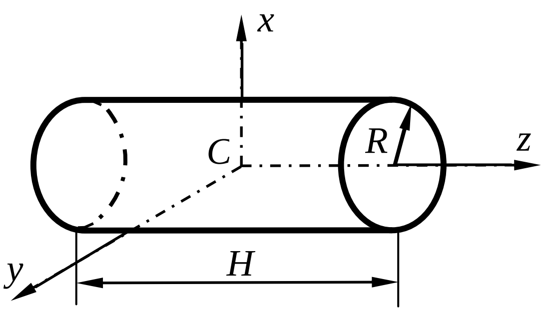
4) *Тонкий однородный стержень длиной 2а и массой М* (рис. 5.10):



$$J_x = 0;\ J_y = J_z = \frac{Ma^2}{3};$$

Рис. 5.10

5) *Круглый однородный цилиндр радиуса R и массой М* (рис. 5.11):



$$J_x = J_y = \frac{M}{4}\left(\frac{1}{3}H^2 + R^2\right)$$

$$J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Рис. 5.11

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется центр масс механической системы?
2. Запишите формулы, определяющие осевые и центробежные моменты инерции для твердых тел.
3. Что характеризуют осевые моменты инерции?
4. Какие оси называются главными осями инерции?
5. Что характеризуют центробежные моменты инерции?
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
7. Приведите примеры осевых моментов инерции однородных тел.

ЛЕКЦИЯ № 6
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При большом количестве материальных точек, входящих в состав механической системы, или, если в её состав входят абсолютно твёрдые тела ($n = \infty$), совершающие непоступательное движение, применение системы дифференциальных уравнений движения при решении основной задачи динамики механической системы оказывается практически неосуществимым. Однако при решении многих инженерных задач нет необходимости в определении движения каждой точки механической системы в отдельности. Иногда бывает достаточно сделать выводы о наиболее важных сторонах изучаемого процесса движения, не решая полностью систему уравнений движения. Эти выводы из дифференциальных уравнений движения механической системы составляют содержание общих теорем динамики. Общие теоремы, во-первых, освобождают от необходимости в каждом отдельном случае производить те математические преобразования, которые являются общими для разных задач и их раз и навсегда производят при выводе теорем из дифференциальных уравнений движения. Во-вторых, общие теоремы дают связь между общими агрегированными характеристиками движения механической системы, имеющими наглядный физический смысл. Эти общие характеристики, такие как количество движения, кинетический момент, кинетическая энергия механической системы, называются *мерами движения механической системы.*

Первая мера движения – количество движения механической системы

Пусть дана механическая система, состоящая из $n > 1$ материальных точек $M_k (k = 1,2,\dots n)$. Положение каждой точки массой m_k определяется в инерциальной системе отсчёта $Oxyz$ радиус-вектором $\bar{r}_k$ (рис. 6.1). Пусть $\bar{V}_k$ – скорость точки M_k.

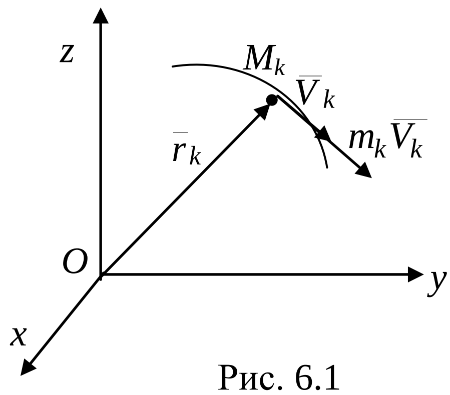


Рис. 6.1

Количеством движения материальной точки называется векторная мера её движения, равная произведению массы точки на её скорость:

$$\overline{Q_k} = m_k \overline{V_k}.$$

Количеством движения механической системы называется векторная мера её движения, равная сумме количеств движения её точек:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V_k}, \tag{6.1}$$

или в проекциях на оси координат

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{kx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{ky}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{kz}.$$

Преобразуем правую часть формулы (6.1):

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} m_k \overline{r}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k = \frac{d}{dt} M\overline{r}_C = M \frac{d\overline{r}_C}{dt} = M\overline{V}_C,$$

где $M = \sum m_k$ – масса всей системы, $\overline{V}_C$ – скорость центра масс.

Следовательно, *количество движения механической системы равно количеству движения её центра масс, если сосредоточить в нём всю массу системы:*

$$\overline{Q} = M\overline{V_C}.$$

Пример 1

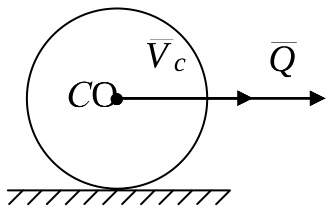


Рис. 6.2

Количество движения колеса массой *M*, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $\overline{V}_C$ (скорость оси колеса), (рис. 6.2) равно $\overline{Q} = M\overline{V_C}$, так как скорость центра масс колеса совпадает со скоростью оси колеса.

Импульс силы

Произведение силы на элементарный промежуток времени её действия $\overline{F}dt$ *называется элементарным импульсом силы.*

Импульсом силы $\overline{F}$ за промежуток времени [0, *t*] называется интеграл от элементарного импульса силы

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt.$$

Теорема об изменении количества движения механической системы

Пусть на каждую точку M_k механической системы действуют равнодействующая внешних сил $\overline{F}_k^e$ и равнодействующая внутренних сил $\overline{F}_k^i$.

Рассмотрим основные уравнения динамики механической системы

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \quad k = 1,2,\ldots n. \tag{6.2}$$

Складывая почленно уравнения (6.2) для n точек системы, получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i. \tag{6.3}$$

Первая сумма в правой части равна главному вектору $\overline{R}^e$ внешних сил системы. Вторая сумма равна нулю по свойству внутренних сил системы. Рассмотрим левую часть равенства (6.3):

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dm_k \overline{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k = \frac{d\overline{Q}}{dt}.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e, \tag{6.4}$$

или в проекциях на оси координат

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e. \tag{6.5}$$

Равенства (6.4) и (6.5) выражают теорему об изменении количества движения механической системы:

Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору всех внешних сил механической системы.

Эту теорему можно представить также в интегральной форме, проинтегрировав обе части равенства (6.4) по времени в пределах от t_0 до t:

$$\overline{Q}-\overline{Q}_0=\int_{t_0}^{t}\overline{R}^e dt=\overline{S}, \qquad (6.6)$$

где $\overline{Q}_0=\overline{Q}(t_0)$, а интеграл в правой части – импульс внешних сил за время t–t_0.

Равенство (6.6) представляет теорему в интегральной форме:

Приращение количества движения механической системы за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.

Теорему называют также *теоремой импульсов.*

В проекциях на оси координат теорема запишется в виде:

$$Q_x-Q_{0x}=\int_{t_0}^{t}R_x^e dt=S_x,\quad Q_y-Q_{0y}=\int_{t_0}^{t}R_y^e dt=S_y,\quad Q_z-Q_{0z}=\int_{t_0}^{t}R_z^e dt=S_z.$$

Следствия (законы сохранения количества движения)

1. Если главный вектор внешних сил за рассматриваемый промежуток времени равен нулю, то количество движения механической системы постоянно, т.е. если $\dfrac{d\overline{Q}}{dt}=\overline{R}^e=0$, то $\overline{Q}=\overline{Q}_0=const$.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то проекция количества движения механической системы на эту ось постоянна, т.е. если $\dfrac{dQ_x}{dt}=R_x^e=0,$ то $Q_x=Q_{0x}=const$.

Теорема о движении центра масс

Теореме об изменении количества движения в дифференциальной форме можно придать другую формулировку. Учитывая, что $\overline{Q}=M\overline{V}_C$, получим

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=M\frac{d\overline{V}_C}{dt}=M\overline{a}_C.$$

Следовательно,

$$\boxed{M\overline{a}_C=\overline{R}^e,} \qquad (6.7)$$

где M – масса всей системы, $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс системы.

Равенство (6.7) выражает теорему о движении центра масс: *центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы под действием силы, равной главному вектору внешних сил системы.*

Проектируя равенство (6.7) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы:

$$\boxed{M\,\ddot{x}_C = R_x^e,\ M\,\ddot{y}_C = R_y^e,\ M\,\ddot{z}_C = R_z^e.} \tag{6.8}$$

Для абсолютно твердых тел уравнения (6.8) являются уравнениями поступательного движения, определяя движение всех точек тела, которые, как известно, при поступательном движении движутся одинаково.

Из этой теоремы также вытекает несколько ***следствий*:**

1. Одними внутренними силами непосредственно нельзя изменить характер движения центра масс системы.

2. Если главный вектор внешних сил на рассматриваемом промежутке времени равен нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно т.е., если $M\dfrac{d\overline{V}_C}{dt} = 0,$ то $\overline{V}_C = \overline{V}_{C_0} = const,$ где $\overline{V}_{C_0}$ – начальная скорость центра масс.

3. Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на рассматриваемом промежутке времени на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменяется, т.е.,

если $M\dfrac{dV_{Cx}}{dt} = 0,$ то $V_{Cx} = const$.

4. Если известно, что твердое тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением его центра масс.

Пример 2. Рассмотрим движение снаряда под действием силы тяжести, пренебрегая сопротивлением воздуха (рис. 6.3). Применим теорему о движении центра масс. Внешней силой является только сила тяжести:

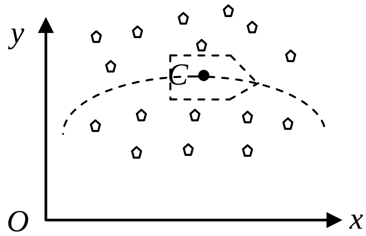


Рис. 6.3

$$M\overline{a}_C = M\overline{g},$$

где M – масса снаряда. Представим, что снаряд взрывается в воздухе (за счет внутренних сил). Будем иметь механическую систему, состоящую из осколков, массой m_k каждый (k = 1,2, … n). Внешними силами будут являться силы тяжести осколков. Применим также теорему о движении центра масс:

$$M\bar{a}_C = \sum m_k \bar{g} = \bar{g}\sum m_k = M\bar{g}.$$

Получили такое же уравнение. Следовательно, центр масс осколков будет двигаться так же, как если бы снаряд не разорвался.

Пример 3. Однородный стержень OB длиной l и массой m соединён с ползуном A массой m_1 в точке O (рис. 6.4). Ползун может перемещаться вдоль гладкой горизонтальной плоскости в направлении оси x. В начальный момент стержень отклонили на угол φ_0 и отпустили без начальной скорости. Найти смещение ползуна в зависимости от угла отклонения φ.

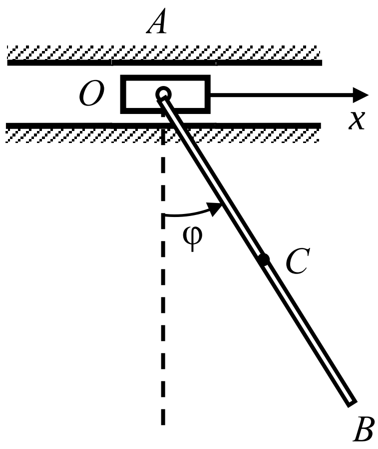


Рис. 6.4

Решение. Так как все внешние силы ортогональны оси x, то теорема о движении центра масс в проекции на ось x имеет вид

$$M\ddot{x}_C = 0.$$

Следовательно, $M\dot{x}_C = C_1$. В начальный момент механическая система находилась в покое и $M\dot{x}_C = 0$. Тогда $\sum m_k \dot{x}_k = 0$ и, следовательно,

$$\sum m_k \Delta x_k = 0, \tag{6.9}$$

где Δx_k – перемещения центров масс тел системы по оси x. Применим к задаче формулу (6.9):

$$m_1\Delta x + m(\Delta x - \frac{l}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)),$$

где Δx – перемещение ползуна. Откуда

$$\Delta x = \frac{ml(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}{2(m + m_1)}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется количеством движения механической системы?
2. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме.
3. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
4. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы в интегральной форме.
5. В каком случае вектор количества движения не изменяется при движении механической системы?
6. Сформулируйте теорему о движении центра масс.
7. Возможно ли одними внутренними силами изменить движение центра масс механической системы?
8. В каком случае центр масс механической системы находится в покое?

ЛЕКЦИЯ № 7
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Вторая мера движения – главный момент количества движения механической системы (кинетический момент)

Моментом количества движения материальной точки относительно центра O называется вектор (рис. 7.1), определяемый равенством:

$$\overline{K}_{Ok} = \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k,$$

где $\overline{V}_k$ – скорость точки M_k относительно инерциальной системы отсчета.

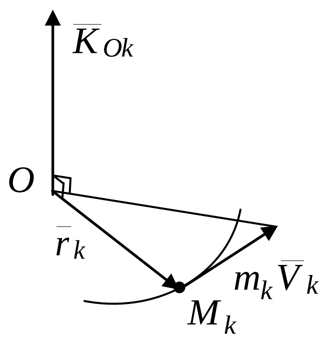


Рис. 7.1

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения) механической системы относительно центра O называется вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра:

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k. \tag{7.1}$$

Кинетический момент абсолютно твёрдого тела относительно точки O соответственно равен

$$\overline{K}_O = \int_M (\overline{r}_k \times V) dm,$$

где интеграл берётся по массе всего тела (записан условно).

Вычислим кинетический момент механической системы, участвующей в сложном движение.

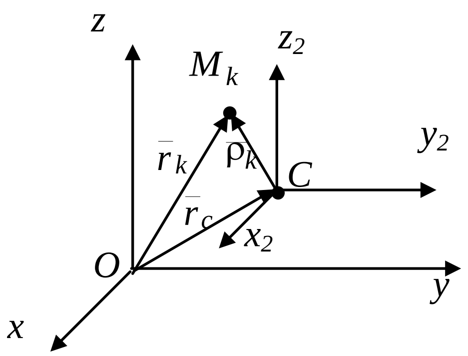


Рис. 7.2

Пусть $Oxyz$ – инерциальная система отсчёта (рис. 7.2). За подвижную систему координат примем систему координат $Cx_2y_2z_2$ с началом в центре масс механической системы и движущуюся поступательно относительно системы координат $Oxyz$. Такая система координат называется *кёнинговой системой координат.*

Положение произвольной точки M_k (k = 1, 2,..., n) механической системы относительно центра O определим радиус-вектором $\overline{r}_k$, относительно центра масс – радиус-вектором $\overline{\rho}_k$. Положение центра масс относительно центра O определим радиус-вектором $\overline{r}_c$ Тогда $\overline{r}_k = \overline{r}_c + \overline{\rho}_k$.

По определению центра масс $M\overline{r}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k$, где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса всей системы, откуда $M\overline{V}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k$.

Рассмотрим движение точки, M_k как сложное, состоящее из переносного движения со скоростью $\overline{V}_k^e$ и относительного движения со скоростью $\overline{V}_k^r$. Тогда по теореме сложения скоростей абсолютная скорость точки M_k равна $\overline{V}_k = \overline{V}_k^e + \overline{V}_k^r$.

Учитывая, что за переносное движение приняли поступательное движение осей $Cx_2y_2z_2$ вместе с центром масс и, следовательно, $\overline{V}_k^e = \overline{V}_c$, получим

$$\overline{V}_k = \overline{V}_c + \overline{V}_k^r.$$

Тогда по определению

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_c + \overline{\rho}_k) \times m_k (\overline{V}_c + \overline{V}_k^r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_c \times m_k \overline{V}_c + \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_c \times m_k \overline{V}_k^r + \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times m_k \overline{V}_c + \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times m_k \overline{V}_k^r.$$

Обозначим в последнем равенстве первое слагаемое – $\overline{K}_O^{(1)}$, второе слагаемое – $\overline{K}_O^{(2)}$, третье слагаемое – $\overline{K}_O^{(3)}$ и четвёртое слагаемое $-\overline{K}_c^{(r)}$. Преобразуем по отдельности первые три слагаемых, учитывая, что векторы $\overline{r}_c$, и $\overline{V}_c$ не зависят от индекса суммирования k и их можно вынести за знак суммы:

$$\overline{K}_O^{(1)} = \overline{r}_c \times \overline{V}_c \sum_{k=1}^{n} m_k = \overline{r}_c \times M\overline{V}_c = \overline{m}_O(M\overline{V}_c),$$

$$\overline{K}_O^{(2)} = \overline{r}_c \times \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k^r = \overline{r}_c \times \sum_{k=1}^{n} m_k (\overline{V}_k - \overline{V}_c) = \overline{r}_c \times \sum_{k=1}^{n} m_k (\overline{V}_k -$$

$$- \overline{r}_c \times \overline{V}_c \sum_{k=1}^{n} m_k = \overline{r}_c \times M\overline{V}_c - \overline{r}_c \times M\overline{V}_c = 0,$$

$$\overline{K}_O^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{\rho}_k \times \overline{V}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k (\overline{r}_k - \overline{r}_c) \times \overline{V}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k \times \overline{V}_c -$$

$$- \overline{r}_c \times \overline{V}_c M = \overline{r}_c \times M\overline{V}_c - \overline{r}_c \times M\overline{V}_c = 0.$$

Тогда получим

$$\overline{K}_O = \overline{m}_O(M\overline{V}_c) + \overline{K}_c^r. \tag{7.2}$$

Следовательно, *если механическая система совершает сложное движение, то её кинетический момент относительно неподвижного центра О равен геометрической сумме момента количества движения* *центра масс так, как если бы в нём была сосредоточена масса всей системы и кинетического момента механической системы в её относительном движении вокруг центра масс.*

Вычисление кинетического момента при различных движениях твердого тела

Будем приближенно моделировать твердое тело неизменяемой системой n материальных точек, распределенных по объёму тела.

1. Поступательное движение твёрдого тела

Учитывая, что при поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек одинаковы, и вынося скорость $\overline{V}_C$ за знак суммирования, получим

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_C = \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k m_k \right) \times \overline{V}_C = M\overline{r}_C \times \overline{V}_C = \overline{r}_C \times M\overline{V}_C.$$

Таким образом, $\overline{K}_O = \overline{m}_O(M\overline{V}_C)$, где M – масса тела.

В полученной формуле отсутствует знак суммирования, и, следовательно, она справедлива и для твердого тела с непрерывно распределенной массой.

2. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Кинетический момент тела относительно оси вращения z равен

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overline{V}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k V_k h_k,$$

где h_k – расстояние от k-й точки до оси вращения, $V_k = \omega h_k$ (ω – угловая скорость тела).

Следовательно,

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \omega h_k^2. \qquad (7.3)$$

Вынося за знак суммирования угловую скорость в равенстве (7.3), получим

$$K_z = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2.$$

Следовательно, $K_z = J_z\omega$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z. Для твердого тела с непрерывно распределенной массой момент инерции будет представлять соответствующий интеграл.

4. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Из кинематики известно, что введением вспомогательных осей, за которые примем оси Кёнига $Cx_2y_2z_2$ (рис. 7.3), плоское движение тела в плоскости Oxy раскладывается на переносное поступательное движение вместе с осями Кёнига и относительное вращательное движение тела вокруг оси Cz_2.

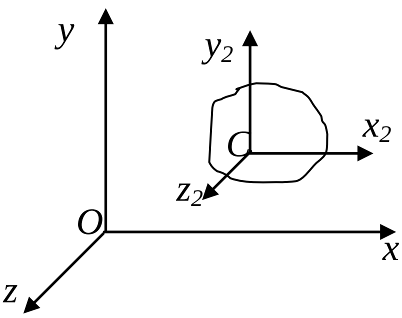


Рис. 7.3

Тогда на основании формулы (7.2) кинетический момент тела относительно оси z перпендикулярной плоскости движения тела равен сумме момента количества движения центра масс так, как если бы в нём была сосредоточена масса всего тела относительно оси z и кинетического момента тела в его относительном вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс тела Cz_2:

$$\boxed{K_z = m_z(M\overline{V}_c) + J_{Cz_2}\omega.} \qquad (7.4)$$

Теорема об изменении кинетического момента

Пусть точки механической системы M_k массой m_k движутся относительно инерциальной системы отсчёта $Oxyz$ со скоростью $\overline{V}_k$ (k = 1, 2, ... , n). Выберем произвольную подвижную точку A за центр. Определим положение точек механической системы M_k относительно точки A радиус-вектором $\overline{\rho}_k$ (рис. 7.4).

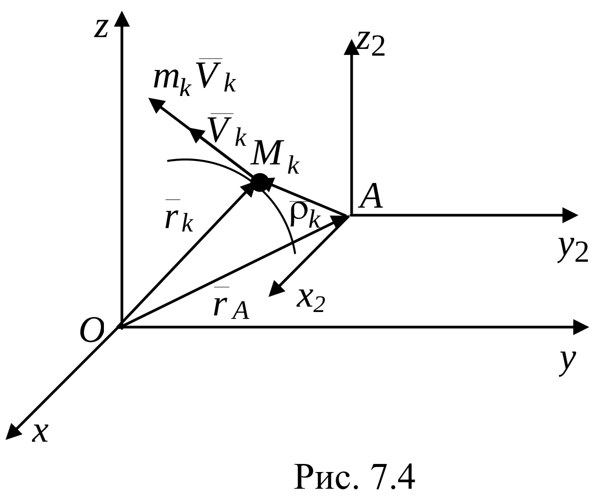


Рис. 7.4

Тогда кинетический момент механической системы относительно точки A равен

$$\overline{K}_A = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_A(m_k \overline{V}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times m_k \overline{V}_k. \qquad (7.5)$$

Продифференцируем обе части равенства (7.5) по времени, получим

$$\frac{d\overline{K}_A}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\overline{\rho}_k}{dt} \times m_k \overline{V}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times m_k \overline{a}_k, \qquad (7.6)$$

где $\overline{a}_k$ – ускорения точек относительно инерциальной системы отсчёта, вызванные действием равнодействующих внешних сил $\overline{F}_k^e$ и равнодействующих внутренних сил $\overline{F}_k^i$ и, следовательно,

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i.$$

Тогда

$$\frac{d\overline{K}_A}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\overline{\rho}_k}{dt} \times m_k \overline{V}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{\rho}_k \times (\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i). \qquad (7.7)$$

В равенстве (7.7)

$$\frac{d\overline{\rho}_k}{dt} = \frac{d\overline{r}_k}{dt} - \frac{d\overline{r}_A}{dt} = (\overline{V}_k - \overline{V}_A).$$

Обозначая $\overline{M}_A^e$ главный момент внешних сил относительно точки A и учитывая, что главный момент внутренних сил механической системы относительно точки равен нулю, получим

$$\frac{d\overline{K}_A}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{V}_k - \overline{V}_A) \times m_k \overline{V}_k + \overline{M}_A^e = -\overline{V}_A \times \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k + \overline{M}_A^e =$$
$$= -\overline{V}_A \times M\overline{V}_c + \overline{M}_A^e = M\overline{V}_c \times \overline{V}_A + \overline{M}_A^e.$$

Таким образом,

$$\frac{d\overline{K}_A}{dt} = M\overline{V}_c \times \overline{V}_A + \overline{M}_A^e, \qquad (7.8)$$

где M – масса всей системы, $\overline{V}_c$ – скорость центра масс.

Равенство (7.8) выражает теорему об изменении кинетического момента относительно подвижной точки: *производная по времени от кинетического момента для произвольной подвижной точки равна сумме главного момента внешних сил системы относительно той же точки и векторного произведения количества движения системы на скорость этой точки.*

Теорема чаще применяется для неподвижной точки ($V_O = 0$):

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^e. \tag{7.9}$$

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно неподвижной точки равна главному моменту внешних сил относительно той же точки.

В проекциях на оси x, y, z получим три скалярных равенства:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \tag{7.10}$$

Если в равенстве (7.8) за точку A принять подвижный центр масс, теорема будет иметь вид:

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \overline{M}_C^e.$$

Следовательно, теоремы об изменении кинетического момента механической системы для неподвижного центра O и для центра масс C имеют одинаковый вид.

Следствия из теоремы об изменении кинетического момента механической системы для неподвижной точки

1. Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента.

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторой неподвижной точки равен нулю, то кинетический момент системы относительно того же центра не изменяется по модулю и направлению, так как если $\overline{M}_O^e = 0$, то $\frac{d\overline{K}_O}{dt} = 0$ и, следовательно, $\overline{K}_O = const$.

3. Если главный момент внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси не изменяется по величине, так как если $M_x^e = 0$, то $\frac{dK_x}{dt} = 0$ и, следовательно, $K_x = const$.

Пример 1. Скамейка Жуковского. Круглая горизонтальная платформа может вращаться с пренебрежимо малым трением вокруг вертикальной оси. В первоначальный момент на платформе стоит человек с гантелями в опущенных руках. Платформу раскрутили. Как изменится её угловая скорость, если стоящий на ней человек расставит руки с гантелями на уровне плеч?

Решение. Внешними силами механической системы, состоящей из платформы с человеком, будут силы тяжести платформы, человека с гантелями и реакции опор о поверхность параллельные оси вращения платформы. Следовательно, $\overline{M}_z^e = 0$. Тогда из третьего следствия теоремы об изменении кинетического момента механической системы $K_z = J_z\omega = const$ и, следовательно,

$$J_z^{(1)}\omega_1 = J_z^{(2)}\omega_2, \tag{7.11}$$

где $J_z^{(1)}$ – момент инерции механической системы в первый момент при опущенных руках с гантелями, ω_1 – угловая скорость в этот момент времени, $J_z^{(2)}$ – момент инерции механической системы при расставленных руках, ω_2 – соответствующая угловая скорость системы. При этом $J_z^{(2)} > J_z^{(1)}$, так как во втором случае будут больше расстояния от гантелей до оси вращения платформы с человеком.

Тогда из равенства (7.11) угловая скорость при расставленных руках уменьшится, $\omega_2 < \omega_1$.

Пример 2. Управление вращением платформы с помощью маховика. Механическая система состоит из горизонтальной платформы, которая может вращаться с пренебрежимо малым трением вокруг вертикальной оси z и маховика, ось которого совпадает с осью вращения платформы. Маховик раскрутили (за счёт внутренних сил) до угловой скорости ω из состояния покоя. Определить угловую скорость Ω платформы.

Решение. Как и в первом примере, внешние силы (силы тяжести платформы и маховика, реакции опор платформы о поверхность) параллельны оси вращения z и, следовательно, $\overline{M}_z^e = 0$. Из третьего следствия теоремы об изменении кинетического момента механической системы

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)} = const\,.$$

Пусть $J_z^{(1)}$ – момент инерции маховика, $J_z^{(2)}$– момент инерции платформы относительно оси вращения. Кинетический момент маховика относительно оси вращения равен $K_z^{(1)} = J_z^{(1)}(\omega + \Omega)$, если предположить, что платформа будет вращаться в ту же сторону, что и маховик. Кинетический момент платформы относительно оси вращения равен

$$K_z^{(2)} = J_z^{(2)} \cdot \Omega.$$

Тогда, учитывая, что механическая система вращается из состояния покоя, получаем

$$K_z = J_z^{(1)}(\Omega + \omega) + J_z^{(2)}\Omega = 0\,,$$

откуда

$$\Omega = -\frac{J_z^{(1)}}{J_z^{(1)} + J_z^{(2)}}\omega.$$

Знак минус в формуле означает, что платформа будет вращаться в сторону, противоположную вращению маховика.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется кинетическим моментом (главным моментом количеством движения) механической системы относительно центра?
2. Тело массой m = 1 кг движется по оси Ox согласно уравнению x = 4t + 2. Определите момент количества движения тела относительно центра O. (0).
3. Чему равен кинетический момент тела, совершающего вращательное движение относительно оси вращения?

4. Как выражается кинетический момент твердого тела, совершающего плоское движение?

5. Запишите теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра.

ЛЕКЦИЯ № 8
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Третья мера движения – кинетическая энергия механической системы

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости. Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий точек этой системы:

$$\boxed{T=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k V_k^2}{2}.} \tag{8.1}$$

Кинетическая энергия абсолютно твердого тела соответственно равна

$$T=\frac{1}{2}\int_M V^2 dm,$$

где интеграл, записанный условно, берется по массе всего тела.

Если известны уравнения движения всех точек механической системы $x_k = x_k(t), y_k = y_k(t), z_k = z_k(t)$, то кинетическую энергию системы можно вычислить по формуле

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2).$$

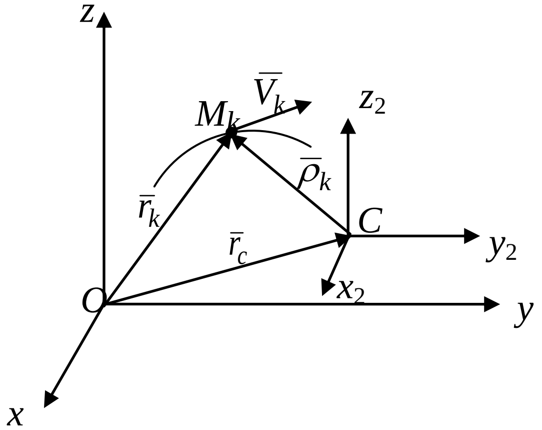


Рис. 8.1

Вычислим кинетическую энергию механической системы, участвующей в сложном движении.

Введем, как и в предыдущей лекции, в центре масс механической системы кёнингову систему координат

$Cx_2y_2z_2$, которая движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$, (рис. 8.1). Учитывая, что абсолютная скорость k-й точки равна $\overline{V}_k = \overline{V}_c + \overline{V_k^r}$ и $\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k^r = M\overline{V}_c^r = 0$, имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (\overline{V}_c + \overline{V}_k^r)^2 = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} m_k)V_c^2 + (\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k^r)\cdot \overline{V}_c +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (V_k^r)^2 = \frac{1}{2}MV_c^2 + M\overline{V}_c^r \cdot \overline{V}_c + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (V_k^r)^2 = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (V_k^r)^2.$$

Далее, обозначая кинетическую энергию относительного движения механической системы относительно кёниговых осей

$$T_c^r = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k (V_k^r)^2 ,$$

получим

$$\boxed{T = \frac{1}{2}MV_c^2 + T_c^r .} \qquad (8.2)$$

Таким образом, доказали *теорему Кёнига*: *кинетическая энергия механической системы в её абсолютном движении равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Вычисление кинетической энергии при различных движениях твердого тела

Как и в предыдущей лекции, будем приближенно моделировать твёрдое тело неизменяемой системой n материальных точек, распределенных по объему тела.

Поступательное движение твёрдого тела.

Учитывая, что при поступательном движении твёрдого тела скорости всех его точек равны, и вынося квадрат скорости за знак суммирования, получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 = \frac{V^2}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{2}MV^2 .$$

Таким образом,

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M V^2,} \tag{8.3}$$

где M – масса тела.

В формуле (8.3) отсутствует знак суммирования, и, следовательно, она справедлива и для твердого тела с непрерывно распределенной массой.

Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Учитывая, что при вращательном движении тела скорость точки тела $V_k = \omega \cdot h_k$, где ω – угловая скорость тела, h_k – расстояние от точки до оси вращения, кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \omega^2 h_k^2. \tag{8.4}$$

Вынося квадрат угловой скорости за знак суммирования в равенстве (8.4), получим:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2,$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2 = J_z$ – момент инерции тела относительно оси вращения z. Следовательно, имеем

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J_z \omega^2.} \tag{8.5}$$

Для твердого тела с непрерывно распределенной массой сумма в выражении для момента инерции относительно оси вращения перейдет в соответствующий интеграл.

1. *Плоскопараллельное движение твёрдого тела.*

Так как введением осей Кёнига плоское движение раскладывается на переносное поступательное вместе с осями Кёнига и относительное вращательное движение тела относительно осей Кёнига, то на основании теоремы Кёнига

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{C_{z_2}} \cdot \omega^2,} \tag{8.6}$$

где $J_{C_{z_2}}$ – момент инерции тела относительно оси C_{z_2} проходящей через центр масс C тела перпендикулярно плоскости движения тела.

Работа силы на элементарном и конечном перемещениях

Элементарная работа силы ΔA равна скалярному произведению векторов силы $\bar{F}$ и элементарного перемещения $d\bar{r}$:

$$\Delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Вектор элементарного перемещения $d\bar{r}$ направляется по касательной к траектории в данной точке (рис. 8.2) и по модулю равен элементарной дуге ds. Исходя из определения скалярного произведения векторов, элементарную работу можно вычислить по следующим формулам:

$$\Delta A = F|d\bar{r}|\cos\alpha = F_\tau ds \text{ или } \Delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{8.7}$$

где $\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$, $\quad d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$.

При этом знак элементарной работы будет положительным, если угол α острый. Если угол α тупой, то элементарная работа будет отрицательной.

Работа силы на конечном перемещении M_1M_2 (рис. 8.2) равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2 от элементарной работы:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \bar{F} d\bar{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_\tau ds = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{8.8}$$

Знак работы имеет следующий смысл: если сила способствует движению, то работа положительна, если не способствует движению – отрицательна. Единицей измерения работы в системе СИ является

$$1 \text{ джоуль (Дж)} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2.$$

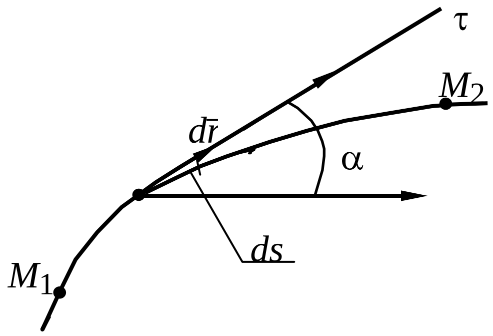


Рис. 8.2

Примеры работы сил, наиболее часто используемые в задачах:
1. *Работа сил тяжести* (рис. 8.3):

$$A(\bar{P}) = -\int_{z_{C_1}}^{z_{C_2}} P dz = -P(z_{C_2} - z_{C_1}) = P\left(z_{C_1} - z_{C_2}\right).$$

Таким образом, при перемещении абсолютно твердого тела из положения с центром масс в точке C_1 (рис. 8.3) в положение с центром масс в точке C_2 работа силы тяжести тела равна произведению веса тела на вертикальное перемещение его центра масс. В случае перемещения твердого тела из положения с центром масс в точке C_2 в положение с центром масс в точке C_1 работа силы тяжести поменяет знак и, следовательно:

$$A\left(\bar{P}\right) = \pm Ph, \tag{8.9}$$

где $h = \left|z_{C_2} - z_{C_1}\right|$.

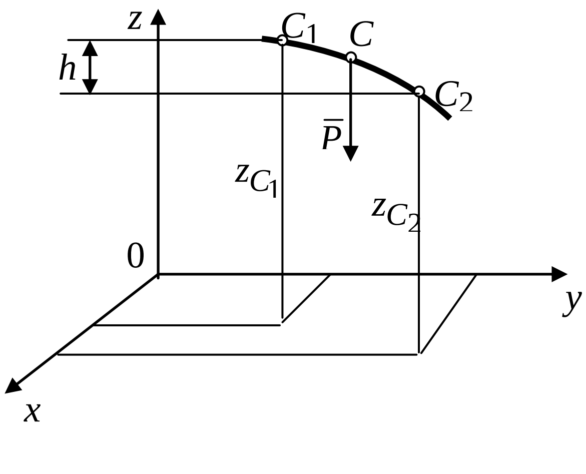


Рис. 8.3

2. *Работа силы трения скольжения.* Величина силы трения, действующей на материальную точку M при ее движении по шероховатой поверхности (рис. 8.4), определяется по формуле Кулона-Амонтона $F_{\text{тр}} = f \cdot N$, где f – коэффициент трения, N – величина нормальной реакции поверхности.

Тогда по формуле (8.8)

$$A(\overline{F}_{\text{тр}}) = -\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} F_{\text{тр}} ds = -\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} fNds.$$

Если величина силы трения постоянная, то

$$A\left(\overline{F}_{\text{тр}}\right) = -F_{\text{тр}} s, \qquad (8.10)$$

где $s = \smile M_1 M_2$.

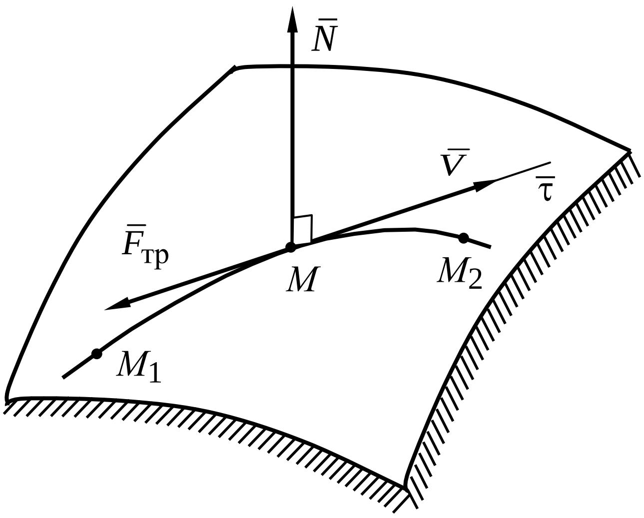


Рис. 8.4

3. *Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.*

При вращательном движении, так как $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt}$ и $V_\tau = \omega_z h$, элементарная работа силы $\overline{F}$, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна

$$\Delta A = F_\tau \cdot ds = F_\tau \cdot V_\tau dt = F_\tau \cdot h \cdot \omega_z dt = F_\tau \cdot hd\varphi,$$

где h – расстояние от точки приложения силы до оси вращения.

Следовательно,

$$\Delta A = M_z d\varphi, \qquad (8.11)$$

где M_z – момент силы $\overline{F}$ относительно оси вращения *z*, $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение тела.

Работа силы $\overline{F}$ на конечном угле поворота $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, где φ_2 и φ_1 – конечное и начальное значения угла φ, определяющего положение тела, вычисляется по формуле

$$A(\overline{F}) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi,$$

где M_z – момент силы $\overline{F}$ относительно оси вращения *z*.

В случае постоянного момента

$$A = M_z \cdot \Delta\varphi.$$

4. *Работа внутренних сил твердого тела.*

Сумма работ всех внутренних сил A^i *абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю.*

Утверждение доказывается на основании теоремы кинематики о проекциях скоростей двух точек тела и того, что исходя из аксиомы А3, внутренние силы входят в систему попарно, являясь противоравными силами.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Запишем кинетическую энергию механической системы в виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k^2 .$$

Пусть точки M_k механической системы переместились так, что их радиус-векторы $\overline{r}_k$ в инерциальной системе отсчета получили приращение $d\overline{r}_k$. Найдем, как при этом изменится кинетическая энергия механической системы. Применяя к точкам системы вторую аксиому динамики $m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e$, получим:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k d\overline{V}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k \frac{d\overline{V}_k}{dt}dt = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a}_k \overline{V}_k dt = \sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e) d\overline{r}_k = \Delta A^i + \Delta A^e$$

или

$$dT = \Delta A^i + \Delta A^e. \qquad (8.12)$$

Формула (8.12) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:

Дифференциал кинетической энергии механической системы равен элементарной работе всех сил системы.

В теореме учитываются как внутренние, так и внешние силы, так как при подсчете работы важны и перемещения точек, а они у двух взаимодействующих точек могут быть разными.

Теорема чаще применяется в интегральной форме. Рассмотрим перемещение механической системы за конечный промежуток времени Δt из положения в момент времени t_1, точки которого обозначим индексом (1) в положение в момент времени t_2, точки которого обозначим индексом (2).

Проинтегрируем соотношение (8.12) на промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int_{t_1}^{t_2} dT = \int_{t_1}^{t_2} (\Delta A^i + \Delta A^e). \qquad (8.13)$$

Обозначим $T_1 = T(t_1)$ – величину кинетической энергии механической системы в момент времени t_1, $T_2 = T(t_2)$. Тогда левая часть соотношения (8.13) будет иметь вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1.$$

Преобразуем правую часть соотношения (8.13):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta A^i + \Delta A^e) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e) d\overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e) d\overline{r}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{M_k^{(1)} M_k^{(2)}} (\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e) d\overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k^i + A_k^e).$$

Обозначая последние суммы работ внутренних и внешних сил по траекториям соответственно A^i и A^e, получим окончательно:

$$T_2 - T_1 = A^i + A^e. \qquad (8.14)$$

Формула (8.14) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме:

Изменение кинетической энергии механической системы за конечный промежуток времени равно сумме работ внешних и внутренних сил системы при её перемещении из одного положения в другое за тот же промежуток времени.

Потенциальное силовое поле

Работа силы на конечном перемещении M_1M_2 по формуле (8.8) вычисляется как криволинейный интеграл по дуге M_1M_2. В общем случае проекции силы F_x, F_y, F_z зависят от времени t, положения точки, определяемого координатами x, y, z и проекций скорости точки $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Следовательно, для вычисления работы в этом случае необходимо знать закон движения точки $x = x\ (t)$, $y = y\ (t)$, $z = z\ (t)$. Найдем класс сил, работу которых можно вычислить не зная закона движения точки, на которую действует сила. Из правой части равенства (8.8) следует, что такими силами являются позиционные силы, т.е. зависящие только от координат точки:

$$F_x = F_x(x, y, z),\ F_y = F_y(x, y, z),\ \ F_z = F_z(x, y, z).$$

Определение. *Область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда материальную точку действует сила, являющаяся однозначной, ограниченной, дифференцируемой функцией координат этой точки, называется силовым полем.* Силы, зависящие от положения точки, в механике встречаются очень часто. Например, сила тяжести, сила упругости, гравитационная сила. Рассмотрим частный вид силового поля, для которого элементарная работа является полным дифференциалом некоторой функции U от координат этой точки:

$$\Delta A = \overline{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU. \qquad (8.15)$$

Так как

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

то соотношение (8.15) эквивалентно трем равенствам

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{8.16}$$

Определение. *Силовое поле называется потенциальным (консервативным), если для него определена однозначная, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно скалярная функция U, называемая силовой, такая что проекции силы поля определяются формулами* (8.16). Соответственно силы, удовлетворяющие формулам (8.16), называются потенциальными. В случае потенциального силового поля из формул (8.8) и (8.15) имеем

$$A = \int\limits_{M_1}^{M_2} dU(x, y, z) = U(M_2) - U(M_1). \tag{8.17}$$

Формула (8.17) выражает основное свойство потенциального силового поля: *в потенциальном силовом поле работа силы не зависит от вида пути материальной точки, а определяется как разность значений силовой функции в точках конца и начала перемещений.* При перемещении по замкнутой траектории $U(M_2) = U(M_1)$ работа потенциальной силы равна нулю. Если существование силовой функции установлено, то сама функция из (8.16) определяется с точностью до постоянной

$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + const\,.$$

Продифференцируем соотношения (8.16):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \text{ и т.д.} \tag{8.18}$$

Из равенств (8.18) имеем

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{8.19}$$

Соотношения (8.19) являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности силового поля.

Потенциальная энергия

Выберем в потенциальном поле точку M_0, зафиксируем ее и назовем нулевой.

Определение. *Потенциальной энергией материальной точки в данном положении M называется скалярная величина* П, *равная работе, совершаемой силой потенциального поля при перемещении точки из положения M в положение* M_0

$$\Pi = A_{(MM_0)} = U(M_0) - U(M).$$

Силовая функция

$$U = f(x, y, z) + C$$

определяется с точностью до константы. Константу C можно определить так, чтобы $U(M_0) = 0$. Тогда

$$\Pi(M) = -U(M),$$

т.е. потенциальная энергия отличается от силовой функции только знаком и, следовательно, силы поля можно определить по формулам

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Найдем выражения потенциальной энергии для некоторых потенциальных силовых полей.

1. *Однородное поле силы тяжести.*
Пусть z – вертикальная ось, m – масса, g – ускорение свободного падения. Тогда

$$F_x = 0, \; F_y = 0, \; F_z = -mg \text{ и } \Pi = mgz.$$

2. *Силовое поле упругой пружины*, действующей на материальную точку, которая скреплена с ней. Пусть точка движется вдоль оси Ox и при $x = 0$ пружина не деформирована. Тогда при малых отклонениях

материальной точки

$$F_x = -cx\,,\; F_y = 0\,,\; F_z = 0 \text{ и } \Pi = \frac{1}{2}cx^2\,,$$

где c – коэффициент жесткости пружины.

Из формулы $\Delta A = dU = -d\Pi$ и теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме $dT = \Delta A$ следует $dT = -d\Pi$, откуда

$$E = T + \Pi = \text{const.} \qquad (8.20)$$

Равенство (8.20) выражает закон сохранения механической энергии: *при движении точки в потенциальном силовом поле полная механическая энергия E, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, есть величина постоянная.*

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется кинетическая энергия механической системы?
2. Сформулируйте теорему Кёнига о кинетической энергии механической системы, совершающей сложное движение.
3. Каково выражение элементарной работы силы на конечном перемещении точки при задании проекции силы на оси координат?
4. Когда работа силы тяжести равна нулю?
5. Какой знак имеет работа силы трения скольжения?
6. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.
7. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела, совершающего вращательное движение?
8. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме.
9. Какие силы называются потенциальными?
10. В чем заключается закон сохранения механической энергии?

ЛЕКЦИЯ № 9
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Применим общие теоремы динамики к динамике твердого тела. Рассмотрим различные виды движения твердого тела.

Поступательное движение твердого тела

Допустим известно, что тело движется поступательно, например, когда наложенные связи допускают только такое движение. Тогда, так как при поступательном движении все точки движутся одинаково, дифференциальные уравнения движения тела задаются теоремой о движении центра масс:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e,\ M\ddot{y}_C = R_y^e,\ M\ddot{z}_C = R_z^e. \tag{9.1}$$

С помощью уравнений (9.1) решаются две основные задачи динамики. При решении первой, прямой задачи по известным уравнениям движения центра масс тела $x = x_C(t),\ y = y_C(t),\ z = z_C(t)$ вычислением проекций ускорения центра масс из уравнений (9.1) определяются проекции главного вектора внешних сил R_x^e, R_y^e, R_z^e.

При решении второй, обратной задачи динамики по известным проекциям внешних сил интегрированием дифференциальных уравнений (9.1) при заданных начальных условиях определяется движение центра масс тела.

Определим условия, при которых возможно поступательное движение тела. Введем кениговую систему координат $Cx_2y_2z_2$. Если тело движется поступательно, то относительно системы координат $Cx_2y_2z_2$ оно находится в покое и согласно теореме об изменении кинетического момента, угловая скорость тела и главный момент внешних сил относительно центра масс равны нулю. Следовательно, для того чтобы тело двигалось поступательно, необходимо, чтобы главный момент внешних сил относительно центра масс и начальная угловая скорость тела были равны нулю.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси

Внешними силами, действующими на тело, являются активные силы $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ и реакции связей $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ (рис. 9.1), приложенные в закрепленных точках тела A и B.

Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси вращения тела z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = M_z^e. \tag{9.2}$$

Пусть связи являются идеальными. Тогда реакции связей $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ в равенство (9.2) не войдут, так как их моменты относительно оси z равны нулю. (Если связи не идеальны, то необходимо учитывать моменты трения).

Учитывая, что для вращательного движения кинетический момент тела относительно оси z равен

$$K_z = J_z\omega,$$

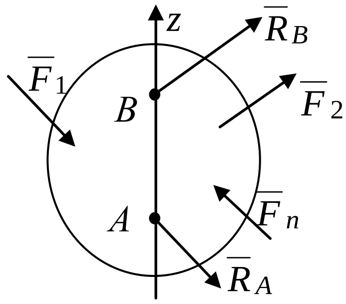


Рис. 9.1

получим дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела:

$$\boxed{J_z\ddot{\varphi} = M_z^e.} \tag{9.3}$$

Сравним уравнение (9.3) с дифференциальным уравнением поступательного прямолинейного движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e. \tag{9.4}$$

Масса M в уравнении (9.4) характеризует инертность твердого тела:

$$\ddot{x}_C = \frac{R_x^e}{M}.$$

Аналогично и момент инерции J_z в уравнении (9.3) характеризует инертные свойства вращающегося тела:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_z^e}{J_z}.$$

Таким образом, момент инерции тела J_z является характеристикой инертности тела при вращательном движении. Если вращение тела происходит в одном направлении, то это направление считают положительным направлением отсчета угла φ. В этом случае моменты движущихся сил в уравнении (9.3) считают положительными, а моменты сил сопротивления – отрицательными величинами.

Если главный момент внешних сил $M_z^e > 0$, то $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$ и тело вращается ускоренно.

Если же $M_z^e < 0$, то $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} < 0$. Тогда тело вращается замедленно.

Частные случаи

1. Если $M_z^e = 0$, то $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = 0$, откуда $\omega_z = \dot{\varphi} = const$. Следовательно, тело вращается *равномерно* (по инерции).

2. Если $M_z^e = const$, то $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} = const = \varepsilon_z^0$. Откуда закон вращательного движения $\varphi = \frac{\varepsilon_z^0}{2} t^2 + \omega_z^0 t + \varphi_0$. Вращение в этом случае будет *равнопеременным*.

С помощью дифференциальных уравнений (9.3) можно решить три задачи:

1. По заданным уравнениям вращательного движения $\varphi = \varphi\ (t)$ и моменту инерции тела относительно оси вращения определить главный момент внешних сил относительно оси вращения тела:

$$M_z^e = J_z \ddot{\varphi}.$$

2. По заданным внешним силам, приложенным к твердому телу и моменту инерции тела J_z относительно оси вращения, определить уравнение вращательного движения тела $\varphi = \varphi\ (t)$.

В этом случае закон вращательного движения тела определяется из решения дифференциального уравнения (9.3) при заданных начальных условиях.

3. По заданным внешним силам и угловому ускорению тела $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$ определить момент инерции тела J_z относительно оси вращения тела.

Рассмотрим пример решения третьей задачи, в котором для неоднородных тел или тел сложной конфигурации используются результаты экспериментов.

Экспериментальное определение моментов инерции твердых тел

Существует несколько способов экспериментального определения моментов инерции неоднородных тел и тел сложной формы. Рассмотрим *способ крутильных колебаний*. При этом способе испытуемое тело подвешивают на упругом стержне так, чтобы центр тяжести тела лежал на продолжении оси стержня (рис. 9.2), момент инерции относительно которой необходимо определить. Тело, жестко скрепленное с упругим стержнем, поворачивают на малый угол φ_0 и с помощью секундомера измеряют период возникших колебаний системы T_1. На тело со стороны закрученного упругого стержня действует момент упругих сил, который при малом угле пропорционален этому углу:

$$m_c = -c\varphi,$$

где c – коэффициент жесткости, характеризующий упругие свойства стержня.

Тогда дифференциальное уравнение (9.3) примет вид:

$$J_{C_z}\ddot{\varphi} = -c\varphi \text{ или } \ddot{\varphi} + \frac{c}{J_{C_z}}\varphi = 0. \qquad (9.5)$$

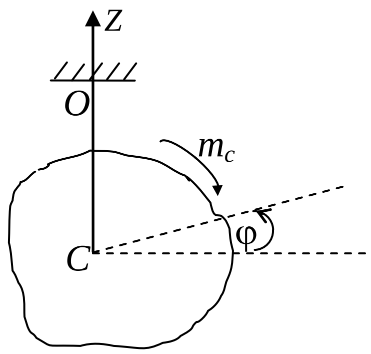


Рис. 9.2

Уравнение (9.5) имеет тот же вид, что и уравнение гармонических колебаний математического маятника, круговая частота которых равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{J_{C_z}}},$$

а период колебаний равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{C_z}}{c}}. \qquad (9.6)$$

Далее, к тому же стержню прикрепляют эталон, момент инерции которого известен. Например, для однородного диска массой M и радиуса r момент инерции относительно оси (z) равен

$$J'_{C_z} = \frac{Mr^2}{2}.$$

Закрутив также стержень на малый угол, замеряют период возникших колебаний T_2. С другой стороны, из уравнения гармонических колебаний диска

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J'_{C_z}}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{Mr^2}{2c}}\,. \qquad (9.7)$$

Исключая из уравнений (9.6) и (9.7) коэффициент жесткости (c), получим

$$J_{C_z} = \frac{Mr^2}{2}\frac{T_1^2}{T_2^2}\,.$$

Определение реакций опор вращающегося тела

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z под действием приложенных к нему внешних активных сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ и реакции связей $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$, приложенных в закрепленных точках тела A и B (рис. 9.3). Определим реакции связей $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ как величины, зависящие от приложенных сил и характера вращения тела. Примем точку A за начало координат и разложим реакции связей на составляющие

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A + \overline{Z}_A, \quad \overline{R}_B = \overline{X}_B + \overline{Y}_B + \overline{Z}_B\,.$$

Пусть $\overline{\omega}$ – угловая скорость тела, $\overline{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела, $C(x_c, y_c, z_c)$ – центр масс тела, $AB = l$.

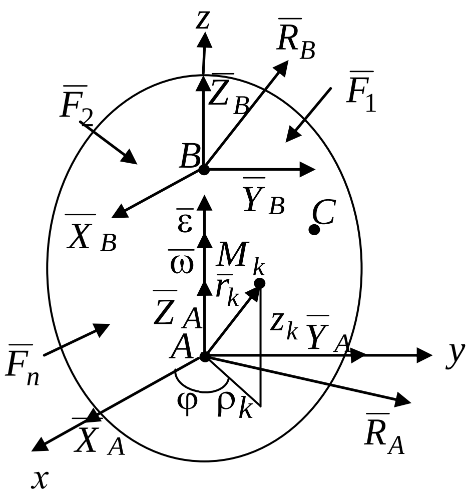


Рис. 9.3

Применим теорему об изменении количества движения:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k = \overline{R}_A + \overline{R}_B + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e\,.$$

В проекциях на оси координат получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx},$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k = Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \qquad (9.8)$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k = Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

Применяя теорему об изменении кинетического момента относительно точки A, имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \bar{m}_A(\bar{R}_B) + \sum_{k=1}^{n}\bar{m}_A(\bar{F}_k). \qquad (9.9)$$

Определим проекции векторных произведений в равенстве (9.9):

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m_k V_{kx} & m_k V_{ky} & m_k V_{kz} \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) +$$

$$+\bar{j}\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) + \bar{k}\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

Тогда векторное уравнение (9.9) в проекциях на оси координат запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = -l\cdot Y_B + \sum_{k=1}^{n}m_x(\bar{F}_k),\\
&\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = l\cdot X_B + \sum_{k=1}^{n}m_y(\bar{F}_k),\\
&\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{n}m_z(\bar{F}_k).
\end{aligned} \qquad (9.10)$$

Выразим в уравнениях (9.8) и (9.10) все производные от координат через угловую скорость и угловое ускорение тела. Для этого введём цилиндрические координаты. Декартовы координаты связаны с цилиндрическими координатами φ_k, ρ_k, z_k (рис. 9.3) формулами

$$x_k = \rho_k \cos\varphi,\ y_k = \rho_k \sin\varphi,\quad z_k = z_k. \qquad (9.11)$$

Вычислим производные, учитывая, что при вращательном движении тела изменяется только угловая координата k-й точки тела M_k:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -\rho_k \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = -y_k \dot{\varphi} = -y_k \cdot \omega, \\ \dot{y}_k = \rho_k \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = x_k \cdot \dot{\varphi} = x_k \cdot \omega, \\ \dot{z}_k = 0, \\ \ddot{x}_k = -\dot{y}_k \cdot \omega - y_k \dot{\omega} = -x_k \cdot \omega^2 - y_k \cdot \varepsilon, \\ \ddot{y}_k = \dot{x}_k \cdot \omega + x_k \cdot \dot{\omega} = -y_k \cdot \omega^2 + x_k \cdot \varepsilon, \\ \ddot{z}_k = 0. \end{cases} \tag{9.12}$$

Выполняя операции дифференцирования и подставляя значения производных $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ в (9.8), получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(-x_k \cdot \omega^2 - y_k \cdot \varepsilon) = X_A + X_B + \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(-y_k \cdot \omega^2 - x_k \cdot \varepsilon) = Y_A + Y_B + \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}, \\ 0 = Z_A + Z_B + \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}. \end{cases} \tag{9.13}$$

Выполняя операции дифференцирования в (9.10) и подставляя значения производных (9.12), после сокращений получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(-z_k(-y_k \cdot \omega^2 - x_k \cdot \varepsilon)) = -lY_B + \sum\limits_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k), \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k(-x_k \cdot \omega^2 - y_k \cdot \varepsilon) = lX_B + \sum\limits_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k), \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \varepsilon(x_k^2 + y_k^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k). \end{cases} \tag{9.14}$$

В формулах (9.13) и (9.14), вынося квадрат угловой скорости и угловое ускорение за знак суммирования и обозначая осевой момент инерции $J_z = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2)$, центробежные моменты инерции $J_{zy} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k y_k$, $J_{zx} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k x_k$, координаты центра масс $x_c = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}$,

$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}$, получим окончательно систему уравнений:

$$\begin{cases} -M \cdot y_c \cdot \varepsilon - M \cdot x_c \cdot \omega^2 = X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \\ M \cdot x_c \cdot \varepsilon - M \cdot y_c \cdot \omega^2 = Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \\ 0 = Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \\ J_{zy}\omega^2 - J_{zx} \cdot \varepsilon = -lY_B + \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k), \\ -J_{zx}\omega^2 - J_{zy} \cdot \varepsilon = lX_B + \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k), \\ J_z\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k). \end{cases} \tag{9.15}$$

Последнее уравнение системы (9.15) не содержит реакций. Оно является уравнением вращательного движения тела, из которого находятся угловое ускорение ε и угловая скорость ω. Остальные пять уравнений содержат шесть неизвестных реакций. Следовательно, система является неопределённой. Из третьего уравнения можно определить лишь сумму реакций $Z_A + Z_B$. Эта неопределённость устраняется конструктивно заменой верхней сферической опоры в точке B на цилиндрическую. Это дает последней свободу перемещения вдоль оси z, и тогда $z_B = 0$.

Из системы уравнений (9.15) видно, что реакции опор зависят как от внешних активных сил, так и от кинематических характеристик тела, координат центра масс x_c, y_c и центробежных моментов инерции тела J_{xz}, J_{yz}. Составляющие реакций, зависящие от последних, называются *динамическими*. Составляющие реакций, зависящие только от внешних активных сил, называются *статическими*. При быстром вращении тела динамические составляющие реакций могут быть большими. Определим условия, при которых динамические составляющие равны нулю.

Динамическая уравновешенность твёрдого тела на оси вращения

Определим геометрические и инерционные характеристики твёрдого тела таким образом, чтобы реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ не зависели от величин угловой скорости и углового ускорения тела. Учитывая эти условия, из уравнения (9.15) получим:

$$\begin{cases} \omega^2 \cdot x_C + \varepsilon \cdot y_C = 0, \\ \varepsilon \cdot x_C - \omega^2 \cdot y_C = 0. \end{cases} \tag{9.16}$$

$$\begin{cases} J_{zy} \cdot \omega^2 - J_{zx} \cdot \varepsilon = 0, \\ -J_{zx} \cdot \omega^2 - J_{zy} \cdot \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{9.17}$$

Системы (9.16) и (9.17) имеют только тривиальное решение:

$$x_C = y_C = 0, \; J_{zy} = J_{zx} = 0. \tag{9.18}$$

Решение (9.18) означает, что ось вращения z в этом случае будет главной центральной осью инерции тела.

Таким образом, установили, что для того, *чтобы динамические составляющие реакций опор при вращении тела вокруг неподвижной оси равнялись нулю, необходимо и достаточно, чтобы ось вращения была главной центральной осью инерции тела.*

Вопросы для самопроверки

1. При каких условиях возможна реализация поступательного движения твердого тела?
2. Запишите дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.
3. Какие задачи можно решить с помощью дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела?
4. В чем заключается способ крутильных колебаний для экспериментального определения моментов инерции неоднородных тел или тел сложной формы?
5. От чего зависят динамические составляющие реакций опор вращающегося тела?
6. Определите условия динамической уравновешенности твердого тела на оси вращения.

ЛЕКЦИЯ № 10
ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА (продолжение)
Физический маятник

Физическим маятником называется твёрдое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр тяжести этого тела, и движущееся под действием силы тяжести.

Проведём через центр тяжести C тела плоскость, перпендикулярную оси вращения тела (рис. 10.1). Точка пересечения плоскости с осью вращения O называется *точкой подвеса маятника*.

Выберем направляющие положительного отсчёта угла поворота φ от вертикали против хода часовой стрелки. Ось z направим вдоль оси вращения на читателя. Проведём подвижную ось x через центр тяжести тела. Система координат Ox_1y_1 – неподвижная. Внешними силами, приложенными к маятнику, являются сила тяжести маятника $M\bar{g}$ и реакция оси подвеса маятника $\bar{R}_O$. Определим уравнение движения маятника и его давление на ось.

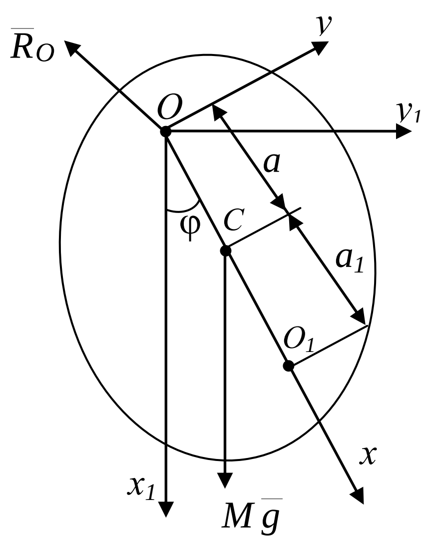


Рис. 10.1

Учитывая, что момент реакции $\bar{R}_O$ относительно оси z равен нулю, дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

$$J_z\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi,$$

где a – расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Обозначая $k^2 = \dfrac{Mga}{J_z}$, получим уравнение нелинейных колебаний маятника

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0,$$

которое в элементарных функциях не интегрируется. Будем считать, что угол φ мал. Учитывая, что $\sin\varphi \sim \varphi$, получим дифференциальное уравнение малых колебаний маятника

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Уравнение движения маятника с учётом начальных условий будет в этом случае иметь вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos kt + \frac{\omega_0}{k}\sin kt = A\sin(kt + \alpha),$$

где $A = \sqrt{\varphi_0^2 + \dfrac{\omega_0^2}{k^2}}$ – угловая амплитуда колебаний маятника:

$\alpha = \operatorname{arctg}(\dfrac{k\varphi_0}{\omega_0})$ – начальная фаза колебаний.

Период линейных колебаний маятника определяется по формуле $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_z}{mga}}$.

Сравним уравнение физического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{J_z}\sin\varphi = 0 \qquad (10.1)$$

и уравнение математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (10.2)$$

Приравняем в уравнениях (10.1) и (10.2) коэффициенты при $\sin\varphi$. Величина $l = \dfrac{J_z}{Ma}$ называется *приведённой длиной* физического маятника. Математический маятник, подвешенный на нити длиной *l*, будет двигаться так же, как физический.

Применим теорему Гюйгенса-Штейнера для определения момента инерции маятника

$$J_z = J_c + Ma^2.$$

Тогда

$$l = \frac{J_c + Ma^2}{Ma} = \frac{J_c}{Ma} + a, \qquad (10.3)$$

откладывая l от точки подвеса вдоль оси x, получим точку O_1 (рис. 10.1), которая называется *центром качания.*

Расстояние от центра тяжести до центра качания равно

$$a_1 = \frac{J_C}{Ma}.$$

Точки O и O_1 обладают *свойством взаимности:* если O_1 – точка подвеса, то точка O становится центром качания. Проверим это свойство. Подвесим маятник в точке O_1. Тогда $l_1 = \dfrac{J_C + Ma_1^2}{Ma_1} = \dfrac{J_C}{Ma_1} + a_1 = a + a_1 = l$.

Таким образом, *если старый центр качания сделать новой точкой подвеса, то старая точка подвеса станет новым центром качания, что и доказывает свойство взаимности. На этом основано свойство оборотного физического маятника, применяемого для экспериментального определения ускорения силы тяжести.*

Для определения давления физического маятника на ось вращения воспользуемся уравнениями предыдущей лекции (9.15) в предположении, что тело однородно и симметрично относительно плоскости Oxy, проходящей через центр тяжести C. Тогда ось z будет главной осью инерции тела для точки O:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Пусть тело в точке B, через которую проходит ось z, закреплена с помощью цилиндрического шарнира $(Z_B = 0)$. Тогда уравнения (9.15) примут вид:

$$\begin{aligned}
&-\omega^2 M x_C - \varepsilon M y_C = X_0 + X_B + Mg,\\
&-\omega^2 M y_C - \varepsilon M x_C = Y_0 + Y_B,\\
&0 = Z_O,\\
&0 = -OB \cdot Y_B,\\
&0 = OB \cdot X_B.
\end{aligned} \qquad (10.4)$$

Из уравнений (10.4) получим

$$\begin{aligned}
&X_0 = -\omega^2 M x_C - \varepsilon M y_C - Mg;\\
&Y_0 = -\omega^2 M y_C - \varepsilon M x_C,
\end{aligned} \qquad (10.5)$$

где угловая скорость ω и угловое ускорение ε определяется из дифференциального уравнения физического маятника.

Таким образом, в случае симметрии тела относительно плоскости, проходящей через центр масс, реакция оси сводится только к одной силе $R_O = \sqrt{X_O{}^2 + Y_O{}^2}$, приложенной в точке O и расположенной в плоскости Oxy.

Динамика плоскопараллельного движения твёрдого тела

Из кинематики известно, что плоскопараллельное движение твёрдого тела раскладывается на переносное поступательное движение вместе с подвижными осями, приложенными в полюсе и относительное вращательное движение вокруг полюса. Примем за полюс центр масс тела C, тогда кинематические уравнения движения тела запишутся в виде:

$$x_C = x_C(t), \quad y_C = y_C(t), \quad \varphi = \varphi(t). \tag{10.6}$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс задаются теоремой о движении центра масс

$$M\ddot{x}_C = R_x^e, \quad M\ddot{y}_C = R_y^e, \tag{10.7}$$

где M – масса тела, R_x^e, R_y^e – проекции главного вектора внешних сил, приложенных к телу. Если тело несвободное, то в число действующих внешних сил следует включить реакции связей.

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг центра масс на основании теоремы об изменении кинетического момента имеет вид:

$$J_{C_z} \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e, \tag{10.8}$$

где J_{C_z} – момент инерции тела, относительно оси C_z, проходящей через центр масс C, M_z^e – главный момент внешних сил относительно оси C_z.

Таким образом, дифференциальные уравнения плоского движения имеют вид:

$$\boxed{M\ddot{x}_C = R_x^e, \quad M\ddot{y}_C = R_y^e, \quad J_{C_z}\ddot{\varphi} = M_z^e.} \tag{10.9}$$

С помощью уравнений (10.9) решаются две основные задачи.

При решении первой задачи вычислим проекции ускорения центра масс и угловое ускорение тела по заданным уравнениям его движения (10.6). Из уравнений (10.9) определяются проекции главного вектора внешних сил R_x^e, R_y^e и главный момент внешних сил M_z^e относительно оси z.

При решении второй задачи по заданным внешним силам и начальным условиям интегрированием дифференциальных уравнений (10.9) определяется закон движения тела (10.6).

Динамика сферического движения твёрдого тела

Кинематическими уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки являются уравнения

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \tag{10.10}$$

где ψ, θ, φ – углы Эйлера.

Пусть $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная система координат, $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом (рис. 10.2).

Дифференциальные уравнения движения тела получим на основании теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^e, \tag{10.11}$$

где $\overline{M}_O^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k)$ – главный вектор внешних сил, приложенных к телу, $\overline{K}_O$ – кинетический момент тела относительно точки O. Вектор $\dfrac{d\overline{K}_O}{dt}$ можно рассматривать как скорость точки конца вектора $\overline{K}_O$ относительно неподвижной системы координат. Рассмотрим движение этой точки как сложное: относительное – за счёт изменения вектора $\overline{K}_O$ относительно подвижной системы координат и переносное – за счёт поворота вектора $\overline{K}_O$ вместе с угловой скоростью $\overline{\omega}$ относительно неподвижной системы координат. Тогда по теореме сложения скоростей

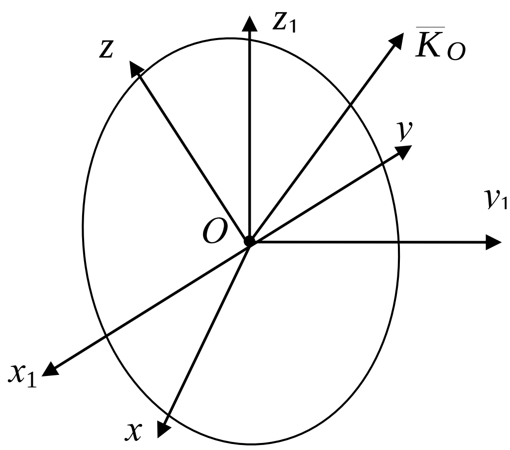


Рис. 10.2

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \frac{d'\overline{K}_O}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{K}_O = \overline{M}_O^e, \tag{10.12}$$

где $\dfrac{d'\overline{K}_O}{dt}$ – производная вектора $\overline{K}_O$ в системе координат *Oxyz*, $\overline{\omega}$ – угловая скорость тела.

Определим вектор $\overline{K}_O$ в подвижной системе координат.

По определению

$$\overline{K}_O = \int\limits_{(M)} (\overline{r} \times \overline{V}) dm,$$

где интеграл, записанный условно, берётся по массе тела.

Проекции вектора $\overline{K}_O$ на оси подвижной системы координат *Oxyz* равны:

$$\begin{aligned} &K_x = \int\limits_{(M)} (yV_z - zV_y) dm, \ K_y = \int\limits_{(M)} (zV_x - xV_z) dm, \\ &K_z = \int\limits_{(M)} (xV_y - yV_x) dm. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Вектор скорости произвольной точки тела при его движении вокруг неподвижной точки определяется по формуле

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Тогда проекции вектора скорости точки на оси системы координат *Oxyz* равны:

$$V_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y, \ V_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z, \quad V_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x. \tag{10.14}$$

Подставим выражения (10.14) в равенства (10.13). Вынося проекции угловой скорости за знак интегрирования и учитывая формулы, определяющие осевые и центробежные моменты инерции тела, получим:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \cdot \omega_x - J_{xy} \cdot \omega_y - J_{xz} \cdot \omega_z, \\ K_y &= J_y \cdot \omega_y - J_{yz} \cdot \omega_z - J_{yx} \cdot \omega_x, \\ K_z &= J_z \cdot \omega_z - J_{zx} \cdot \omega_x - J_{zy} \cdot \omega_y. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Если подвижную систему координат выбрать так, чтобы оси x, y, z были главными осями инерции для точки O, то равенства (10.15) будут иметь вид:

$$K_x = J_x \cdot \omega_x, \quad K_y = J_y \cdot \omega_y, \quad K_z = J_z \cdot \omega_z. \qquad (10.16)$$

Спроектируем векторное уравнение (10.12) на оси подвижной системы координат, предполагая, что оси x, y, z являются главными осями инерции для точки O:

$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y \cdot \omega_z = M_x^e, \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_z \cdot \omega_x = M_y^e, \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x \cdot \omega_y = M_z^e. \end{cases} \qquad (10.17)$$

Уравнения (10.17) называются *динамическими уравнениями Эйлера.*

Присоединяя к уравнениям (10.17) *кинематические уравнения Эйлера,* полученные в кинематике

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \qquad (10.18)$$

будем иметь полную систему дифференциальных уравнений сферического движения твёрдого тела.

Уравнения (10.17), (10.18) позволяют решать две основные задачи.

В первой задаче по заданному закону движения тела (10.10) из уравнений (10.17), (10.18) определяются внешние силы, приложенные к телу.

Во второй задаче по заданным внешним силам интегрированием дифференциальных уравнений (10.17) и (10.18) определяем закон (10.10) сферического движения тела.

Динамика свободного твердого тела

Как известно, движение свободного твёрдого тела раскладывается на переносное поступательное (определяется движением полюса) и относительное сферическое движение вокруг полюса. Если за полюс выбрать центр масс (рис. 10.3), кинематические уравнения движения свободного тела примут вид:

$$\begin{aligned} &x_C = x_C(t), \quad y_C = y_C(t), \quad z_C = z_C(t), \\ &\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \qquad (10.19)$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс задаются теоремой о движении центра масс:

$$M\,\ddot{x}_{1C} = R^e_{x_1}, \quad M\,\ddot{y}_{1C} = R^e_{y_1}, \quad M\,\ddot{z}_{1C} = R^e_{z_1}, \qquad (10.20)$$

где $R^e_{x_1} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx_1}$, $R^e_{y_1} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky_1}$, $R^e_{z_1} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz_1}$ – проекции главного вектора внешних сил на оси неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$.

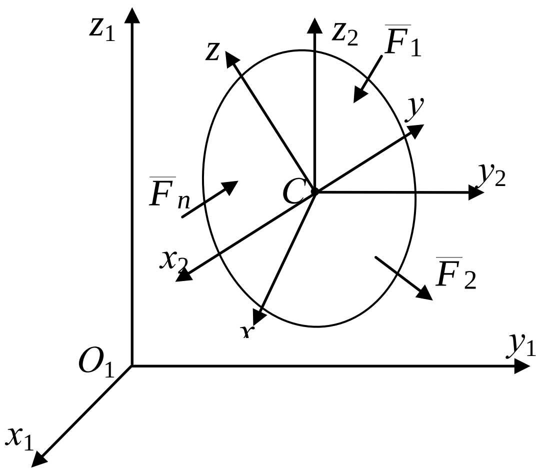


Рис. 10.3

К уравнениям (10.20) необходимо присоединить полученные выше динамические уравнения Эйлера (10.17), дополненные кинематическими уравнениями Эйлера (10.18). Уравнения (10.20), (10.17) и (10.18) представляют замкнутую систему, состоящую из девяти дифференциальных уравнений движения свободного твёрдого тела.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется физическим маятником?
2. Какая точка называется центром качания физического маятника?
3. Запишите дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.
4. Какие основные задачи решаются с помощью дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела?
5. Запишите динамические и кинематические уравнения Эйлера для сферического движения твердого тела.

ЛЕКЦИЯ № 11
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

Прецессионная теория гироскопа

Гироскопом называется тело вращения, приведённое в быстрое вращение вокруг своей оси симметрии и закреплённое в одной из точек этой оси.

В гироскопических приборах и устройствах используются роторы-гироскопы, вращающиеся с большой угловой скоростью, так как для успешного функционирования таких устройств необходима достаточно большая величина кинетического момента гироскопа. Сообщением большой угловой скорости можно получить требуемую величину кинетического момента при возможно меньшем весе гироскопа.

В то же время для очень быстрых гироскопов оказалось возможным провести упрощение их уравнений движения. Оказалось возможным заменить уравнения движения на приближённые, более простые и, тем не менее описывающие движения гироскопов с достаточной для практики точностью. Так возникла приближённая теория гироскопов, называемая в настоящее время *прецессионной* или *элементарной.*

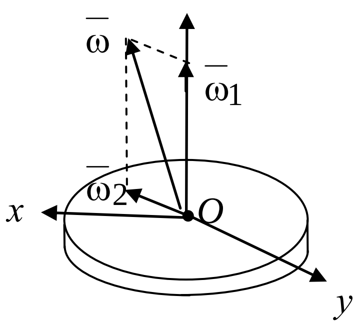


Рис. 11.1

Рассмотрим гироскоп с неподвижной точкой O, имеющий ось симметрии Oz и вращающийся вокруг этой оси с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$, намного превышающей ту угловую скорость $\bar{\omega}_2$, которую может иметь сама ось Oz при её поворотах вместе с телом вокруг точки O (рис. 11.1).

На основании теоремы кинематики о сложении вращений тела абсолютная угловая скорость гироскопа $\bar{\omega}$ равна геометрической сумме угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Оси системы координат $Oxyz$ будут главными осями инерции, и проекции кинетического момента на оси x, y, z определятся формулами:

$$K_x = J_x\omega_x = J_x \cdot \omega_{2x}, \quad K_y = J_y\omega_y = J_y \cdot \omega_{2y}, \quad K_z = J_z\omega_z = J_z(\omega_1 + \omega_{2z}),$$

где J_x, J_y, J_z – соответствующие моменты инерции гироскопа, причём $J_x = J_y$ (так как ось z – ось симметрии).

Для современных гироскопов угловая скорость $\bar{\omega}_1$ собственного вращения достигает 6000 рад/с и больше, а угловая скорость $\bar{\omega}_2$ оси гироскопа не превышает обычно 0,01 рад/с.

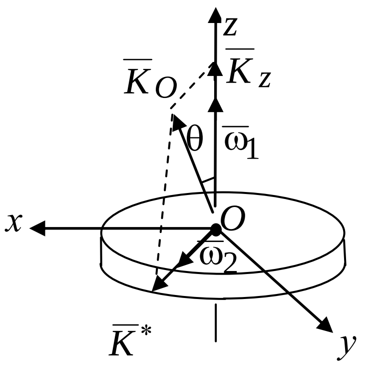


Рис. 11.2

Определим угол θ между кинетическим моментом $\bar{K}_O$ и осью симметрии z.

Рассмотрим наихудший случай, когда вектор угловой скорости вращения оси гироскопа $\bar{\omega}_2$ перпендикулярен оси z, т.е. лежит в плоскости Oxy и, следовательно, $\omega_{2z} = 0$.

Найдём составляющую $\bar{K}^*$ вектора $\bar{K}_O$, лежащую в плоскости Oxy:

$$\bar{K}^* = \bar{K}_x + \bar{K}_y = J_x \bar{\omega}_{2x} + J_y \bar{\omega}_{2y}.$$

Учитывая, что для гироскопа $J_x = J_y$, получим

$$\bar{K}^* = J_x(\bar{\omega}_{2x} + \bar{\omega}_{2y}) = J_x \bar{\omega}_2, \qquad (11.1)$$

т.е. составляющая $\bar{K}^*$ вектора $\bar{K}_O$ совпадает по направлению с вектором $\bar{\omega}_2$ (рис. 11.2). Из равенства (11.1)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{K^*}{K_z} = \frac{J_x \omega_2}{J_z \omega_1}.$$

Обычно для гироскопов $\frac{J_x}{J_z} \approx 0{,}6$. Так как $\omega_1 \geq 3000$ рад/с, $\omega_2 \leq 0{,}01$ рад/с, то $\operatorname{tg}\theta \leq 0{,}6 \cdot \frac{0{,}01}{3000} = 0{,}000002 \Rightarrow \theta \leq 0{,}4''$.

Очевидно, что величина θ пренебрежимо мала. Поэтому можно считать, что вектор кинетического момента $\bar{K}_O$ совпадает с осью динамической симметрии гироскопа, т.е. можно положить, что

$$\bar{K}_O = J_z \bar{\omega}_1 = J_z \bar{\omega}_1 \bar{k}, \qquad (11.2)$$

где $\bar{k}$ – орт оси симметрии гироскопа.

Теория, построенная на этом допущении, называется элементарной или прецессионной теорией гироскопа.

Теорема Резаля

При изучении движения гироскопа удобно пользоваться теоремой Резаля, которая является кинематической интерпретацией теоремы об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^e,$$

где $\overline{M}_O^e$ – главный момент внешних сил, приложенных к системе относительно неподвижной точки.

Производная от вектора кинетического момента $\frac{d\overline{K}_O}{dt}$ представляет собой «скорость» ($\overline{u}$) конца этого вектора, т.е. $\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{u}$ и, следовательно,

$$\overline{u} = \overline{M}_O^e. \tag{11.3}$$

Формула (11.3) представляет собой **теорему Резаля**: *скорость конца вектора момента количества движения (кинетического момента) равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к системе*.

Теоремой удобно пользоваться в теории гироскопов. С помощью зависимости (11.3) мы можем получить закон движения оси симметрии гироскопа по заданному моменту внешних сил или, зная закон движения оси гироскопа, определить момент сил, под действием которых происходит это движение.

Гироскоп с тремя степенями свободы

Простейшим примером гироскопа является детский волчок. В гироскопических приборах ротор гироскопа обычно закрепляют в так называемом кардановом (кольцевом) подвесе, позволяющем ротору совершать любой поворот вокруг неподвижного центра подвеса *O*, совпадающего с центром тяжести ротора. Такой гироскоп называют *свободным*.

Если пренебречь трением в осях подвеса, то для него $\overline{M}_O^e = 0$, и следовательно, $\overline{K}_O = \overline{const}$, т.е. модуль и направление кинетического момента гироскопа постоянны. Но так как направления вектора $\overline{K}_O$ и оси Oz гироскопа всё время совпадают, то, следовательно, и *ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной системе отсчёта.*

Это одно из важнейших свойств гироскопа, используемое при конструировании гироскопических приборов.

Сохраняя неизменное направление в звёздной системе отсчёта, ось свободного гироскопа по отношению к Земле будет совершать вращение в сторону, противоположную направлению вращения Земли.

Таким образом, свободный гироскоп можно использовать для экспериментального обнаружения факта вращения Земли.

Ж. Фуко сконструировал прибор, который назвал гироскопом, (гиро – вращаюсь, скоп – смотрю). В переводе с греческого гироскоп – указатель вращения.

Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический момент

Пусть гироскоп вращается с постоянной по величине угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг своей оси симметрии, и эта ось в свою очередь вращается (прецессирует) с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Такой гироскоп имеет по отношению к основанию две степени свободы и его свойства существенно отличаются от свойств гироскопа с тремя степенями свободы.

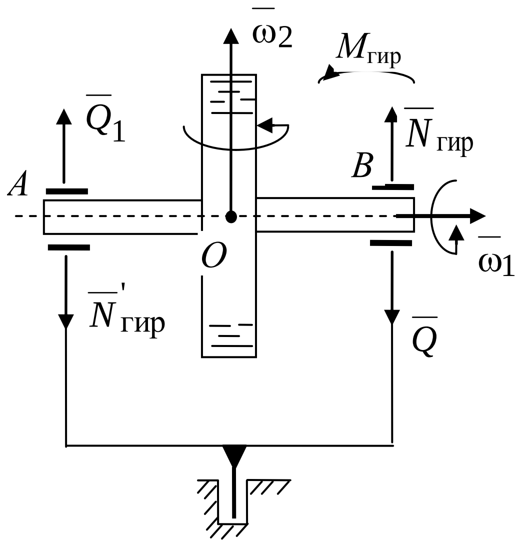


Рис. 11.3

Момент внешних сил $\overline{M}_O^e$, под действием которых ось гироскопа прецессирует с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$, определяется формулой

$$\overline{M}_O^e = \overline{\omega}_2 \times J_z \overline{\omega}_1. \qquad (11.4)$$

Этот момент создается силами $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_1$, приложенными к валу гироскопа со стороны подшипников *A* и *B*. По закону Ньютона, А3 на подшипники со стороны гироскопа будут действовать силы $\overline{N}_{гир}$ и $\overline{N}'_{гир}$, равные по величине и противоположно направленные силам $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_1$.

Главный момент этих сил относительно неподвижной точки O равен по величине и противоположен по направлению моменту $\overline{M}_O^e$.

Этот момент называется *гироскопическим моментом*:

$$\boxed{\overline{M}_{гир} = -\overline{M}_O^e = -\overline{\omega}_2 \times J_z \overline{\omega}_1.}$$

Гироскопический момент направлен таким образом, как если бы стремился совместить угловую скорость собственного вращения с угловой скоростью прецессии кратчайшим путем. По величине он равен

$$M_{гир} = N_{гир} AB \quad \text{или} \quad N_{гир} = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{AB}.$$

Пример. Волчок прецессирует, будучи установлен на шероховатую горизонтальную поверхность (рис. 11.4). Момент инерции волчка относительного его оси симметрии $J_z = 9000$ г·см^2, угловая скорость его собственного вращения $\omega_1 = 209$ с$^{-1}$, масса волчка $m = 900$ г, расстояние от точки опоры волчка до его центра масс $l = 6$ см, угол наклона $\theta = 30°$.

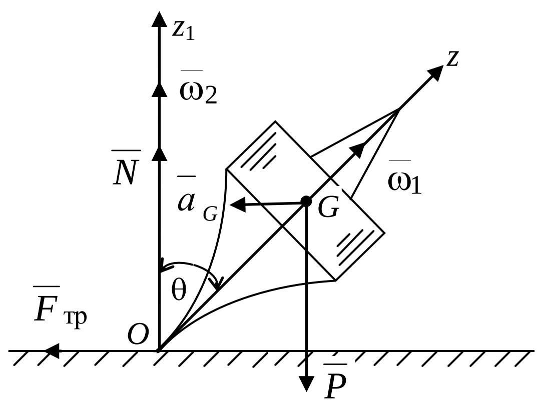


Рис. 11.4

Каков должен быть коэффициент трения f между этой поверхностью и ножкой волчка, чтобы волчок не скользил по поверхности?

Решение. Для того чтобы точка O не скользила по поверхности, сила трения $\overline{F}_{тр}$ должна удовлетворять условию

$$F_{тр} \le fN. \qquad (11.5)$$

Определим силу трения. Для этого, следуя прецессионной теории гироскопа, определим сначала угловую скорость прецессии

$$\omega_2 = \frac{Pl \sin\theta}{J_z \omega_1 \sin\theta} = \frac{Pl}{J_z \omega_1}.$$

Далее, воспользуемся теоремой о движении центра масс в проекциях на главную нормаль $(\bar{n})$ и бинормаль $(\bar{b})$ траектории центра масс G:

$$ma_G = F_{\text{тр}}, \quad N - P = 0, \text{ где } a_G = \omega_2^2 l \sin\theta.$$

Подставляя в первое выражение значение угловой скорости прецессии ω_2, получим для силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{mP^2 l^3 \sin\theta}{J_z^2 \omega_1^2}.$$

Из условия (11.5) имеем

$$f \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{m^2 g l^3 \sin\theta}{J_z^2 \omega_1^2} = \frac{81 \cdot 10^4 \cdot 980 \cdot 6^3}{2 \cdot 81 \cdot 10^6 \cdot 209^2} = 0{,}024.$$

Примеры применения гироскопа в технике

Гироскоп в настоящее время широко используется и является основным элементом многих технических устройств и систем различного назначения.

Трехстепенные гироскопы используются в различных навигационных приборах (гирогоризонт, гирокомпас и др.), в устройствах для поддержания заданного направления движения (стабилизации) таких объектов, как самолет (автопилоты), морские суда, ракеты и др.

Двухстепенной гироскоп используется, например, в гиротахометрах, позволяющих определить угловую скорость объекта, на котором установлен прибор. Двухстепенные гироскопы используются также в качестве стабилизатора движения, например успокоителя качки, применяемого на судах.

Микро-гироскопы, основанные на иных принципах действия, используются в современных мобильных устройствах.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается основное допущение прецессионной теории гироскопа?

2. Сформулируйте теорему Резаля.

3. Назовите важнейшее свойство свободного гироскопа с тремя степенями свободы.

4. Напишите формулу для угловой скорости прецессии волчка под действием силы тяжести.

5. Запишите формулу, определяющую гироскопический момент, действующий на подшипники, в которых закреплена ось ротора гироскопа с двумя степенями свободы.

ЛЕКЦИЯ № 12
ТЕОРИЯ УДАРА

Основные определения приближенной теории удара

Взаимодействие тел, при котором скорости их точек за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом.

Силы, при действии которых происходит удар, называются *ударными силами* $\overline{F}_{\text{уд}}$.

Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, называется *временем удара.*

Ударные силы могут быть очень большими, поэтому в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматриваются не сами ударные силы, а их импульсы.

Ударный импульс равен

$$\overline{S} = \int_0^{\tau} \overline{F}_{\text{уд}} dt.$$

Обозначая среднее значение ударной силы за время τ через $\overline{F}_{\text{уд}}^{\text{ср}}$, по теореме о среднем значении имеем

$$\overline{S} = \overline{F}_{\text{уд}}^{\text{ср}} \cdot \tau.$$

Так как τ мало, из последнего равенства следует, что ударный импульс является величиной конечной. Соответственно импульсы неударных сил будут существенно меньше ударных, и ими в приближенной теории удара пренебрегают.

Обозначим $\overline{V}$ – скорость в начале удара, $\overline{u}$ – скорость в конце удара. Тогда теорема об изменении количества движения для материальной точки запишется в виде

$$m(\overline{u}-\overline{V})=\sum\overline{S}_k, \tag{12.1}$$

т.е. *изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов*.

Уравнение (12.1) является *основным уравнением теории удара*.

Общие теоремы теории удара

Применим общие теоремы динамики к движению механической системы при ударе.

Пусть имеем механическую систему ($n>1$, $M_k : m_k, \overline{r}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$).

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы в интегральной форме, полученной в лекции № 6. Так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части остаются только ударные импульсы:

$$\overline{Q}_2-\overline{Q}_1=\sum\overline{S}_k^e, \tag{12.2}$$

т.е. изменение количества движения механической системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на координатные оси теорема имеет вид:

$$\begin{cases} Q_{2x}-Q_{1x}=\sum S_{kx}^e, \\ Q_{2y}-Q_{1y}=\sum S_{ky}^e, \\ Q_{2z}-Q_{1z}=\sum S_{kz}^e. \end{cases}$$

2. Теорема об изменении кинетического момента

Обозначим $\overline{S}_k^i$ – равнодействующую внутренних ударных импульсов, $\overline{S}_k^e$ – равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на материальную точку M_k. Тогда из (12.1) имеем:

$$m_k\bar{u}_k = m_k\bar{V}_k + \bar{S}_k^i + \bar{S}_k^e \qquad (k = 1,2\ldots,n). \qquad (12.2,\ a)$$

Соударяющиеся точки во время удара остаются неподвижными.

Используя теорему Вариньона, возьмём моменты относительно произвольной точки O от векторов, входящих в равенство (12.2, a):

$$\bar{m}_O(m_k\bar{u}_k) = \bar{m}_O(m_k\bar{V}_k) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \bar{m}_O(\bar{S}_k^i) \quad (k = 1,2,\ldots,n). \qquad (12.3)$$

Просуммируем уравнения (12.3):

$$\sum\bar{m}_O(m_k\bar{u}_k) - \sum m_O(m_k\bar{V}_k) = \sum\ \bar{m}_O(\bar{S}_k^e) + \sum\ \bar{m}_O(\bar{S}_k^i).$$

Слагаемые, стоящие слева, представляют собой кинетические моменты системы относительно центра O в конце и в начале удара, которые обозначим $\bar{K}_O^{(2)}$ и $\bar{K}_O^{(1)}$. Так как сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю, получим

$$\bar{K}_O^{(2)} - K_O^{(1)} = \sum\bar{m}_O(\bar{S}_k^e),$$

т.е. изменение за время удара кинетического момента механической системы относительно какого-либо центра O равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.

В проекции на оси $Oxyz$ имеем:

$$\begin{cases} K_x^{(2)} - K_x^{(1)} = \sum m_x(\bar{S}_k^e), \\ K_y^{(2)} - K_y^{(1)} = \sum m_y(\bar{S}_k^e), \\ K_z^{(2)} - K_z^{(1)} = \sum m_z(\bar{S}_k^e). \end{cases}$$

Коэффициент восстановления при ударе

Коэффициентом восстановления при ударе k называется отношение модуля скорости тела, принимаемого за материальную точку, в конце удара к модулю скорости в начале удара о неподвижную преграду:

$$k = \frac{u}{V}.$$

Коэффициент восстановления определяется экспериментально для различных тел. При изменении скорости V в небольшом диапазоне коэффициент восстановления k можно считать зависящим только от материала соударяющихся тел. При $k = 0$ удар называется *абсолютно неупругим* и $u = 0$. При $k = 1$ удар называется *абсолютно упругим.* В этом случае $u = V$.

Удар тела о неподвижную преграду

Прямой удар. Если скорость $\overline{V}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали $\overline{n}$ к преграде, то удар будет *прямым.*

В этом случае, учитывая, что $\overline{Q}_2 = M\overline{V}$, $\overline{Q}_1 = M\overline{u}$, уравнение (12.2) в проекциях на нормаль $\overline{n}$ будет иметь вид:

$$M(u_n - V_n) = S_n.$$

Так как при прямом ударе $u_n = u$, $V_n = V$, $S_n = S$, то $M(u + V) = S$.

Далее, принимая во внимание, что $u = k \cdot V$, получим

$$S = M(1 + k)V. \tag{12.4}$$

Как видно из формулы (12.4), ударный импульс будет максимальным в случае абсолютно упругого удара и минимальным в случае абсолютно неупругого удара.

Прямой центральный удар двух тел

Удар двух тел называется *прямым* и *центральным*, если общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке касания проходит через их центры масс, а скорости центров масс в начале удара направлены по этой нормали. Например, удар двух однородных шаров, у которых центры масс до удара движутся вдоль одной и той же прямой, будет прямым и центральным.

Пусть M_1 и M_2 – массы тел, V_1, V_2 – скорости тел в начале удара, u_1, u_2 – скорости тел в конце удара, C_1x – координатная ось, проходящая через центры масс тел C_1 и C_2 (рис. 12.1). Для того чтобы произошёл удар, должны выполняться соотношения $V_{1x} > V_{2x}$, $u_{1x} \le u_{2x}$. Определим скорости тел в конце удара u_{1x} и u_{2x}, зная их массы M_1, M_2 и их скорости в начале удара V_{1x}, V_{2x}.

Применим теорему об изменении количества движения, рассматривая тела в момент удара как одну механическую систему. Тогда ударные силы, действующие между точками тел, будут внутренними, и их сумма будет равна нулю. Тогда равенство (12.2) примет вид:

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}. \tag{12.5}$$

Второе уравнение получим из определения коэффициента восстановления $k = \left|\dfrac{u_{1x} - u_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}}\right|$. Учитывая, что $V_{1x} > V_{2x}$ и $u_{1x} \le u_{2x}$, имеем

$$k = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}}$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(V_{1x} - V_{2x}). \tag{12.6}$$

Уравнения (12.5) и (12.6) определяют искомые скорости тел.

Ударные импульсы равны

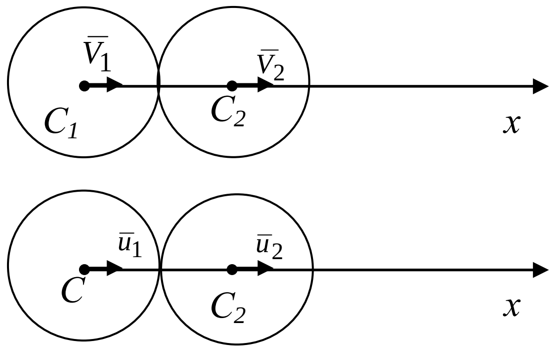


Рис. 12.1

$$S_{1x} = M_1(u_{1x} - V_{1x}), \qquad S_{2x} = -S_{1x}.$$

В случае абсолютно неупругого удара (k = 0) скорости тел в конце удара равны

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}}{M_1 + M_2}. \tag{12.7}$$

При этом ударный импульс, действующий на тела, равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}).$$

В случае упругого удара (k = 1) скорости равны

$$u_{1x} = V_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}),$$

$$u_{2x} = V_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}).$$

Ударный импульс в этом случае равен

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}). \qquad (12.8)$$

Как видно из формул (12.7) и (12.8), при абсолютно упругом ударе ударный импульс в два раза больше, чем при абсолютно неупругом ударе. В случае, когда $M_1 = M_2$, имеем $u_{1x} = V_{2x}, u_{2x} = V_{1x}$.

Теорема Карно

Определим потерю кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно и что после удара их общая скорость равна u, получим для кинетической энергии в начале и конце удара:

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1V_{2x}^2 + M_2V_{2x}^2), \quad T_2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u_x^2.$$

Учитывая формулу (12.6), преобразуем вторую формулу:

$$T_2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u_x^2 = \frac{1}{2}(M_1V_{1x} + M_2V_{2x})u_x.$$

Тогда

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}(M_1V_{1x}^2 + M_2V_{2x}^2 - 2M_1V_{1x}u_x - 2M_2V_{2x}u_x + M_1u_x^2 + M_2u_x^2)$$

или

$$\boxed{T_1 - T_2 = \frac{1}{2}M_1(V_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2x} - u_x)^2.} \qquad (12.9)$$

Полученная формула (12.9) выражает теорему Карно: *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы её тела двигались с потерянными скоростями.*

Удар по вращающемуся телу (рис. 12.2)

Пусть к телу, имеющему ось вращения *z*, приложен ударный импульс $\bar{S}$, тогда по теореме об изменении кинетического момента

$$K_{2z} - K_{1z} = m_z(\bar{S}). \tag{12.10}$$

Обозначим импульсивные реакции $\bar{S}_A$ и $\bar{S}_B$. Их моменты относительно оси *z* будут равны нулю, так как пересекают ось *z*.

Пусть ω – угловая скорость тела в начале удара, Ω – в конце удара, тогда $K_{1z} = J_z\omega$, $K_{2z} = J_z\Omega$, и из формулы (12.10) получим

$$J_z(\Omega - \omega) = m_z(\bar{S}) \quad \textit{или} \quad \boxed{\Omega = \omega + \frac{m_z(\bar{S})}{J_z}}. \tag{12.11}$$

Из формулы (12.11) следует, что угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.

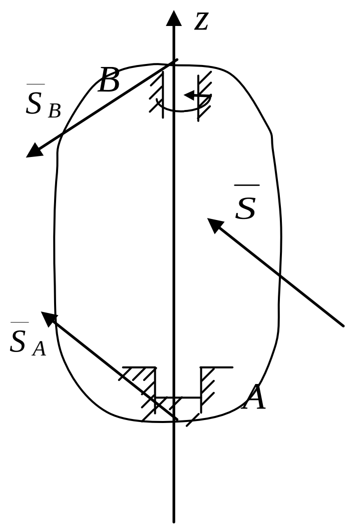


Рис. 12.2

Пример. Диск радиуса R = 0,4 м вращается вокруг оси *z*, лежащей в плоскости диска и проходящей через его центр с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. В какой-то момент диск наталкивается на неподвижное препятствие в точке, находящейся на расстоянии радиуса от оси и останавливается. Импульс ударной реакции при этом равен S = 150 Н·с. Определить момент инерции тела относительно оси вращения.

Решение. Определим момент ударного импульса относительно оси вращения *z*:

$$m_z(\bar{S}) = -S \cdot R = -150 \cdot 0{,}4 = -60\,\text{кг·м}^2/\text{с},$$

где знак минус означает, что момент ударного импульса тормозит вращение диска. Учитывая, что угловая скорость диска в конце удара $\Omega = 0$, по формуле (12.10) определим момент инерции тела

$$J_z = -\frac{m_z(\bar{S})}{\omega} = \frac{60}{10} = 6\,\text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какое явление называется ударом?
2. Перечислите основные положения приближенной теории удара.
3. Сформулируйте теорему об изменении количества движения для случая удара.
4. Что называется коэффициентом восстановления при ударе?
5. Какой удар двух тел называется прямым центральным?
6. Сформулируйте теорему Карно.

ЛЕКЦИЯ № 13
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Основные понятия аналитической механики

На прошлой лекции мы закончили изучение общих теорем динамики и их применение в динамике твердого тела. В некоторых случаях общие теоремы динамики позволяют до конца решить задачу определения движения механической системы. В тех случаях, когда нет необходимости знать движение каждой материальной точки, теоремы позволяют определить изменение таких общих характеристик, как количество движения, кинетический момент, кинетическая энергия, центр масс.

Однако в случаях несвободных систем приходится при этом вводить неизвестные реакции связи, определение которых не всегда требуется по условиям задачи, к тому же, оно бывает затруднительно или вовсе невозможно.

Раздел теоретической механики, называемый *аналитической механикой*, изучает общие методы, позволяющие составлять дифференциальные уравнения движения несвободных механических систем, не вводя реакции идеальных связей.

Связи и их классификация

При изучении динамики несвободной материальной точки мы уже рассматривали связи. Обобщим эти понятия на систему материальных точек.

Механическая система называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения, а их скорости могут принимать произвольные значения. В противном случае, механическая система называется *несвободной*. Для несвободных систем должны быть указаны ограничения, накладываемые на координаты или скорости, или на те и другие.

Эти ограничения, как мы знаем, называются связями. Они могут быть записаны в виде уравнений или неравенств.

В общем случае уравнение связи можно записать в виде:

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n, \bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n, t) \geq 0 \quad \text{или}$$

$$f(\bar{r}_k, \bar{V}_k, t) \geq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.1}$$

Если в соотношении (13.1) реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей*, если в виде неравенства, то *неудерживающей*. Если уравнение связи не содержит скорости точек, т.е.

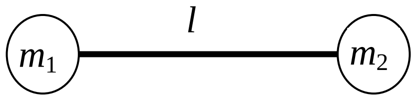
$$f(\bar{r}_k, t) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ то} \tag{13.2}$$

связь называется *геометрической* или *голономной*.

Если же в уравнение связи входят скорости точек, то связь называется *кинематической* или *дифференциальной*. Если уравнение кинематической связи нельзя проинтегрировать и нельзя представить в виде (13.2), то такая связь называется *неголономной.*

Пример 1. Гантель (рис. 13.1)

Две материальные точки, связанные невесомым стержнем, называются «гантелью». Пусть длина стержня равна l. Тогда координаты материальных точек удовлетворяют уравнению геометрической связи:



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Рис. 13.1

Пример 2. Кривошипно-ползунный механизм (рис. 13.2)

Рассмотрим механизм как систему связанных материальных точек A и B.

Уравнения связей:

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0, \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - l^2 = 0, \\ y_B = 0. \end{cases}$$

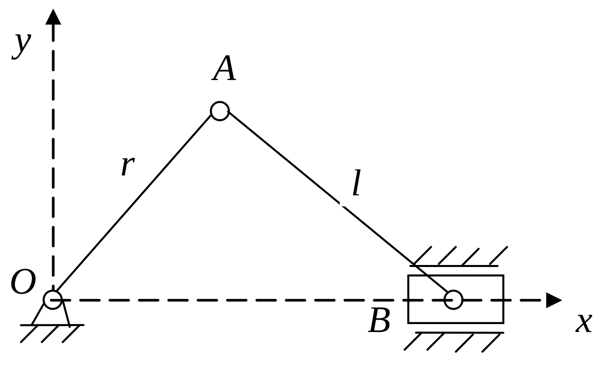


Рис. 13.2

Пример 3. Движение конька по льду

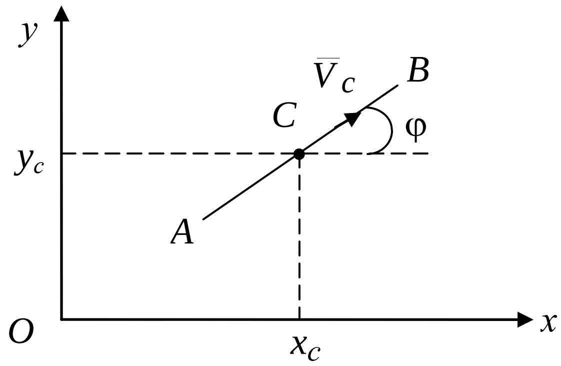


Рис. 13.3

Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости *Oxy* (рис. 13.3). Конек моделируем тонким стержнем *AB*, одна из точек которого *C* касается льда. Скорость $\overline{V}_C$ всегда направлена по стержню.

Уравнение связи:

$$\dot{y}_C = \dot{x}_C \operatorname{tg}\varphi. \qquad (13.3)$$

Так как уравнение (13.3) нельзя проинтегрировать, то связь в этом случае будет неголономной.

В дальнейшем будем рассматривать только голономные связи.

Если уравнение связи не содержит время t явно, то такие связи называются *стационарными*, если содержат – то *нестационарными*.

Виртуальные перемещения

Рассмотрим простейший случай. Пусть материальная точка находится на стационарной поверхности, т.е. на поверхности, которая с течением времени не изменяется.

Определение. *Назовем виртуальными перемещениями точек в рассматриваемом случае всякие бесконечно малые ее перемещения по поверхности.*

Получим условия для таких перемещений.

Уравнение поверхности является уравнением связи

$$f(x, y, z) = 0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – начальное положение материальной точки на поверхности, определяемое радиус-вектором $\overline{r}_0$ (рис. 13.4). Рассмотрим любое малое перемещение точки $\delta\overline{r}_0$ по поверхности, не нарушающее связи. Координатами нового положения точки будут

$$x_0 + \delta x,\ y_0 + \delta y,\ z_0 + \delta z,$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ – проекции вектора $\delta \bar{r}$.

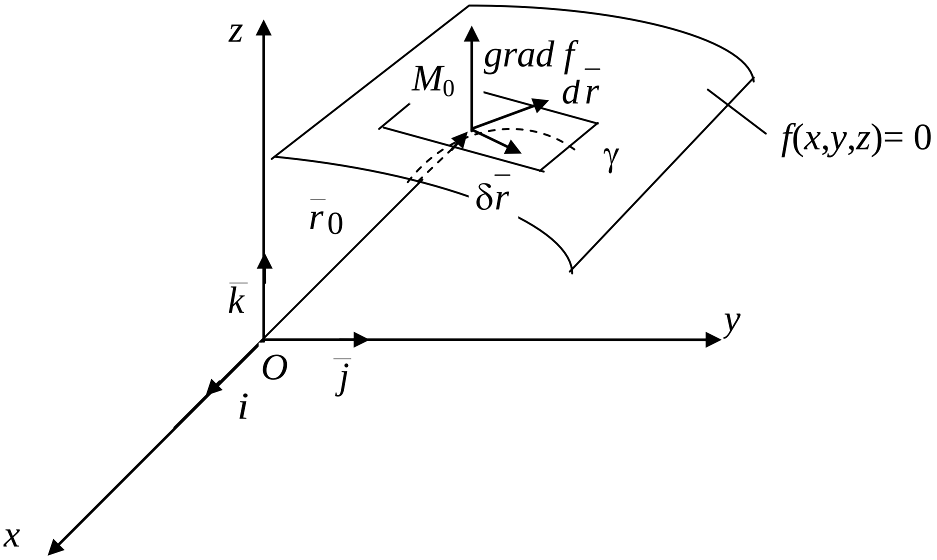


Рис. 13.4

Подставим эти координаты в уравнение связи:

$$f(x_0 + \delta x,\ y_0 + \delta y,\ z_0 + \delta z) = 0. \tag{13.4}$$

Разложим выражение (13.4) в ряд по степеням $\delta x, \delta y, \delta z$:

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{zx}\right)_0 \delta z + \ldots = 0.$$

Ограничимся первым порядком малости, удерживая только линейные члены

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0.} \tag{13.5}$$

Таким образом, виртуальные перемещения должны удовлетворять уравнению (13.5).

Геометрическая интерпретация условия (13.5)

Выражение (13.5) можно переписать в виде:

$$\boxed{grad_0 f\, \delta\bar{r} = 0,} \qquad (13.6)$$

где

$$grad_0\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \bar{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \bar{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \bar{k}\,.$$

Вывод. *Векторы виртуальных перемещений расположены в касательной плоскости (рис.* 13.4*) к поверхности в рассматриваемой точке.*

Действительные перемещения точки

Действительными называются бесконечно малые перемещения точки $d\bar{r}$ в ее конкретном движении, определяемом приложенными силами и начальными условиями.

Действительные перемещения $d\bar{r}$ происходят под действием приложенных к точке сил за время dt. Оно всегда направлено по касательной к траектории точки, так как $d\bar{r} = \bar{V}dt$ (на рис. 13.4 эта траектория обозначена γ).

Следовательно, в случае стационарной связи действительные перемещения материальной точки находятся среди множества виртуальных перемещений.

Случай нестационарной поверхности

В этом случае уравнение связи

$$f(x, y, z, t) = 0\,,$$

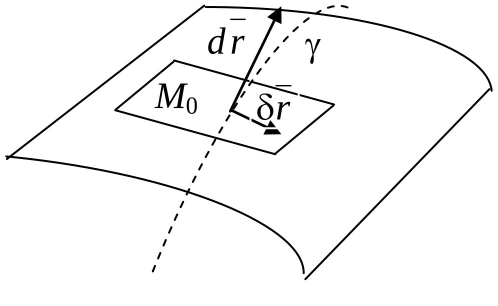


Рис. 13.5

и поверхность в заданный момент времени t не будет содержать действительную траекторию точки γ (рис. 13.5).

В этом случае действительные перемещения среди виртуальных тел не находится. Действительные перемещения в этом случае должны удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt=0.$$

Распространение понятия виртуальных перемещений на случай механической системы

Определение. *Виртуальными перемещениями механической системы называются всякие бесконечно малые перемещения точек системы из рассматриваемого положения, допускаемые связями, зафиксированными (как бы «замороженными») в рассматриваемый момент времени.*

Получим условия для виртуальных перемещений механической системы.

Пусть дана механическая система

$$n>1,\ M_k:\bar{r}_k(x_k,y_k,z_k)\ \ (k=1,2,..,n).$$

Предположим, на механическую систему наложено m < 3n голономных, нестационарных, удерживающих связей

$$f_i(x_1,y_1,z_1,..x_n,y_n,z_n,t)=0\quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{13.7}$$

Пусть $M_{0k}(x_{0k},y_{0k},z_{0k})$ – начальные положения точек системы. Придадим точкам малые перемещения $\delta\bar{r}_k(\delta x_k,\delta y_k,\delta z_k)$ при фиксированном времени *t*, удовлетворяющие связям (13.7):

$$f_i(x_{01}+\delta x_1,y_{01}+\delta y_1,z_{01}+\delta z_1,..x_{0n}+\delta x_n,y_{0n}+\delta y_n,z_{0n}+\delta z_n,t)=0,\quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{13.8}$$

Раскладывая выражение (13.8) в ряд по степеням $\delta x_k,\delta y_x,\delta z_k$ и отбрасывая малые выше второго порядка малости, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_0\delta x_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)_0\delta y_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\right)_0\delta z_k\right]=0\quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{13.9}$$

Таким образом, проекции $\delta_{x_k},\delta_{y_k},\delta_{z_k}$ виртуальных перемещений $\delta\bar{r}_k$ механической системы должны удовлетворять уравнениям (13.9) и, следовательно, число независимых проекций виртуальных перемещений равно

$$\boxed{k = 3n - m.} \tag{13.10}$$

Число степеней свободы механической системы

Число независимых проекций виртуальных перемещений $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k \ (k = 1,2,\ldots,n)$ *механической системы называют её числом степеней свободы* k (13.10).

Идеальные связи

Связи называются идеальными, если сумма работ реакции этих связей на любом виртуальном перемещении этой системы равна нулю, т.е.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta \overline{r}_k = 0.} \tag{13.11}$$

Условие идеальности связей не вытекает из уравнений связей. Оно вводится дополнительно, аксиоматически.

Примеры идеальных связей

1. *Движение материальной точки по гладкой поверхности* (рис. 13.6).

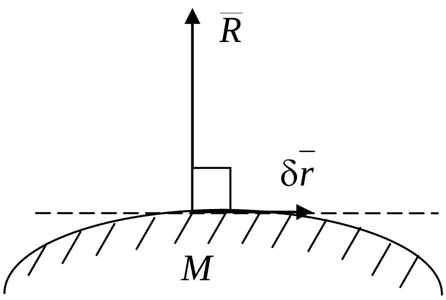


Рис. 13.6

Реакция $\overline{R}$ гладкой поверхности перпендикулярна касательной к поверхности, следовательно

$$\overline{R} \perp \delta\overline{r} \quad и \quad \delta A = \overline{R} \cdot \delta\overline{r} = 0.$$

2. *Свободное твёрдое тело.*

В этом случае нет других связей кроме тех, которые обеспечивают постоянство взаимных расстояний точек тела посредством сил, которые для твёрдого тела являются внутренними. Но ранее доказывали, что внутренние силы в твёрдом теле не совершают работу. Следовательно, $\delta A = 0$.

3. *Связь при вращении тела без трения* (рис 13.7).

Пусть тело закреплено в точках A и B шарнирно. При отсутствии трения виртуальная работа реакций шарниров $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ равна

$$\delta A = \overline{R}_A \cdot \delta\overline{r}_A + \overline{R}_A \cdot \delta\overline{r}_B = 0,$$

так как точки A и B закреплены и

$$\delta\overline{r}_A = \delta\overline{r}_B = 0.$$

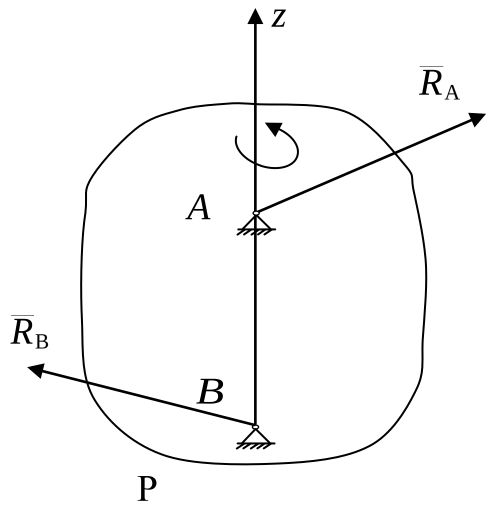


Рис. 13.7

4. *Связь при качении твёрдого тела без скольжения* (рис. 13.8).

В этом случае реакция шероховатой поверхности равна $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{тр}$.

Точка P соприкосновения тела с твёрдой шероховатой поверхностью является мгновенным центром скоростей и $\delta r_p = 0$.

Следовательно, $\delta A = \overline{R} \cdot \delta\overline{r}_p = 0$.

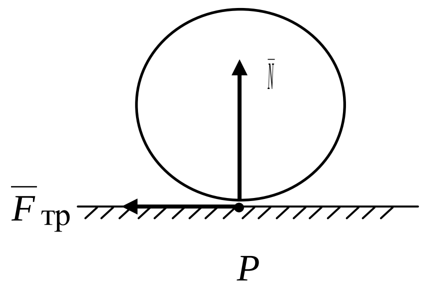


Рис. 13.8

Вопросы для самопроверки

1. В каком случае связи называются кинематическими?
2. Какие связи называются стационарными?
3. Какие перемещения материальной точки называются виртуальными?
4. Какие перемещения материальной точки называются действительными?
5. При каких связях действительные перемещения материальной точки находятся среди множества виртуальных перемещений?
6. Что называется числом степеней свободы механической системы?
7. Какие связи называются идеальными?
8. Приведите примеры идеальных связей.

ЛЕКЦИЯ № 14
ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТАТИКИ

Принцип устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия (покоя) механической системы.

Пусть дана несвободная механическая система, состоящая из $n > 1$ материальных точек $M_k (k = 1,2,...,n)$. Положение каждой k-й точки массой m_k определяется в инерциальной системе отсчета $Oxyz$ радиус-вектором $\bar{r}_k$. Ее кинематическими характеристиками являются скорость $\bar{V}_k$ и ускорение $\bar{a}_k$. $\bar{F}_k$ и $\bar{R}_k$ – равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точкам системы. Механическая система подчинена (m) голономным удерживающим связям, задаваемым уравнениями

$$f_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,...,x_k, y_k, z_k,...,x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1,2,...,m). \quad (14.1)$$

Уравнения движения системы имеют вид:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k \quad (k = 1,2,...,n). \quad (14.2)$$

Под равновесием (покоем) механической системы понимается такое ее положение, в котором система остается в течение всего времени, если в начальной момент времени, имея скорости равные нулю, она находилась в этом положении.

Следовательно, условия равновесия будут следующими:

$$\bar{V}_k = 0, \quad \bar{a}_k = 0 \quad (k = 1,2,...,n)$$

или, учитывая уравнение (14.2),

$$\bar{V}_k^0 = 0, \quad \bar{F}_k + \bar{R}_k = 0 \quad (k = 1,2,...,n). \quad (14.3)$$

Равенства (14.3) являются необходимыми и достаточными условиями равновесия механической системы. Однако они имеют существенный недостаток, так как требуют учета не только активных сил, но и реакций связей. Швейцарский ученый И. Бернулли сформулировал, а Ж. Лагранж впоследствии доказал, более удобный в применении принцип виртуальных перемещений, устанавливающий условия равновесия механической системы с идеальными, стационарными связями. В настоящем изложении принцип формулируется в виде теоремы:

Для того чтобы механическая система, подчиненная идеальным, стационарным, голономным и удерживающим связям находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении системы и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю, т.е.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\delta\overline{r}_k=0,\quad \overline{V}_k^0=0\quad (k=1,2,\ldots,n).}$$

Доказательство необходимости. Пусть система находится в равновесии:

$$\overline{F}_k+\overline{R}_k=0\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k\delta\overline{r}_k=0.$

Из данного положения дадим системе виртуальное перемещение $\delta\overline{r}_1,\delta\overline{r}_2,\ldots,\delta\overline{r}_n$, умножим скалярно каждое из уравнений равновесия и сложим почленно:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k+\overline{R}_k)\delta\overline{r}_k=0.$$

Учитывая, что связи идеальные и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{R}_k\delta\overline{r}_k=0,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k\delta\overline{r}_k=0.$$

Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть теперь $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k\delta\overline{r}_k=0,\quad \overline{V}_k^0=0.$

Докажем, что механическая система при этом будет находиться в равновесии. Доказательство будем вести от противного. Пусть при заданных условиях система не находится в состоянии равновесия и точки системы получили под действием приложенных сил перемещения $d\bar{r}_k$. Тогда на основании теоремы об изменении кинетической энергии сумма работ всех активных сил и реакций связей на этом перемещении будет положительной, учитывая, что система начала движется из состояния покоя:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\bar{R}_k d\bar{r}_k > 0. \qquad (14.4)$$

Так как для стационарных связей действительное перемещение является одним из виртуальных, то выбирая последнее совпадающим с действительным, запишем неравенство (14.4) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\bar{R}_k \delta\bar{r}_k > 0. \qquad (14.5)$$

Вторая сумма в неравенстве (14.5) в силу идеальности связей равна нулю и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k \delta\bar{r}_k > 0,$$

что противоречит условию и доказывает достаточность условий равновесия принципа виртуальных перемещений.

Достоинством рассмотренного принципа является то, что в его формулировку не входят реакции идеальных связей, что избавляет от необходимости их определения.

В тех случаях, когда необходимо найти реакцию какой-либо идеальной связи, нужно освободиться от этой связи, заменить ее действие реакцией, включив последнюю в число активных сил. Системе, получившей степень свободы, сообщить соответствующие перемещение и определить реакцию из принципа виртуальных перемещений.

В случае, если неидеальность связи обусловлена силой трения тела системы о шероховатую поверхность, следует разложить реакцию поверхности на нормальную составляющую и силу трения. Далее принять эту связь за идеальную, отнеся силу трения к активным силам.

Пример 1.

К кривошипу OA кривошипно-ползунного механизма приложена пара сил с моментом M, а к поршню B – сила $\overline{P}$ (рис. 14.1). Длины кривошипа и шатуна AB равны: $OA = AB = a$. Пренебрегая трением, силами тяжестей поршня, кривошипа и шатуна, определить угол φ, при котором механизм находится в равновесии.

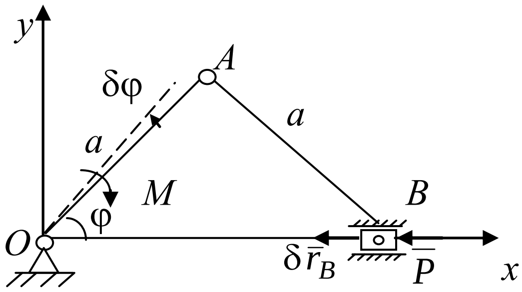


Рис. 14.1

Решение. К механической системе приложены активная сила P и момент M. Система, положение которой определяется углом φ, имеет одну степень свободы. Придадим кривошипу виртуальное угловое перемещение δφ против хода часовой стрелки. Тогда поршень B получит виртуальное перемещение $\delta\overline{r}_B$, направленное влево (рис. 14.1).

В соответствии с принципом виртуальных перемещений имеем

$$-M\delta\varphi + \overline{P}\cdot\delta\overline{r}_B = 0$$

или

$$-M\delta\varphi + P\cdot|\delta x_B| = 0. \qquad (14.6)$$

Координата точки B связана с углом φ уравнением связи:

$$x_B = 2a\cos\varphi. \qquad (14.7)$$

Выполним операцию варьирования соотношения (14.7), учитывая, что операция варьирования сходна с операцией дифференцирования при фиксированном времени. В результате, получим

$$\delta x_B = -2a\sin\varphi\delta\varphi.$$

Тогда

$$|\delta x_B| = 2a\sin\varphi\delta\varphi \quad \text{при} \quad \sin\varphi > 0.$$

Подставляя последнее в соотношение (14.6), получим

$$(-M + 2a\sin\varphi)\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi$ выбирали произвольно, выражение в скобках должно равняться нулю и, следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{M}{2Pa}$.

Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики)

Рассмотрим движение несвободной механической системы, состоящей из $n > 1$ материальных точек M_k (k = 1,2,…,n) и подчинённой идеальным, стационарным, голономным, удерживающим связям относительно инерциальной системы отсчёта *Oxyz*. Применим принцип освобождаемости от связей и заменим связи их реакциями. Пусть $\overline{F}_k$ и $\overline{R}_k$ – равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к материальным точкам. Тогда для каждой точки механической системы можно записать основное уравнение динамики

$$m_k \bar{a}_k = \overline{F}_k + \overline{R}_k. \tag{14.8}$$

Если ввести даламберову силу инерции $\overline{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$, то уравнение (14.8) можно записать в виде

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0. \tag{14.9}$$

Уравнение (14.9) представляет принцип Даламбера для k-й точки, рассмотренный ранее в динамике точки, который позволяет уравнение движения записать в форме уравнения статики. Если это же уравнение распространить на механическую систему M_k (k = 1,2,…, n), то уравнение (14.9) представляет *принцип Даламбера для механической системы.*

Мысленно зафиксируем время t и дадим системе виртуальное перемещение $\delta\bar{r}_k$ $(k = 1,2,..,n)$. Умножим каждое уравнение (14.9) на $\delta\bar{r}_k$ и сложим их:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k \delta\bar{r}_k = 0.$$

Так как связи идеальны, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$ и, следовательно,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k \delta \overline{r}_k = 0.} \qquad (14.10)$$

Равенство (14.10) называется *общим уравнением динамики, которое выражает принцип Даламбера-Лагранжа*:

В каждый момент движения механической системы, подчинённой идеальным, стационарным, голономным, удерживающим связям, работа активных сил и даламберовых сил инерции на виртуальном перемещении точек механической системы равна нулю.

Если в систему входят твёрдые тела, то работа сил инерции на виртуальном перемещении вычисляется по формулам:

1) при поступательном движении

$$\delta A = -M\overline{a} \cdot \delta\overline{r},$$

где $\overline{a}$ – ускорение тела, M – его масса;

2) при вращательном движении вокруг неподвижной оси z

$$\delta A = -J_z \cdot \varepsilon \cdot \delta\varphi,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z, ε – его угловое ускорение;

3) при плоском движении

$$\delta A = -M\overline{a_C} \cdot \delta\overline{r_C} - J_{Cz} \cdot \varepsilon \cdot \delta\varphi,$$

где $\overline{a_C}$ – ускорение центра масс тела, J_{Cz} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно к плоскости движения тела.

При решении практических задач, если в механическую систему входят неидеальные связи, к активным силам следует прибавить реакции этих связей.

Пример 2. Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы M_1 и M_2 массой m_1 и m_2 (рис. 14.2). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением, определить ускорение грузов.

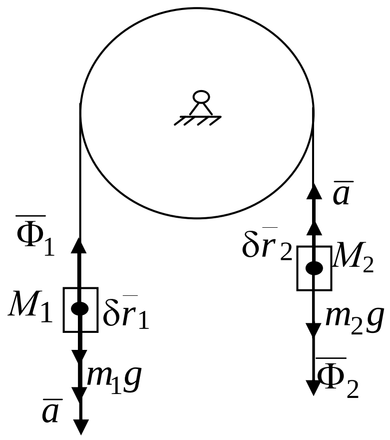


Рис. 14.2

Решение. Механическая система состоит из двух материальных точек M_1 и M_2, связанных гибкой нерастяжимой нитью, допускающей вертикальное перемещение точек. Связь является идеальной. Активными силами системы являются силы тяжести $m_1\overline{g}$ и $m_2\overline{g}$. Пусть $m_1 > m_2$ и вектор ускорения $\overline{a}$ точки M_1 направлен вниз, а вектор ускорения точки M_2 – вверх. Ускорения точек равны по величине, так как блок неподвижен. Приложим к точкам силы инерции $\overline{\Phi}_1 = -m_1\overline{a}$, $\overline{\Phi}_2 = -m_2\overline{a}$. Система имеет одну степень свободы. Дадим точке M_1 виртуальное перемещение $\delta\overline{r}_1$, направленное вниз. Тогда виртуальное перемещение $\delta\overline{r}_2$ точки M_2 будет направлено вертикально вверх. Составим общее уравнение динамики

$$m_1\overline{g}\cdot\delta\overline{r}_1 + m_2\overline{g}\cdot\delta\overline{r}_2 + \overline{\Phi}_1\cdot\delta\overline{r}_1 + \overline{\Phi}_2\cdot\delta\overline{r}_2 = 0.$$

Раскроем скалярные произведения векторов

$$m_1g\cdot\delta r_1 - m_2g\cdot\delta r_2 - \Phi_1\cdot\delta r_1 - \Phi_2\cdot\delta r_2 = 0.$$

Далее, учитывая, что $\delta r_1 = \delta r_2 = \delta r,\ \Phi_1 = m_1a,\ \Phi_2 = m_2a$,
получим

$$(m_1g - m_2g - m_1a - m_2a)\delta r = 0.$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, найдём искомое ускорение

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Пример 3. ([4], задача 46.24). Составная балка *AE*, лежащая на двух опорах *A* и *C*, состоит из трех балок *AB*, *BD* и *DE*, шарнирно соединенных в точках *B* и *D*. Балка *DE* в сечении *E* защемлена в стене. Определить вертикальную составляющую реакции в сечении *E*. К балкам приложены четыре равные вертикальные силы $\overline{P}$. Размеры указаны на рис. 14.3.

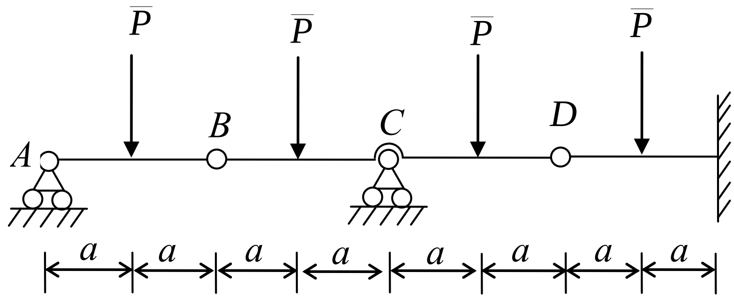


Рис. 14.3

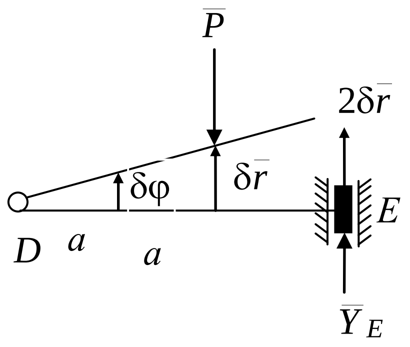


Рис. 14.4

Решение. Для определения вертикальной составляющей $\overline{Y}_E$ реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки *E*, заменив жесткую заделку скользящей и приложив реакцию $\overline{Y}_E$ (рис. 14.4). Так как при этом получим дополнительную степень свободы, дадим точке *E* виртуальное вертикальное перемещение $2\delta\overline{r}$. Стержень *DE* получит при этом угловое перемещение δφ. Из подобия треугольников точка приложения силы $\overline{P}$ получит виртуальное перемещение $\delta\overline{r}$. Применим принцип виртуальных перемещений:

$$\overline{P}\delta\overline{r} + \overline{Y}_E \cdot 2\delta\overline{r} = 0. \tag{14.11}$$

Раскрывая скалярные произведения в равенстве (14.11), получим

$$-P \cdot \delta r + Y_E \cdot 2\delta r = 0$$

или

$$(-P + 2Y_E)\delta r = 0. \tag{14.12}$$

Так как δr – произвольная бесконечно малая величина, то выражение в скобках в равенстве (14.12) должно равняться нулю и, следовательно,

$$Y_E = \frac{P}{2}.$$

Пример 4. ([4], задача 47.12). Груз *B* массы M_1 приводит в движение цилиндрический каток *A* массы M_2 и радиуса r при помощи нити, намотанной на каток (рис. 14.5). Определить ускорение груза *B*, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен f_k. Массой блока *D* пренебречь.

Решение. Механическая система имеет одну степень свободы. К ней приложены следующие активные силы: сила тяжести груза $\overline{P_1} = M_1\overline{g}$, сила тяжести катка $\overline{P_2} = M_2\overline{g}$.

Так как поверхность, по которой катится каток, не является идеальной связью, к активным силам необходимо присоединить силу трения $\overline{F}$ и нормальную реакцию $\overline{N}$, смещённую на коэффициент трения качения f_k в сторону движения катка. Направим виртуальное перемещение груза $\delta\overline{r_B}$ вниз. Тогда виртуальное перемещение центра тяжести катка $\delta\overline{r_C}$ будет направлено влево.

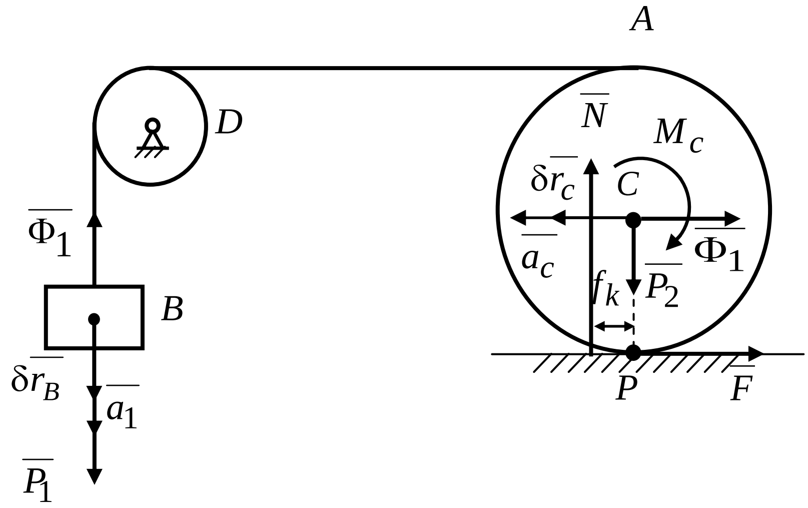


Рис. 14.5

Предположим, что ускорение $\overline{a_1}$ груза, совершающего поступательное движение, направлено вниз. Тогда сила инерции $\overline{\Phi_1}$, приложенная к грузу, направлена вертикально вверх. Сила инерции $\overline{\Phi_C}$ катка, совершающего плоское движение, будет направлена горизонтально вправо. Момент пары сил инерции M_C будет направлен по ходу часовой стрелки.

Составим общее уравнение динамики:

$$M_1\overline{g}\cdot\delta\overline{r}_B - N\cdot f_k\cdot\delta\varphi + \overline{\Phi}_C\cdot\delta\overline{r}_C - M_C\cdot\delta\varphi + \overline{\Phi}_1\cdot\delta\overline{r}_B = 0, \qquad (14.13)$$

где $$\Phi_1 = M_1\cdot a_1, \quad \Phi_C = M_2\cdot a_C, \quad M_C = J_C\cdot\varepsilon = \frac{M_2 r^2}{2}\cdot\varepsilon.$$

Раскрывая скалярные произведения в уравнении (14.13), получим

$$M_1 g\cdot\delta r_B - N\cdot f_k\cdot\delta\varphi + M_2\cdot a_C\cdot\delta r_C - \frac{M_2 r^2}{2}\cdot\varepsilon\cdot\delta\varphi - M_1\cdot a_1\cdot\delta r_B = 0. \qquad (14.14)$$

Так как каток катится без проскальзывания и точка P – мгновенный центр скоростей, из уравнений связей следует:

$$\delta r_C = \frac{\delta r_B}{2}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta r_B}{2r}. \tag{14.15}$$

Подставляя соотношения (14.15) в (14.14), получим

$$M_1 g \cdot \delta r_B - M_2 g_C f_k \cdot \frac{\delta r_B}{2r} - M_2 \cdot a_C \frac{\delta r_B}{2} - \frac{M_2 r^2}{2} \cdot \frac{\delta r_B}{2r}\varepsilon - \\ - a_1 M_1 \cdot \delta r_B = 0. \tag{14.16}$$

Дифференцируя уравнения связей $V_C = \dfrac{V_1}{2}$ и $\omega = \dfrac{V_C}{r} = \dfrac{V_1}{2r}$, получим

$$a_C = \frac{a_1}{2}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{a_1}{2r}.$$

Тогда уравнение (14.16) примет вид

$$M_1 g \cdot \delta r_B - M_2 g f_k \cdot \frac{\delta r_B}{2r} - M_2 \cdot \frac{a_1}{4}\delta r_B - \frac{M_2}{8} a_1 \cdot \delta r_B - M_1 \cdot a_1 \cdot \delta r_B = 0.$$

Принимая во внимание, что δr_B – произвольная малая величина, имеем

$$M_1 g - \frac{M_2 g \cdot f_k}{2r} - \frac{M_2}{4} a_1 - \frac{M_2}{8} \cdot a_1 - M_1 \cdot a_1 = 0,$$

откуда

$$a_1 = 8g \cdot \frac{M_1 - \dfrac{M_2 \cdot f_k}{2r}}{3M_2 + 8M_1}.$$

Из решения видно, что при $M_1 > \dfrac{M_2 \cdot f_k}{2r}$ вектор ускорения груза будет иметь принятое направление.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит принцип виртуальных перемещений статики?
2. Являются ли условия равенства нулю ускорений всех точек механической системы достаточными для её равновесия?
3. В чем заключается принцип Даламбера для механической системы?
4. Запишите общее уравнение динамики для механической системы с идеальными связями.
5. Запишите формулу для вычисления работы сил инерции на виртуальном перемещении при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси.

ЛЕКЦИЯ № 15
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Обобщенные координаты

Обобщенными координатами называются независимые параметры, заданием которых полностью определяется положение механической системы в некоторой области пространства.

Мы уже пользовались обобщенными координатами, которые в дальнейшем будем обозначать $q_1, q_2, \dots, q_l$, не употребляя этого термина.

Например, для тела, имеющего ось вращения, за обобщенную координату принимается угол φ:

$$q = \varphi.$$

Для плоскопараллельного движения твердого тела за обобщенные координаты принимаются координаты полюса x_0, y_0 и угол поворота φ

$$q_1 = x_0,\ q_2 = y_0,\ q_3 = \varphi.$$

В качестве обобщенных координат можно выбирать не только декартовы координаты, но и углы, а также другие параметры, имеющие размерности, например, площади, объема. Поэтому эти координаты называются *обобщенными*.

Ранее давали определения числа степеней свободы как числа независимых виртуальных перемещений.

Для голономных систем число степеней свободы равно числу обобщенных координат, определяющих ее положение.

Пусть на механическую систему, состоящую из $n > 1$ материальных точек, наложено m стационарных геометрических связей:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{15.1}$$

Тогда число обобщенных координат системы и число ее степеней свободы равно

$$\boxed{k = 3n - m.} \tag{15.2}$$

Следовательно, если $q_1, q_2, \ldots, q_l$ принять за обобщенные координаты системы, то число обобщенных координат $l = k$.

Например, для эллиптического маятника, на который наложены голономные связи, (рис. 15.1), обобщенными координатами являются $q_1 = x_A, q_2 = \varphi$, и следовательно, число степеней свободы $k = 2$.

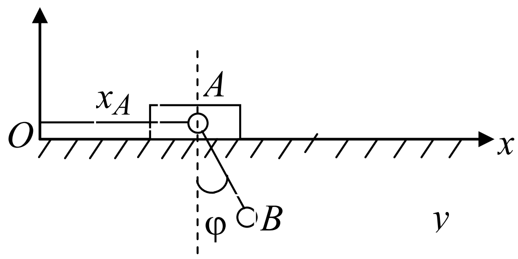


Рис. 15.1

Двойной плоский маятник (рис. 15.2) имеет две степени свободы, за обобщенные координаты удобно принять углы

$$q_1 = \varphi, \; q_2 = \psi.$$

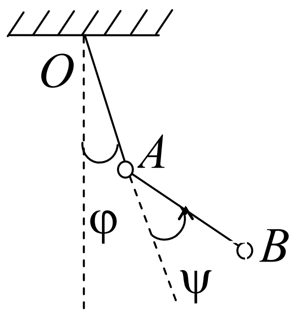


Рис. 15.2

Проверяя, можно ли менять один угол, не меняя другого, устанавливается независимость принятых обобщенных координат.

Пусть положение механической системы определяется l обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_l$. Положение каждой материальной точки системы определяется ее радиус-вектором $\bar{r}_k$. Тогда при стационарных связях

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_l), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.2}$$

или

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_l), \\ y_k = y_k(q_1, q_2, \ldots, q_l), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \\ z_k = z_k(q_1, q_2, \ldots, q_l), \end{cases} \tag{15.3}$$

Радиус-векторы и декартовы координаты единственным образом выражаются через обобщенные координаты. Если подставить выражения (15.3) в уравнения связей (15.1), то они будут выполняться тождественно.

В примере с эллиптическим маятником (рис. 15.1) за материальные точки механической системы примем ползун *A* и груз *B*. Связями для них являются гладкая поверхность и шарнирно закрепленный стержень *AB* длиной *l*.

Уравнениями связей будут

$$\begin{aligned} & y_A = 0, \\ & (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2. \end{aligned} \tag{15.4}$$

Координаты точек выразятся через обобщенные координаты следующим образом

$$\begin{cases} x_A = q_1, \ y_A = 0, \\ x_B = q_1 + l \sin q_2, \ y_B = -l \cos q_2. \end{cases} \tag{15.5}$$

Подставим равенство (15.5) в уравнение связей (15.4). Получим тождество $l^2 \equiv l^2$.

Обобщенные силы и способы их вычисления

Рассмотрим механическую систему с идеальными связями. Пусть $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ – активные силы системы. Дадим механической системе виртуальное перемещение и вычислим элементарную работу сил системы на этом перемещении:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k .$$

Используя равенство (15.2), выразим вариацию $\delta \overline{r}_k$ радиус-вектора $\overline{r}_k$ точки M_k через вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_l$ обобщенных координат:

$$\delta r_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l}\delta q_l = \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j$$

и, следовательно,

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k \sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j\,. \qquad (15.6)$$

Поменяем в равенстве (15.6) порядок суммирования:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,. \qquad (15.6)$$

Обозначим в выражении (15.6)

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j},\;\; j = 1,2,\ldots,l\,. \qquad (15.7)$$

Получим

$$\delta A = \sum_{j=1}^{l} Q_j \delta q_j\,. \qquad (15.8)$$

Обобщенными силами Q_j *называют коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении элементарной работы сил системы*.

В зависимости от размерности вариаций обобщенных координат δq_j обобщенные силы Q_j могут иметь размерность силы, момента и др.

Способы вычисления обобщенных сил

Рассмотрим три способа вычисления обобщенных сил.

1. *Определение обобщенных сил по основной формуле* (15.7)

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right). \qquad (15.9)$$

Формула (15.9) на практике применяется редко. При решении задач чаще применяется второй способ.

2. *Способ «замораживания» обобщенных координат.*

Дадим механической системе такое виртуальное перемещение, при котором все вариации обобщенных координат, кроме δq_1, равны нулю:

$$\delta q_1 \neq 0,\ \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_l = 0.$$

Вычислим на этом перемещении работу $[\delta A]_{\delta q_1}$ всех активных сил, приложенных к системе

$$[\delta A]_{\delta q_1} = Q_1 \delta q_1.$$

По определению множитель при вариации δq_1 равен первой обобщенной силе Q_1.

Далее дадим системе виртуальное перемещение

$$\delta q_2 \neq 0,\ \delta q_1 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_l = 0$$

и определим вторую обобщенную силу Q_2, вычислив виртуальную работу всех сил системы

$$[\delta A]_{\delta q_2} = Q_2 \delta q_2.$$

Аналогично вычислим все остальные обобщенные силы системы.

3. *Случай потенциального силового поля.*

Предположим, известна потенциальная энергия механической системы

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

Тогда $F_{kx} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_k}$, $F_{ky} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_k}$, $F_{kz} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial z_k}$ и по формуле (15.7)

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \qquad (15.10)$$

Принцип виртуальных перемещений статики в обобщенных координатах

Согласно принципу виртуальных перемещений статики, для равновесия системы с идеальными удерживающими голономными, стационарными связями необходимым и достаточным является условие

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r_k} = 0 \quad \text{при нулевых начальных скоростях.}$$

Переходя к обобщенным координатам, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r_k} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_l \delta q_l = 0. \qquad (15.11)$$

Так как вариации обобщенных координат независимы, то равенство нулю выражения (15.11) возможно только в том случае, когда все коэффициенты при вариациях обобщенных координат равны нулю:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \ldots, Q_l = 0. \qquad (15.12)$$

Таким образом, *для того чтобы механическая система с идеальными, голономными, стационарными и удерживающими связями находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы равнялись нулю (при нулевых начальных скоростях системы).*

В случае потенциального силового поля условия (15.12) в соответствии с (15.10) примут вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_l} = 0.$$

Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Уравнения Лагранжа выводятся из общего уравнения динамики заменой виртуальных перемещений их выражениями через вариации обобщенных координат. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений движения механической системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,2,\ldots,l. \qquad (15.13)$$

где q_j – обобщенные координаты, $\dot{q}_j=\dfrac{dq_j}{dt}$ – обобщенные скорости, T – кинетическая энергия системы, представленная как функция обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$T=T(q_1,q_2,\ldots,q_l,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_l),$$

Q_j – обобщенные силы.

Число уравнений системы (15.13) определяется числом степеней свободы и не зависит от количества тел, входящих в систему. При идеальных связях в правые части уравнений войдут только активные силы. Если связи неидеальны, то их реакции следует отнести к активным силам.

В случае потенциальных сил, действующих на механическую систему, уравнения (15.13) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=1,2,\ldots,l.$$

Если ввести функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, то учитывая, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, получим уравнения Лагранжа второго рода для случая потенциальных сил в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,l.$$

При составлении уравнений Лагранжа второго рода нужно выполнить следующие действия:

1. Установить число степеней свободы механической системы и выбрать ее обобщенные координаты.

2. Составить выражение кинетической энергии системы и представить ее как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей.

3. Пользуясь изложенными выше способами, найти обобщенные активные силы системы.

4. Выполнить все необходимые в уравнениях Лагранжа операции дифференцирования.

Пример.

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела, находящегося под действием системы активных сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ (рис. 15.3) по вышеизложенному алгоритму.

1. Тело, совершающее вращательное движение, имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ:

$$q = \varphi.$$

2. Кинетическая энергия тела при вращении вокруг неподвижной оси равна

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2,$$

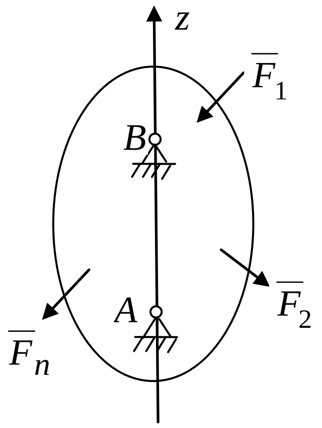


Рис. 15.3

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z, $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела.

3. Определим обобщенную силу. Дадим телу виртуальное перемещение $\delta\varphi$ и вычислим виртуальную работу всех активных сил системы:

$$\delta A = m_z(\overline{F}_1)\delta\varphi + m_z(\overline{F}_2)\delta\varphi + ... + m_z(\overline{F}_n)\delta\varphi = M_z\delta\varphi.$$

Следовательно, $Q = M_z$ – главный момент активных сил системы относительно оси вращения тела.

4. Выполним операции дифференцирования в уравнении Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_z: \qquad (15.14)$$

$$\frac{dT}{\partial\dot{\varphi}} = J_z\dot{\varphi},\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = J_z\ddot{\varphi},\ \ \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0. \tag{15.15}$$

Подставляя равенства (15.15) в уравнение (15.14), получим дифференциальное уравнение вращательного движения тела

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение обобщенных координат.
2. Как определяются обобщенные силы?
3. Как вычислить обобщенные силы с помощью способа «замораживания» обобщенных координат?
4. Сформулируйте принцип виртуальных перемещений статики в обобщенных координатах.
5. Запишите уравнения Лагранжа второго рода.

ЛЕКЦИЯ № 16
ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА-ОСТРОГРАДСКОГО

В предыдущих лекциях рассматривались дифференциальные вариационные принципы механики, позволяющие выбрать действительное движение механической системы среди кинематически возможных движений для данного момента времени. В данной лекции рассматривается интегральный вариационный принцип, который даёт критерий выбора действительного движения системы среди возможных для конечного промежутка времени $t_1 \le t \le t_2$. В 1842 г. ирландский механик и математик У.Р. Гамильтон сформулировал этот принцип для механических систем в потенциальном силовом поле. Позже, в 1848 г. российский механик и математик М.В. Остроградский независимо от У.Р. Гамильтона сформулировал интегральный принцип для более общего случая движения механических систем с нестационарными связями. В настоящее время часто оба принципа объединяют и называют принципом Гамильтона-Остроградского.

Рассмотрим движение голономной механической системы, подчинённой идеальным, удерживающим связям с l степенями свободы. Пусть её действительное движение описывается обобщенными координатами $(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_l(t))$. При этом точки системы M_k $(k = 1,2,\ldots,n)$

перемещаются из положений A_k в момент времени t_1 в положения B_k в момент времени t_2. Совокупность траекторий всех точек системы в её действительном движении называется *прямым путем.* Уравнениями прямого пути в параметрическом виде будут:

$$q_j = q_j(t) \qquad (j = 1,2,\ldots,l). \tag{16.1}$$

Совокупность варьированных при фиксированном времени траекторий с закреплёнными концами, удовлетворяющих кинематическим связям (виртуальных перемещений), называются *окольными путями.* Уравнениями окольного пути будут:

$$\tilde{q}_j(t,) = q_j(t) + \delta q_j \qquad (j = 1,2,\ldots,l), \tag{16.2}$$

$$\delta q_j(t_1) = 0, \qquad \delta q_j(t_2) = 0,$$

где вариации обобщенных координат δq_j называют «изохронными».

На основании введённых понятий и определений сформулируем **принцип Гамильтона-Остроградского:** *на прямом пути голономной механической системы выполняется равенство*

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)dt = 0, \tag{16.3}$$

где δT – вариация кинетической энергии, $\delta A = \sum_{j=1}^{l} Q_j q_j$ – виртуальная работа обобщённых сил Q_j.

Из принципа Гамильтона-Остроградского можно вывести уравнения Лагранжа второго рода и, наоборот, получить его из уравнений Лагранжа. Выведем принцип из уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1,2,\ldots,l). \tag{16.4}$$

Умножим каждое из уравнений (16.4) на вариацию соответствующей обобщенной координаты δq_j и сложим полученные равенства:

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j . \tag{16.5}$$

Взятие производной и варьирование функций являются независимыми операциями. Следовательно, их можно менять местами, и справедливо соотношение:

$$\frac{d}{dt}(\delta q_j) = \delta \dot{q}_j .$$

Учитывая последнее соотношение, возьмем производную от произведения функций:

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j .$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j . \tag{16.6}$$

Подставляя правую часть равенства (16.6) в уравнение (16.5) и учитывая, что $\delta A = \sum_{j=1}^{l} Q_j q_j$, получим

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j = \delta A. \tag{16.7}$$

Так как кинетическая энергия механической системы в общем случае может быть функцией времени обобщенных координат и обобщенных скоростей $T = T(t, q_1, q_2, ..., q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_l)$, то её вариация при $t = \text{const}$ будет иметь вид:

$$\delta T = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j . \tag{16.8}$$

Заменим в уравнении (16.7) выражение для вариации кинетической энергии:

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \delta A + \delta T . \tag{16.9}$$

Интегрируя равенство (16.9) по промежутку времени $[t_1, t_2]$ и учитывая, что $\delta q_j(t_2) = 0$, $\delta q_j(t_1) = 0$, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = \sum_{j=1}^{l} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \sum_{j=1}^{l} \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Принцип Гамильтона-Остроградского для механических систем в потенциальном силовом поле

В потенциальном силовом поле виртуальная работа сил выражается через вариацию потенциальной энергии:

$$\delta A = -\sum_{j=1}^{l} \frac{d\Pi}{dq_j} \delta q_j = -\delta \Pi.$$

Тогда, согласно (16.3), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - \Pi) dt = 0.$$

Учитывая, что $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа, запишем

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0. \tag{16.10}$$

Меняя в (16.10) местами операции варьирования и интегрирования в силу их независимости, получим окончательно

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \tag{16.11}$$

Обозначим функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

называемый *действием по Гамильтону* за промежуток времени $[t_1, t_2]$. Тогда равенство (16.11) примет вид:

$$\delta S = 0. \qquad (16.12)$$

Равенство (16.12) выражает принцип Гамильтона в виде вариационной задачи: *для прямого пути действие по Гамильтону имеет стационарное значение.*

Условие стационарности действия по Гамильтону (16.12) эквивалентно уравнениям Лагранжа для механических систем в потенциальном силовом поле:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,l.$$

Пример (Задача о брахистохроне). Пусть материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием одной силы тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ из точки состояния покоя A в точку B. Определить траекторию, двигаясь по которой материальная точка попадает из точки A в точку B за кратчайшее время. (Эта кривая называется брахистохроной)

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии для движения материальной точки из положения A в положение B, совместив начало координат с точкой A (рис. 16.1) так, чтобы координата y точки в текущем положении совпадала с перемещением точки по вертикали в выражении для работы силы тяжести. Тогда теорема запишется в виде:

$$\frac{mV^2}{2} = mgy. \qquad (16.13)$$

Из равенства (16.13) имеем

$$V = \sqrt{2gy}. \qquad (16.14)$$

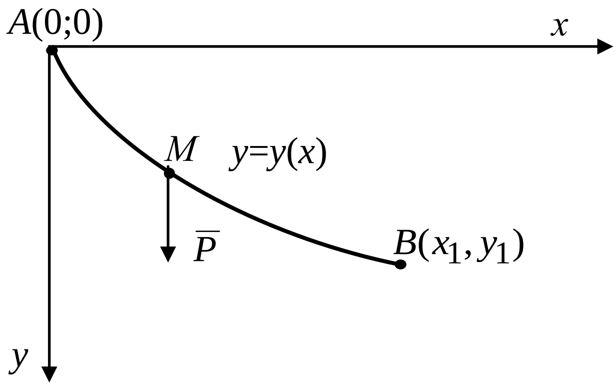


Рис. 16.1

Определим время t_1 движения точки из положения в $A(0,0)$ в положение $B(x_1, y_1)$ из формулы, определяющей скорость точки при задании её движения дугой $s = s(t)$:

$$t_1 = \int_0^{s_1} \frac{ds}{V}, \tag{16.15}$$

где $s_1 = \cup AB$. Подставляя в формулу (16.15) выражение для скорости точки (16.14) и выражение для элементарной дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy,^2}$ имеем

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx. \tag{16.16}$$

Введем обозначение

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} \tag{16.17}$$

и произведем замену переменных в принципе Гамильтона-Остроградского для механической системы с одной степенью свободы:

$$t \to x,\ q \to y,\ \dot{q} \to y',\ L \to f,\ S \to I.$$

Тогда функция $y = y(x)$, доставляющая экстремум функционалу

$$I = \int_{0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx,$$

должна удовлетворять соотношению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad (16.18)$$

которое называется уравнением Эйлера. Уравнение Эйлера можно также записать в форме

$$\frac{d}{dx}(f - y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (16.19)$$

Учитывая, что функция f в задаче не зависит от x, дифференциальное уравнение (16.19) имеет первый интеграл

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const}. \qquad (16.20)$$

Подставим выражение (16.17) для функции f в соотношение (16.20):

$$y' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\right) - \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} = \text{const}. \qquad (16.21)$$

После взятия частной производной в равенстве (16.21) получим

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} - \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} = \text{const}$$

или после простых преобразований

$$\frac{-\sqrt{y}}{y\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const}. \qquad (16.22)$$

Далее, вводя постоянную C, имеем

$$y(1+(y')^2) = C. \qquad (16.23)$$

Введем параметр φ и обозначим $y' = \mathrm{ctg}\varphi$. Тогда

$$y = \frac{C}{1 + (\mathrm{ctg}\varphi)^2} = C\sin^2\varphi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Для определения координаты *x* воспользуемся соотношением

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\sin 2\varphi d\varphi}{\mathrm{ctg}\varphi} = C(1 - \cos 2\varphi)d\varphi,$$

интегрируя которое, имеем

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_1.$$

Из краевого условия $x = 0$, $y = 0$ следует, что $C_1 = 0$.

Таким образом, кривая, по которой точка спускается за кратчайшее время, является циклоидой, уравнениями которой в параметрическом виде будут:

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi),\; y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Постоянная C находится из условия прохождения траектории через заданную точку вертикальной плоскости $B(x_1, y_1)$ из системы уравнений:

$$x_1 = \frac{C_1}{2}(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1),\; y_1 = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2\varphi_1).$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается принцип Гамильтона-Остроградского?
2. Какова связь между принципом Гамильтона-Остроградского и уравнениями Лагранжа второго рода?
3. Сформулируйте принцип Гамильтона-Остроградского для консервативных систем.
4. Что называется действием по Гамильтону?
5. Укажите область определения функционала принципа Гамильтона-Остроградского для консервативных систем.
6. Сформулируйте задачу о брахистохроне.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов / С.М. Тарг. – 19-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2009. – 416 с.

2. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.М. Лунц, Д.Р. Меркин. Т. 2. : Динамика. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – СПб.: Лань, 2002 . – 768 с.

4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.

5. Хакимуллина Л.Ш. Лекции по теоретической механике. Статика и кинематика: Учеб. пособие / Л.Ш. Хакимуллина. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2011. – 116 с.

6. Хакимуллина Л.Ш. Теоретическая механика: Учеб.-метод. пособие к вып. контр. зад. (с примерами решения). Часть 1 / Л.Ш. Хакимуллина, Е.М. Степанова, Ю.С. Маркин. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2009. – 84 с.

7. Петрушенко Ю.Я. Лабораторный практикум на базе компьютера по теоретической механике. Динамика / Ю.Я. Петрушенко, Л.Ш. Хакимуллина. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2005. – 40 с.

8. Скимель В.Н. Введение в теорию гироскопов: Учеб. пособие / В.Н. Скимель, Л.Ш. Хакимуллина. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та 2001. – 82 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Хакимуллина Лариса Шарифовна

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Динамика

Учебное пособие

Кафедра динамики и прочности машин КГЭУ

Редактор *К.В. Аршинова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*
Дизайн обложки *Ю.Ф. Мухаметшина*

Подписано в печать 23.04.13.
Формат 60×84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 8,07. Уч.-изд. л. 8,96. Тираж 500 экз. Заказ 4614

Редакционно-издательский отдел КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 5