

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Е. УСАЧЁВ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

Казань 2013

УДК 537.8
ББК 22.31
У74

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, старший научный
сотрудник Приволжского федерального университета
им. В.И. Ульянова-Ленина *В.А. Иваньшин*;
доцент Казанского государственного
энергетического университета *О.В. Воркунов*

Усачёв А.Е.

У74 Методы расчета электрических полей: учеб. пособие /
А.Е. Усачёв. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2013. – 111 с.

Дисциплина «Методы расчета электрических полей» относится к циклу естественнонаучных дисциплин и предусматривает более детальное знакомство студентов с методами расчётов электрических полей, чем это проводилось в рамках изучения физики в разделе «Электричество». Курс является одним из базовых при подготовке бакалавров по направлению 140200 «Электроэнергетика» в Казанском государственном энергетическом университете. В рамках данного курса студенты знакомятся с такими аналитическими методами расчета полей как: метод суперпозиции, метод отражения, метод конформных преобразований и др. Рассмотрены численные методы расчета: дифференциальный метод, метод конечных элементов, метод эквивалентных зарядов. Уделяется внимание оценке характеристики поля по его графической картине и нахождению максимально допустимого напряжения сложных электродных систем по коэффициенту неоднородности поля.

Предназначено для студентов КГЭУ всех форм обучения подготовки бакалавров по направлению 140200 «Электроэнергетика».

УДК 537.8
ББК 22.31

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Методы расчета электрических полей» относится к циклу естественнонаучных дисциплин и предусматривает углубленное изучение раздела «Электричество», входящего в курс физики.

Расчеты электрических полей предшествуют созданию любого устройства или изоляционной конструкции в технике высоких напряжений. Многообразие электродных систем порождает множество различных методов расчета напряженности электрических полей между ними, способов их оптимизации и уменьшения габаритов установок без снижения электрической прочности. Понимание природы электрических полей необходимо для усвоения различных разделов техники высоких напряжений, таких как электрофизические процессы в газах, жидких и твердых диэлектриках, изоляция и перенапряжения и других.

В первой главе рассмотрены основные свойства электростатических полей, их характеристики и взаимозависимости. Приводятся правила графического изображения полей и основы теории симметрии.

Во второй главе рассмотрены различные аналитические методы расчета электростатических полей. Приводится вывод формул для вычисления параметров поля от простейших электродных систем – точечного, линейного и кольцевого заряда. На примере некоторых электродных систем рассмотрен метод конформных отображений.

В третьей главе приведены некоторые численные методы расчета параметров электрических полей: дифференциальный метод, метод эквивалентных зарядов, метод конечных элементов и метод оценки максимального напряжения электродной системы.

Глава 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Существует несколько определений самого термина поля [1, 8–14].

Поле (физическое) – это первичная физическая реальность, одна из форм существования материи, способ передачи взаимодействия между различными телами. На данный момент известно два типа физических взаимодействий – гравитационное и электромагнитное. Два других типа взаимодействий, слабое и сильное ядерные взаимодействия, в настоящее время объединены с электромагнитным взаимодействием. Продолжаются работы теоретиков по объединению гравитационного и электромагнитного типа взаимодействий.

Поле (математическое) – пространство, в котором каждой точке сопоставлено значение некоторой физической величины (скалярной, векторной). Соответствующие поля называются скалярными или векторными. Примеры скалярных полей: поле температур (в прогнозе погоды), поле распределения масс (плотность). Примеры векторных полей: поле скоростей движения частиц в потоке жидкости или газа.

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля. Оно создается неподвижными электрическими зарядами и у него отсутствует магнитная составляющая. Электростатическое поле является полем векторным. Каждой точке пространства сопоставлен вектор электрического поля, который называется **напряженностью электрического поля**. Этот вектор обозначается символом E и имеет размерность вольт/метр. Далее мы будем иметь дело с трехмерным пространством, и рассматривать векторы в этом пространстве. Четвертую координату – время – здесь учитывать не будем, поскольку предмет курса – электростатические поля, т.е. постоянные во времени поля.

§ 1.1. Системы координат и элементы векторного исчисления

Выражение любого вектора A можно записать в форме

$$A = A \cdot \mathbf{1}_A, \quad (1.1)$$

где A – числовая величина вектора (скаляр), которую называют длиной вектора, $\cdot \mathbf{1}_A$ – единичный вектор (орт), направленный так же, как и вектор A , называемый направлением вектора A . Для однозначного задания направления любого вектора в трехмерном пространстве необходимы три независимые координаты. Существует множество различных систем координат. Мы будем далее применять три ортогональные системы координат: декартову систему координат (ДСК), цилиндрическую систему

координат (ЦСК) и сферическую систему координат (ССК), показанных на рис. 1.1.

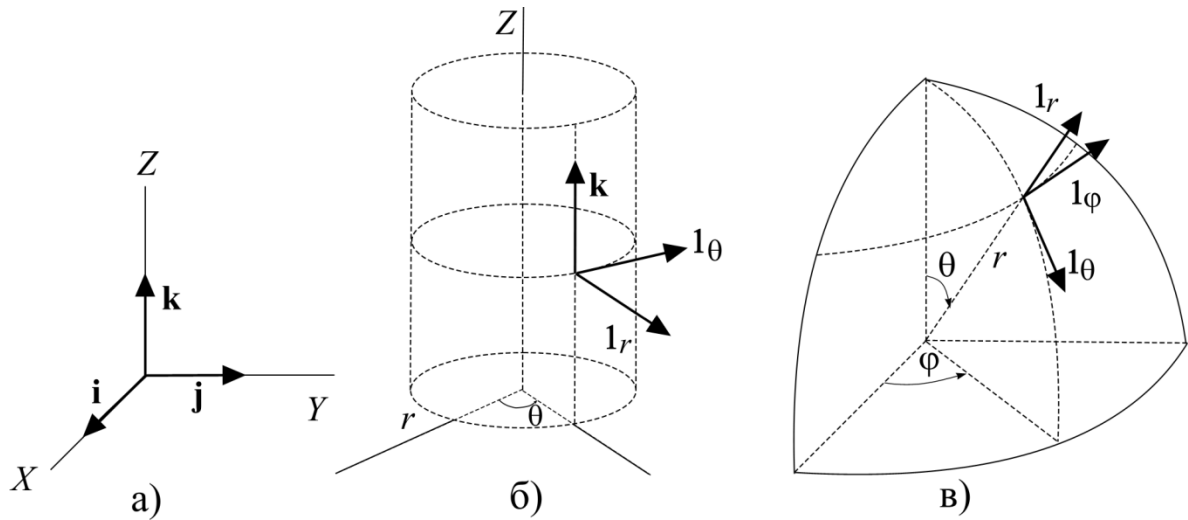


Рис. 1.1. Системы координат и их единичные векторы (орты):
а)-декартова, б)-цилиндрическая, в)-сферическая

Длина и направление любого вектора A могут быть выражены с помощью проекций этого вектора на оси координат A_x , A_y и A_z (A_r , A_θ , A_z или A_r , A_θ , A_φ). Эти проекции являются скалярными величинами. Вектор A можно рассматривать как сумму трех векторов, один из которых имеет длину A_x (A_r), направлен по оси X (r) и называется радиальным вектором в ЦСК и ССК. Другой имеет длину A_y (A_θ), направлен по оси Y (θ) и называется касательным вектором в ЦСК и меридианным вектором в ССК. Третий имеет длину A_z (A_φ), направлен по оси Z (φ) и называется осевым вектором в ЦСК и долготным вектором в ССК.

Математическая запись произвольного вектора в этих системах координат имеет вид[17]:

$$\begin{aligned} A &= A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} + A_z \cdot \mathbf{k}; \\ A &= A_r \cdot \mathbf{1}_r + A_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta + A_z \cdot \mathbf{k}; \\ A &= A_r \cdot \mathbf{1}_r + A_\theta \cdot \mathbf{1}_\theta + A_\varphi \cdot \mathbf{1}_\varphi; \\ \mathbf{1}_r &= \mathbf{r}/r. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Правила скалярного произведения в декартовой системе координат имеют вид:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{1.3}$$

Правила векторного произведения в ДСК имеют вид:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}; \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k}; \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}; \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i}; \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j}; \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j}; \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.4)$$

В ЦСК и ССК правила скалярного и векторного произведений получаются из уравнений (1.3) и (1.4) заменой орта \mathbf{i} на единичный вектор 1_r , орта \mathbf{j} на 1_θ и орта \mathbf{k} на 1_φ (обозначения приведенными на рис. 1.1). Единичные векторы (орты) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($1_r, 1_\theta, \mathbf{k}; 1_r, 1_\theta, 1_\varphi$) образуют правую тройку векторов. Если смотреть из начала координат, то переход между концами векторов правой тройки осуществляется по часовой стрелке.

§ 1.2. Потенциал электростатического поля

Определенные виды векторных полей (но отнюдь не все поля) характеризуются наличием так называемого скалярного потенциала (прилагательное скалярный часто опускают). Если в каждой точке векторного поля определена скалярная переменная, то такое векторное поле называется **потенциальным**. Высота точки на местности определяет скалярный потенциал поля сил земного тяготения (гравитационного поля). Электрическое поле характеризуется наличием скалярного электрического потенциала в каждой точке пространства. Потенциал является энергетической характеристикой электрического поля и определяется работой, которую необходимо совершить против сил поля для того, чтобы переместить положительный единичный заряд из точки, где потенциал принят равным 0, в данную точку. Поля такого рода (потенциальные) называют также **безвихревыми** полями.

В безвихревом поле можно найти множество точек, скалярные потенциалы которых одинаковы. Такие точки расположены на какой-то, в общем случае криволинейной, поверхности, называемой **эквипотенциальной поверхностью** (поверхностью уровня). Любая линия, проведенная на эквипотенциальной поверхности, называется **эквипотенциальной линией** (линией уровня). При графическом изображении электростатического поля с помощью эквипотенциальных линий придерживаются следующего правила: разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными линиями выбирается постоянной. Такое изображение поля дает наглядное представление о характере распределения потенциала и скорости его изменения: дальше эквипотенциальные линии расположены друг от друга – меньше скорость изменения потенциала ($\text{grad}\phi$, напряженность) и наоборот.

§ 1.3. Градиент и другие характеристики электростатического поля

Вектор, показывающий наибольшую скорость пространственного изменения потенциала ϕ в данной точке, называется **градиентом потенциала** и обозначается либо символом $\text{grad}\phi$, либо (более кратко) $\nabla\phi$ (набла). Слово градиент происходит от латинского слова *gradientis* (шагающий) и введено Максвеллом в 1873 г. Градиент потенциала – это силовая характеристика электростатического поля, которая является векторной величиной. Как и любой вектор, его можно разложить на составляющие по координатным направлениям, каждая из которых равна скорости изменения величины потенциала в соответствующем направлении. Вид градиента в различных системах координат приведен в (1.5).

$$\text{В ДСК } \text{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \mathbf{k};$$

$$\text{В ЦСК } \text{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \cdot \mathbf{1}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot \mathbf{k}; \quad (1.5)$$

$$\text{В ССК } \text{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \cdot \mathbf{1}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \cdot \mathbf{1}_\varphi.$$

Из уравнений (1.5) следует, что вычисление градиента является операцией дифференцирования скалярной величины потенциала по координатам. Для обозначения этой операции можно применить краткий символ ∇ , приписываемый перед символом той величины, от которой берут градиент. Символ ∇ называют **дифференциальным оператором** набла (оператор Гамильтона). Вектор градиента $\nabla\phi$ ($\text{grad}\phi$) можно рассматривать как произведение формального вектора ∇ на скалярную величину потенциала ϕ .

$$\text{ДСК } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{k};$$

$$\text{ЦСК } \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \mathbf{1}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{k}; \quad (1.6)$$

$$\text{ССК } \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathbf{1}_r + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \mathbf{1}_\theta + \left(\frac{1}{r \cdot \sin\theta}\right) \frac{\partial}{\partial\varphi} \cdot \mathbf{1}_\varphi.$$

Величина градиента потенциала тем больше, чем ближе расположены друг к другу эквипотенциальные поверхности (или линии), соответствующие значениям потенциала, отличающимся на одну и ту же величину. Направление градиента потенциала всегда нормально (перпендикулярно) к эквипотенциальной поверхности (или линии), проходящей через данную точку. Градиент потенциала электростатического поля равен пределу отношения силы, с которой поле действует на отрицательный пробный заряд,

к величине этого заряда при неограниченном уменьшении величины последнего (чтобы искажением поля, вносимым присутствием пробного заряда, можно было пренебречь). Если бы пробный заряд не обладал инерцией, то его движение под действием сил поля происходило бы по некоторой линии, называемой **линией поля** или **силовой** (векторной) **линией**. Градиент потенциала в любой точке направлен по касательной к линии поля. Величина градиента потенциала электрического поля, взятая с обратным знаком, называется **напряженностью электрического поля** (E). Она равна пределу отношения силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, к величине этого заряда при неограниченном уменьшении величины последнего. Знак минус между напряженностью и градиентом потенциала возникает из того, что в качестве пробных зарядов берутся заряды разных знаков.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\text{grad}\phi \equiv -\nabla\phi &= -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}; \quad (1.7) \\ E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x}; & E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y}; & E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Кроме потенциала и напряженности (градиента потенциала) для характеристики любого векторного поля вводится ряд других понятий:

1. Векторная линия (силовая линия, линия поля, линия тока).
2. Векторная трубка.
3. Поток векторного поля.
4. Циркуляция векторного поля.
5. Дивергенция векторного поля.
6. Вихрь векторного поля.

Векторная линия – линия, касательная к которой в каждой точке поля совпадает с направлением вектора поля. Из такого определения векторной линии следует, что в любой ее точке векторное произведение касательной к векторной линии и вектора поля равно нулю, т.е. дифференциальное уравнение векторной линии имеет вид:

$$\frac{\partial x}{a_x} = \frac{\partial y}{a_y} = \frac{\partial z}{a_z}, \quad (1.8)$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора поля; x, y, z – координаты точки векторной линии. Если векторное поле – поле скоростей частиц стационарного потока жидкости, то векторная линия – траектория частиц жидкости. При графическом изображении электростатического поля с помощью векторных линий (силовых линий) придерживаются следующего правила: число силовых линий поля, проходящихся на единицу площади, должно быть пропорционально напряженности электрического поля. Такое изображение

поля дает наглядное представление о характере распределения напряженности: там, где линии расположены гуще – напряженность выше, а там, где линии расположены более редко – напряженность меньше.

Векторная трубка – это совокупность всех векторных линий векторного поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую. Можно дать и другое определение векторной трубки как части пространства, состоящей из векторных линий. На рис. 1.2а показана некоторая векторная трубка. Хотя площади сечений S_1 и S_2 не равны между собой, число силовых линий, проходящее через эти поверхности одинаково. Если пронумеровать все силовые линии, проходящие через поверхность S_1 , то окажется, что через любое сечение силовой трубки проходят все эти линии и никаких других. Число силовых линий в трубке постоянно. Площадь может быть по-разному ориентирована в пространстве, т.е. является векторной величиной. Направление вектора площади совпадает с нормалью к элементу площади (рис. 2б).

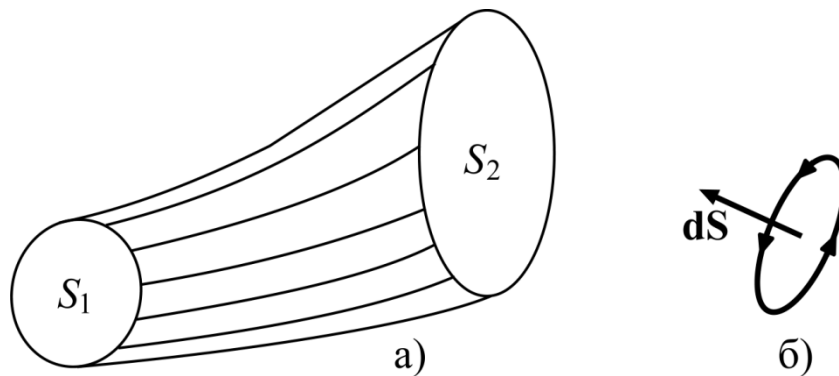


Рис. 1.2. Векторная трубка (а) и элементарный вектор площади (б)

Поток векторного поля. Элементарным потоком вектора называется скалярное произведение вектора на элемент поверхности. Произведение $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot dS \cdot \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{S})$ – называется элементарным потоком электростатического поля ($d\Phi$). Поток Φ вектора \mathbf{E} через поверхность S называется сумма (интеграл) элементарных потоков через элементы поверхности dS . Если поверхность является замкнутой и ограничивает какой-либо выделенный элемент объема, то это обозначается кружком на знаке интеграла:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (1.9)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к элементу поверхности dS . Для поля скоростей частиц жидкости поток равен количеству жидкости,

протекающей за единицу времени через поверхность S . Поток по определению является скалярной величиной. Вычисление потока может производиться также через какую угодно замкнутую поверхность. Если густоту линий поля выбрать так, чтобы она соответствовала числовому значению вектора поля, то поток вектора можно условно представить количеством линий поля, пронизывающих рассматриваемую поверхность.

Циркуляцией (от латинского *circulatio* – вращение) векторного поля $E(r)$ вдоль некоторой кривой L называется интеграл вида

$$\int_L E \cdot dr. \quad (1.10)$$

Циркуляция поля вдоль кривой L равна работе, совершаемой силами векторного поля $E(r)$ при перемещении пробного тела (единичной массы, единичного заряда и т.д.) вдоль этой кривой L . По определению циркуляция является скалярной характеристикой поля.

§ 1.4. Дивергенция векторного поля

Полный поток вектора через замкнутую поверхность, ограничивающую малый объем, может быть равен нулю или же отличаться от нуля. В первом случае говорят, что в объеме не содержится источника (стока), в котором линия поля могла бы начинаться (заканчиваться), во втором – содержаться. Суммарное количество источников и стоков, находящихся внутри замкнутой поверхности, определяет количество линий поля, выходящих (входящих) из объема, ограниченного этой поверхностью. Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах, которые можно считать истоками, и заканчиваются на отрицательных, которые можно считать стоками электрического поля. Определив полный поток вектора через замкнутую поверхность, можно определить суммарное количество истоков и стоков поля, т.е. заряд, содержащийся в объеме, ограниченном данной поверхностью. Для характеристики поля принято определять количество истоков (стоков) линий поля в каждой точке (в предельно малом объеме) пространства поля. Эта характеристика называется **дивергенцией**. Дивергенция (расходимость) вектора равна пределу, к которому стремится отношение полного потока вектора через замкнутую поверхность к величине объема, ограниченного этой поверхностью, при бесконечном уменьшении последнего.

$$\operatorname{div} E = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S E \cdot dS}{\Delta V}. \quad (1.11)$$

Дивергенция является скалярной величиной; она положительна, если линия поля начинается в малом объеме, или отрицательна, если линия поля в этом объеме заканчивается.

Для того чтобы получить явный вид дивергенции вектора \mathbf{E} , следует выделить какой-либо элементарный объем, определить полный поток через его поверхность и найти отношение полного потока к величине объема. Найдем выражение дивергенции в декартовых координатах.

Рассмотрим элементарный объем в виде параллелепипеда с рёбрами dx , dy , dz (рис. 1.3).

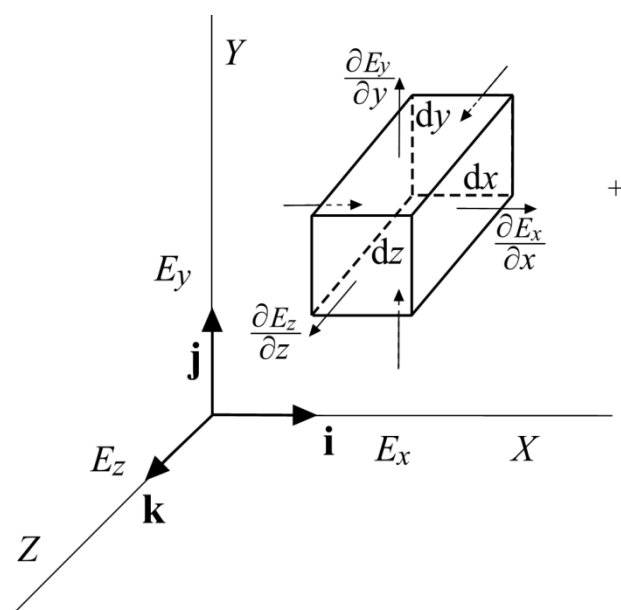


Рис. 1.3. Элементарный прямоугольный параллелепипед в неоднородном электрическом поле

Разложим вектор напряженности \mathbf{E} на составляющие по осям координат E_x , E_y , E_z . Выберем такой малый объем пространства, что вектор \mathbf{E} можно считать непрерывным, т.е. его составляющие непрерывно изменяются вдоль соответствующих координат. Площадь левой стенки параллелепипеда равна $S_{x1} = dy \cdot dz$ по построению, следовательно, поток, входящий через левую стенку, будет равен $\Phi_{x1} = E_{x1} \cdot S_{x1} = E_{x1} \cdot dy \cdot dz$. Скорость изменения напряженности вдоль оси равна соответствующей частной производной. Например, если составляющая вектора \mathbf{E} у левой стенки параллелепипеда равна E_{x1} , то при передвижении вдоль оси X (орт \mathbf{i}) на длину ребра параллелепипеда dx она изменится на величину

$\frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx$, где $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ – скорость изменения компоненты E_x вдоль оси x .

Площади стенок равны по построению $S_{x1} = S_{x2}$. Поток вектора, выходящий из рассматриваемого параллелепипеда через правую стенку, будет равен

$$\Phi_{x2} = E_{x2} \cdot S_{x1} = (E_{x1} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz.$$

Приращение потока, пронизывающего параллелепипед по оси x :

$$d\Phi_x = \Phi_{x2} - \Phi_{x1} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (1.12)$$

Рассматривая попарно таким же образом верхнюю и нижнюю стенки, а также переднюю и заднюю стенки параллелепипеда, можно получить аналогичные выражения для приращений потока по осям y и z :

$$d\Phi_y = \Phi_{y2} - \Phi_{y1} = \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz \quad (1.13)$$

$$d\Phi_z = \Phi_{z2} - \Phi_{z1} = \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \quad (1.14)$$

Складывая выражения (1.12), (1.13) и (1.14) и деля сумму на объем параллелепипеда $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, получаем выражение дивергенции в декартовых прямоугольных координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Для получения явного вида дивергенции в цилиндрической и сферической системах координат элемент малого объема следует выбирать следующим образом: $dV_{\text{ЦСК}} = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot dz$ и $dV_{\text{ССК}} = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot r \sin\varphi \cdot d\varphi$.

$$\text{ЦСК } \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_r) + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad (1.16)$$

$$\text{ССК } \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot E_r) + \frac{1}{r \cdot \sin\varphi} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cdot E_\theta) + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right\}. \quad (1.17)$$

Правая часть выражений (1.15–1.17) может формально рассматриваться как скалярное произведение векторного оператора набла ∇ (1.6) и вектора \mathbf{E} , т.е. $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$.

Наличие дивергенции вектора всегда связано с наличием в данной точке источника или стока линий поля. В электрическом поле источниками являются положительные заряды, стоками – отрицательные. Следовательно, дивергенция вектора напряженности электростатического поля $\nabla \cdot \mathbf{E}$ имеет

отличное от нуля значение в пунктах расположения зарядов. В других местах электростатического поля, не содержащих зарядов, дивергенция отсутствует. В этом состоит ясный физический смысл дивергенции поля: дивергенция поля пропорциональна плотности зарядов. В магнитном поле дивергенция вектора магнитной индукции всегда равна нулю, т.к. магнитных зарядов в изолированном виде в природе нет.

§ 1.5 Вихрь (ротор) векторного поля

Выделим в векторном поле произвольный замкнутый контур. Определим составляющую этого поля вдоль контура и проинтегрируем. Этот интеграл называется, как указывалось выше, циркуляцией поля по замкнутому контуру. В силовых полях он равен работе сил поля по произвольному замкнутому контуру. Работа сил поля по замкнутому контуру может либо равняться нулю, либо не равняться нулю. Например, без учета сил трения работа по произвольному замкнутому контуру в гравитационном поле равна нулю. В другом примере, при движении воды в водовороте работа по контуру водоворота не равна нулю. Попробуйте представить, что вы плывете в водовороте против течения, и вам станет ясно, что работа эта не будет равна нулю. Для характеристики векторного поля по отношению к работе, совершаемой по замкнутому контуру, вводится понятие вихрь или ротор. Ротор определяется как предел отношения работы сил поля (циркуляция вектора поля) по замкнутому контуру к площади, ограниченной этим контуром, когда последняя стремится к нулю:

$$\text{rot}\mathbf{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S}. \quad (1.18)$$

Наглядно представить ротор можно следующим образом: пусть мы имеем поле скоростей течения воды, в котором заморозим мысленно всю воду, за исключением некоторой замкнутой трубки. Можно сказать, что ротор пропорционален скорости движения воды в этой трубке. Если вода не движется, то ротор равен нулю. Если вода движется, то ротор не равен нулю, а в этом месте образуется вихрь. Поля, в которых ротор не равен нулю, называются **селеноидальными** или **вихревыми** полями. Если дивергенция поля $\text{div}\mathbf{E}$ может быть представлена как скалярное произведение оператора набла ∇ на вектор напряженности поля \mathbf{E} , то ротор представляет собой векторную характеристику и равен векторному произведению оператора набла ∇ на вектор напряженности поля \mathbf{E} :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.19)$$

В выражении (1.19) приведен вид ротора в декартовой системе координат.

В цилиндрической системе координат ротор имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{1}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & r \cdot E_\theta & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.20)$$

В сферической системе координат ротор имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{1}_\theta & \mathbf{1}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & r \cdot E_\theta & r \cdot E_\varphi \cdot \sin\theta \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

§ 1.6. Вектор электрического смещения (электрической индукции)

Пусть на некоторую поверхность S помещен заряд Q . Выделим элемент этой поверхности dS с зарядом на нем dQ . **Электрическим смещением D** называется предел отношения заряда dQ , находящегося на элементе поверхности, к его площади dS , когда площадь стремится к нулю:

$$D = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \sigma. \quad (1.22)$$

С другой стороны, этот предел отношения заряда к площади поверхности, на которую он помещен, называется **поверхностной плотностью заряда**. Смещение является векторной величиной, поскольку в определении смещения заряд Q является скалярной величиной, а элемент поверхности dS – вектор. Вектор смещения перпендикулярен (направлен вдоль нормали) элементу поверхности, т.е. совпадает с направлением вектора площади. Связь между вектором электрического смещения \mathbf{D} и вектором напряженности электрического поля задается выражением:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.23)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\oint \rho \cdot dV}{\oint E \cdot dS} = \frac{10^{-9}}{36\pi} (\text{Ф/м}) = 8,854187817 \cdot 10^{-12} (\text{Ф/м}), \quad (1.24)$$

где ε_0 – электрическая постоянная (абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума). Она измеряется в фарадах/метр (Ф/м) и равна отношению суммарного электрического заряда, заключенного в некотором объеме в вакууме, к потоку вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз напряженность поля в среде меньше напряженности поля в вакууме.

§ 1.7. Условия существования потенциальных и вихревых полей

В предыдущих параграфах рассматривались 3 варианта единичного действия оператора набла:

1. $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi$ – произведение ∇ на скаляр φ даёт вектор;
2. $\text{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ – скалярное произведение ∇ на вектор \mathbf{E} даёт скаляр;
3. $\text{rot}\mathbf{E} = [\nabla \cdot \mathbf{E}]$ – векторное произведение ∇ на вектор \mathbf{E} даёт вектор.

Формально эти результаты однократного действия оператора набла на скаляр φ и вектор \mathbf{E} можно рассматривать как новые скаляр ($\text{div}\mathbf{E}$) и два вектора ($\text{grad}\varphi$ и $\text{rot}\mathbf{E}$). Повторное применение оператора набла к ним даёт следующие 5 величин:

$$4. \nabla \cdot \nabla\varphi \equiv \text{div}(\text{grad}\varphi) \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi; \quad (1.25)$$

$$5. [\nabla \cdot \nabla\varphi] \equiv \nabla \times \nabla\varphi \equiv \text{rot}(\text{grad}\varphi) \equiv [\nabla \cdot \nabla]\varphi \equiv 0; \quad (1.26)$$

$$6. \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}); \quad (1.27)$$

$$7. \nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{E}] \equiv \text{div}(\text{rot}\mathbf{E}) \equiv [\nabla \cdot \nabla] \cdot \mathbf{E} \equiv 0; \quad (1.27)$$

$$8. [\nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{E}]] \equiv \text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) \quad (1.28)$$

Четвертое выражение (1.25) представляет собой скалярный оператор Лапласа (лапласиан). Он равен нулю в областях поля, где зарядов нет (уравнение Лапласа) и пропорционален плотности заряда в областях с зарядом (уравнение Пуассона). Его явный вид в различных системах координат можно непосредственно получить при использовании выражений (1.2), (1.3) и (1.6) в соответствующих координатах. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах лапласиан имеет вид:

$$\text{ДСК } \Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot k \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$$\text{ЦСК } \Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \quad (1.30)$$

$$\text{ССК } \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \sin\theta \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \right\}.$$

Выражение (1.26) тождественно равно нулю: здесь используется известное правило векторного умножения – векторное произведение коллинеарных (параллельных) векторов равно нулю. Очевидно, что любой вектор коллинеарен (параллелен) самому себе. Из (1.26) следует, что если некоторая векторная величина \mathbf{A} не имеет ротора ($\text{rot } \mathbf{A} = 0$), то это означает, что она является градиентом некоторого скаляра, обычно называемого **скалярным потенциалом** векторного поля \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \text{grad}b$). Отсутствие ротора означает, что силовые линии поля не образуют вихрей, т.е. не замкнуты. Каждая силовая линия начинается от некоторого «источника» и заканчивается на некотором «стоке». В местах расположения «источников» и «стоков» дивергенция вектора \mathbf{A} не равна нулю. Это является вторым условием существования потенциального поля.

Характерные признаки потенциального поля:

- a. $\text{rot}\mathbf{A} \equiv 0$ – ротор равен нулю во всех точках поля;
- b. $\text{div}\mathbf{A} \neq 0$ – дивергенция не равна нулю, хотя бы в некоторых точках поля;
- c. $\mathbf{A} = \text{grad}b$ – в любой точке поля определен скалярный потенциал.

Выражение (1.27) тождественно равно нулю в силу тех же причин, что и (1.26). Наличие дивергенции означает наличие источников поля, а наличие ротора, означает замкнутость силовых линий, т.е. отсутствие источников. Одновременно в одной точке пространства два эти условия выполняться не могут. Отсутствие дивергенции является первым необходимым признаком существования вихревого (селеноидального) поля. Отсутствие дивергенции в любой точке поля означает, что нигде нет источников или стоков поля, т.е. силовые линии нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Это означает, что силовые линии замкнуты, т.е. образуют вихри, а $\text{rot}\mathbf{A} \neq 0$ по крайней мере в некоторых точках поля. В свою очередь, это означает, что вектор \mathbf{A} не может быть представлен как градиент скалярной величины, т.е. скалярный потенциал отсутствует. Последнее (третье) условие становится более понятным, если вспомнить, что в потенциальном поле работа по замкнутому контуру равна нулю. Если такая работа не равна нулю, то и понятие потенциала теряет смысл. Поля,

в которых выполняются три вышеперечисленных условия, называются **вихревыми** или **селеноидальными**.

Условия существования вихревого поля:

- a. $\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0$ – дивергенция равна нулю в любой точке поля;
- b. $\mathbf{B} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}$ – ротор не равен нулю хотя бы в некоторых точках поля;
- c. отсутствует скалярный потенциал.

Кроме скалярного лапласиана, определенного в (1.25), можно определить также векторный лапласиан, как оператор Лапласа, примененный к вектору, например, к вектору \mathbf{A} . Векторный лапласиан имеет вид:

$$\Delta \mathbf{A} \equiv \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{i} + \nabla^2 A_y \mathbf{j} + \nabla^2 A_z \mathbf{k}. \quad (1.31)$$

Из определения векторного лапласиана (1.31) можно заключить, что он является геометрической суммой трех скалярных проекций вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси координат. С другой стороны, из правил векторной алгебры известно, что для произведения трех любых векторов можно записать:

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - [\mathbf{C} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{A}]].$$

Если здесь принять, что $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \nabla$, то получим:

$$\Delta \mathbf{A} \equiv \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}). \quad (1.32)$$

Кроме определенных выше потенциальных и вихревых полей существуют поля, у которых во всех точках ограниченного пространства поля и дивергенция и ротор равны нулю. Такое поле обладает как скалярным, так и векторным потенциалом. Примером такого поля может служить магнитное поле снаружи проводника с током.

§ 1.8. Теорема Остроградского – Гаусса

Общая формулировка теоремы Остроградского – Гаусса гласит: «Интеграл от дивергенции вектора, взятый по объему, равен интегралу самого вектора, взятому по замкнутой поверхности, окружающей этот объем». Согласно определению (1.11) дивергенция электрического смещения

$$\nabla D = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta V}.$$

Рассмотрим два бесконечно малых объема dV_1 и dV_2 , имеющих общую стенку и находящихся в некотором макроскопическом объеме V , ограниченном некоторой поверхностью S . Для каждого из них в отдельности, применив определение дивергенции (1.11), можно записать элементарные потоки через замкнутые поверхности dS_1 и dS_2 :

$$\nabla D \cdot \Delta V_1 = \oint_{S_1} D \cdot dS; \quad \nabla D \cdot \Delta V_2 = \oint_{S_2} D \cdot dS \quad (1.33)$$

Два элементарных объема имеют общую стенку с площадью $S_{\text{общ}}$ (показано штриховкой на рис. 1.4).

Величина (абсолютное значение) потока вектора D из левого объема dV_1 через $S_{\text{общ}}$ по определению (1.22) равна поверхностному заряду на этой общей поверхности $S_{\text{общ}}$. Поскольку эта поверхность общая и заряд на ней один и тот же, то величина потока D из правого объема dV_2 через $S_{\text{общ}}$ равна величине потока из левого объема dV_1 . Поскольку направления этих двух потоков противоположны, то их сумма равна разности величин потоков, т.е. равна нулю. Тогда выражение для общего потока из объемов dV_1 и dV_2 можно получить суммированием записей (1.33):

$$\nabla D \cdot \Delta V_1 + \Delta V_2 \stackrel{\approx}{=} \oint_{S_1+S_2} D \cdot dS. \quad (1.34)$$

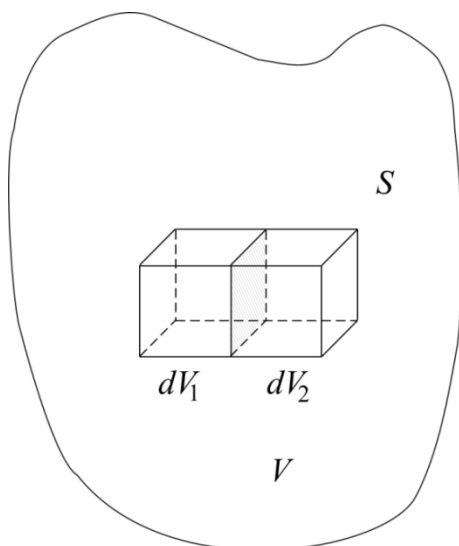


Рис.1.4. К теореме
Остроградского - Гаусса

Из выражения (1.34) следует, что поток вектора D из общего объема dV_1 и dV_2 равен сумме произведений дивергенции D на элементарные объемы. Весь макроскопический объем V можно разбить на элементарные объемы и провести подобное суммирование. Все потоки через внутренние общие поверхности при суммировании дадут нули, и останется только поток через внешнюю поверхность S . Левые части выражений, подобных (1.34) являются фактически интегралом от дивергенции, взятым по всему объему поля V .

Окончательно получаем:

$$\int_V \text{div} D \cdot dV = \oint_S D \cdot dS. \quad (1.35)$$

Выражение (1.35) представляет собой математическую запись теоремы Остроградского – Гаусса. В случае если рассматриваемым вектором является вектор электрического смещения, левая часть в (1.35) равна сумме зарядов, ограниченных поверхностью S . Для вектора D можно сформулировать рассматриваемую теорему следующим образом: «Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности». Как будет показано в следующем разделе, при нахождении параметров электрических полей в

ряде случаев очень удобным методом решения является метод, основанный на использовании теоремы Остроградского – Гаусса.

§ 1.9. Формулы Грина и теорема о единственности

Если произвольный вектор D не испытывает скачков в пределах некоторого объема V , то его можно представить в виде:

$$D = \psi \cdot \text{grad}(\varphi) = \psi \cdot \nabla \varphi,$$

где ψ и φ – некие скаляры, также непрерывные в объеме V . Для дивергенции вектора D , используя формулы дифференцирования, можно записать:

$$\text{div} D = \nabla D = \nabla (\psi \cdot \nabla \varphi) = \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla^2 \varphi.$$

Применяя к вектору D теорему Остроградского – Гаусса заметим, что элементарный поток вектора D через любой малый элемент поверхности S , ограничивающей выбранный объем V , равен:

$$D \cdot dS = (\psi \cdot \nabla \varphi)_n \cdot dS = \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dS,$$

где $(\nabla \varphi)_n$ – проекция градиента скаляра φ на направление нормали к элементу поверхности dS . Подставим два полученных выражения в (1.35):

$$\int_S \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dS = \int_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla^2 \varphi) \cdot dV. \quad (1.36)$$

Выражение (1.36) называется **теоремой Грина**. Положим в (1.36) $\psi = \varphi$. В областях поля, где отсутствуют заряды и удовлетворяется уравнение Лапласа: $\text{div} D = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$, выражение (1.36) приобретает вид:

$$\int_S \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dS = \int_V (\nabla \varphi)^2 \cdot dV. \quad (1.37)$$

Выражение (1.37) известно как **первая формула Грина**.

Запишем выражение, аналогичное (1.36), но поменяем местами φ и ψ .

$$\int_S \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot dS = \int_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \cdot \nabla^2 \psi) \cdot dV. \quad (1.38)$$

Вычитая (1.38) из (1.36), получим выражение:

$$\int_S \left(\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS = \int_V (\psi \cdot \nabla^2 \varphi - \varphi \cdot \nabla^2 \psi) \cdot dV, \quad (1.39)$$

которое называют **второй формулой Грина**. Эти формулы важны при расчетах электростатических полей.

Следствие I. Из второй формулы Грина может быть получена теорема о единственности: «Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее заданным граничным условиям, является единственным». Из теоремы о единственности следует, что для получения решения уравнения Лапласа

можно применять любые способы, какими бы они ни казались на первый взгляд странными, лишь бы полученное решение удовлетворяло граничным условиям. Это решение и будет правильным и единственно верным. Доказательство теоремы проводится методом «от противного». Предположим, что существуют две различные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям и являющиеся решениями уравнения Лапласа: $\Delta\varphi \equiv \nabla^2\varphi = 0$ и $\Delta\psi \equiv \nabla^2\psi = 0$. Тогда правая часть второй формулы Грина (1.39) обращается в нуль при любой форме и объеме поля V , следовательно, при любой форме ограничивающей поверхности S . Тогда подынтегральное выражение в левой части должно равняться нулю, что возможно только при условии $\psi \equiv \varphi$, т.е. теорема доказана.

Следствие II. Вторым важным следствием из формул Грина и теоремы о единственности является возможность замены эквипотенциальной поверхности бесконечно тонким проводящим листом. Поскольку мы рассматриваем электростатические поля, то на проводящей поверхности не может быть движущихся зарядов, т.е. не может быть разности потенциалов. В свою очередь это означает, что равна нулю составляющая напряженности поля вдоль поверхности (тангенциальная составляющая), т.е. силовые линии нормальны (перпендикулярны) проводящей поверхности. Получается, что замена любой эквипотенциальной поверхности тонким металлическим листом не нарушает картины электростатического поля и не влияет на величину потенциала и напряженности в любой точке поля. Развитием этой идеи служит замена массивного электрода со сложным распределением поверхностной плотности зарядов на тонкую проводящую поверхность, совпадающую с границей электрода. Если эта тонкая поверхность совпадает с эквипотенциальной поверхностью какого-то распределения точечных зарядов (одного или нескольких) внутри этой поверхности, то при расчетах можно заменить поле, создаваемое массивным электродом, на поле, создаваемое этими несколькими фиктивными точечными зарядами, что существенно упрощает расчеты.

Следствие III. Из первой формулы Грина (1.37) следует, что характер поля полностью определяется значениями потенциала и его производной (по нормали) на граничной поверхности. Из этого вытекает метод расчета электростатических полей, называемый «метод изображений». Суть этого метода состоит в том, что если производится расчет характеристик поля с какой-либо одной стороны эквипотенциальной поверхности, то совершенно неважно, как реально выглядит поле с другой стороны этой поверхности. На этой другой стороне поверхности (например, под землей

или внутри металла) можно проводить различные замены: проводник допускается заменять диэлектриком или наоборот, диэлектрик другим диэлектриком и т.п., лишь бы не изменить значение потенциала и его производных на граничной поверхности. Примеры этого метода приведены в следующей главе.

1.10. Электрическое поле на границе раздела двух диэлектриков

На границе раздела двух диэлектриков с различными величинами диэлектрической проницаемости ε_1 и ε_2 выполняются следующие граничные условия:

1) тангенциальные (касательные к поверхности раздела) компоненты вектора напряженности равны между собой $E_{1t} = E_{2t}$;

2) нормальные (перпендикулярные к поверхности раздела) компоненты вектора электрического смещения равны между собой $D_{1n} = D_{2n}$.

Докажем первое утверждение. Поскольку рассматриваемое поле является электростатическим, то циркуляция вектора E равна нулю (см. § 1.5). Это значит, что интеграл $\oint E dl$ по замкнутому контуру $abcd$ (рис. 1.5а) будет равен нулю. На участках ad и bc вектора E и dl выбраны взаимно перпендикулярными при построении контура $abcd$, т.е. их скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла, будет равно нулю. Если выбрать такое направление обхода контура: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$, то на участке ab направления векторов E_{1t} и dl совпадают, а на участке cd вектора E_{2t} и dl противоположны. Учитывая это, получаем:

$$\oint E dl = \int_a^b E_{1t} \cdot dl - \int_c^d E_{2t} \cdot dl = 0.$$

Поскольку длины участков ab и cd одинаковы по построению контура $abcd$, то следует:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (1.40)$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве второго утверждения будем использовать рис. 1.5б. Если на поверхности раздела нет свободных зарядов, то их нет и в объеме прямоугольного параллелепипеда с бесконечно малой высотой, приведенного на рис. 1.5б.

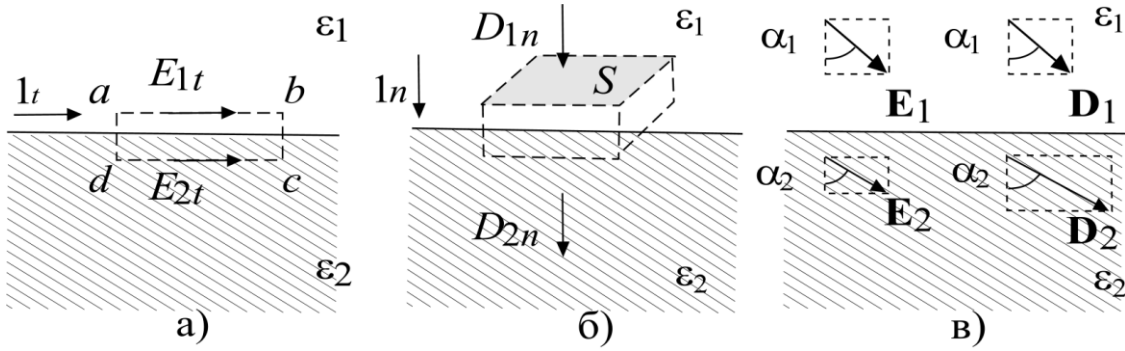


Рис.1.5. Граничные условия для электростатического поля

Площадь верхней грани параллелепипеда (S_1) равна площади нижней грани (S_2) и обозначена символом S . Найдём поток нормальной составляющей вектора \mathbf{D} (\mathbf{D}_n) из объёма параллелепипеда. Поток вектора \mathbf{D}_n через каждую из четырёх боковых поверхностей параллелепипеда равен нулю (см. § 1.3). Поток вектора \mathbf{D}_n через верхнюю грань $\Phi_1 = \mathbf{D}_{1n} \cdot \mathbf{S}_1$ должен быть взят со знаком минус, поскольку направления векторов \mathbf{D}_{1n} и \mathbf{S}_1 противоположны (поток входящий). Поток через нижнюю грань $\Phi_2 = \mathbf{D}_{2n} \cdot \mathbf{S}_2$ берётся со знаком плюс, поскольку направления векторов \mathbf{D}_{2n} и \mathbf{S}_2 совпадают (поток выходящий). По теореме Остроградского – Гаусса полный поток из параллелепипеда равен нулю (свободных зарядов внутри нет):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = D_{2n} \cdot S - D_{1n} \cdot S = 0,$$

откуда:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (1.41)$$

что и требовалось доказать. Если на поверхности раздела присутствуют свободные заряды, поток Φ не будет равняться нулю, а нормальная компонента вектора электрического смещения будет испытывать скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов σ . Учитывая, что

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, из соотношения $D_{1n} = D_{2n}$ получаем $\epsilon_1 \cdot E_{1n} = \epsilon_2 \cdot E_{2n}$, а из условия $E_{1t} = E_{2t}$ следует $D_{1t}/\epsilon_1 = D_{2t}/\epsilon_2$. Эти соотношения можно переписать в виде:

$$D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}; \quad E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}. \quad (1.42)$$

Соотношения (1.40) ÷ (1.42) образуют правила преломления линий напряженности и электрического смещения электростатического поля на границе раздела двух диэлектриков. Учитывая, что $\operatorname{tg}(\alpha_1) = E_{1t}/E_{1n} = D_{1t}/D_{1n}$, $\operatorname{tg}(\alpha_2) = E_{2t}/E_{2n} = D_{2t}/D_{2n}$, и соотношения (1.40) ÷ (1.42) можно записать:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (1.43)$$

§ 1.11. Проводящие включения в изоляцию

1.11.1. Проводники в электростатическом поле

Характерной особенностью проводников является наличие в них свободных электронов, которые могут перемещаться в пределах всего проводника. Из этого следует, что неподвижные свободные заряды одного и того же знака не могут сохраняться в толще проводника. Поскольку на заряды одного знака по закону Кулона действуют силы отталкивания, а сами заряды могут перемещаться в проводнике свободно, то они разойдутся на максимально возможное расстояние, которое определяется границами проводника, т.е. сосредоточатся на поверхности проводника. Объемная плотность заряда в толще проводника равна нулю.

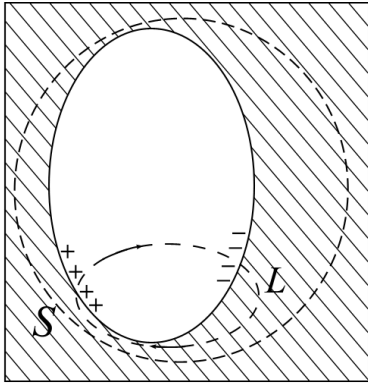
Внутри проводника не может существовать и напряженность электростатического поля. Действительно, если бы такая напряженность существовала, то под ее действием возникло бы движение свободных электронов, т.е. ток, который продолжался бы до тех пор, пока не произошло бы такое перераспределение зарядов, при котором ток прекратится и установится равновесие, а напряженность станет равна нулю. Задача электростатики – задача о неподвижных зарядах, т.е. в рамках электростатики $E = 0$ внутри проводника. По этой же причине $E = 0$ и на поверхности проводника. Поскольку $E = -\operatorname{grad}(\varphi)$ (см. 1.7), то следует, что вся толща проводника, включая его поверхность, имеют одинаковый потенциал, т.е. являются эквипотенциальной областью. Этот вывод следует подчеркнуть – **поверхность проводника (электрода) – эквипотенциальная поверхность**. Это значит, что напряженность поля у поверхности электрода имеет только нормальную составляющую напряженности, а тангенциальная равна нулю. По определению электрического смещения (1.22):

$$D = D_n = dq/ds = \sigma = \varepsilon_0 \varepsilon E_n; E_t = E_t = 0. \quad (1.44)$$

Из (1.44) следует, что силовые линии электростатического поля диэлектрика изгибаются вблизи металлического включения таким образом, чтобы они были перпендикулярны поверхности металла и заканчивались (начинались) на этой поверхности.

1.11.2. Поле внутри полости проводника.
Электростатическое экранирование

Рассмотрим металлический проводник произвольной формы, имеющий внутри изолированную полость, в которой отсутствуют свободные заряды. В самом металле, как показано выше, поля нет, но есть ли оно в полости? Покажем, что как бы ни был заряжен проводник, какова



бы ни была его форма и форма полости, в каком бы электростатическом поле он ни находился, если полость пуста (т.е. в ней нет зарядов), то поле внутри полости будет равно нулю. Выберем произвольную замкнутую поверхность S , которая окружает полость и всюду лежит внутри проводника. Поскольку в любой точке проводника напряженность поля равна нулю, а любая точка произвольной

Рис. 1.6. Поле внутри полости

поверхности S лежит внутри проводника, то поток вектора $E(D)$ равен нулю через любой элемент поверхности и общий поток вектора напряженности (электрического смещения) через всю поверхность S также будет равен нулю. По теореме Остроградского – Гаусса в этом случае суммарный заряд внутри объема, ограниченного поверхностью S , должен быть равен нулю. Зарядов внутри проводника, как показывалось выше, быть не может, внутри полости (по определению задачи) – тоже, но может они есть на внутренней поверхности полости? Если они там есть, но их сумма равна нулю, то полный поток сквозь поверхность S останется равным нулю и теорема Остроградского – Гаусса не будет нарушена. Предположим, что на внутренней поверхности полости имеется равное количество положительных и отрицательных зарядов. В таком случае внутри полости должны быть силовые линии, которые начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Выберем такую предполагаемую произвольную силовую линию и замкнем произвольный контур по толще проводника (контур L). Работа по перемещению пробного заряда вдоль этого контура внутри полости не равна нулю, если справедливо наше предположение о наличии зарядов на внутренней поверхности и напряженности поля в полости. Аналогичная работа по толще проводника равна нулю, поскольку вся толща проводника имеет одинаковый потенциал. В результате получается, что суммарная работа по замкнутому контуру L не равна нулю, что, понятно,

противоречит определению электростатического поля. Следовательно, наше предположение о существовании зарядов на поверхности пустой полости не верно, т.е. вся внутренняя поверхность полости также представляет собой эквипотенциальную поверхность, а силовых линий поля в пустой полости быть не может. Это объясняет принцип «защиты» или «электростатического экранирования» оборудования, которое помещается в металлическую коробку. С помощью вышеприведенных рассуждений можно показать, что каким бы ни было распределение зарядов внутри полости, оно не может создать поле вне проводника. При практическом применении «электростатического экранирования» часто бывает достаточно окружить защищаемый объект не сплошным металлическим листом, а сеткой – экраном.

1.11.3. Распределение зарядов по поверхности проводника

Рассмотрим вопрос распределения зарядов по поверхности металлического проводника. Заряд распределяется по поверхности проводника равномерно с одинаковой поверхностной плотностью (σ) в следующих случаях: а) на бесконечной заряженной плоскости, удаленной от других заряженных тел; б) на одиночном сферическом проводнике. Если размеры плоскости не бесконечны, форма проводника отличается от сферы или вблизи проводника находятся другие заряженные тела, то распределение заряда на нем перестает быть равномерным. В следующем разделе будет показано, что напряженность поля вблизи участка поверхности проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны этого участка поверхности (§ 2.21). Напряженность резко возрастает на любых неровностях поверхности и на острых краях электродов. Этим объясняется явление истечения зарядов с острых краев электродов (кистевой разряд) и возникновение короны – ионизация и свечение газа под воздействием высокого напряжения («огни Святого Эльма» – корона на вершинах мачт). Эти явления приводят к потерям энергии на линиях электропередач и в аппаратах высокого напряжения.

§ 1.12. Элементы теории симметрии

При расчетах электрических полей важно уметь найти в электродной системе элементы симметрии. Наличие элементов симметрии существенно упрощает расчеты полей, особенно в случае численных методов расчета.

На рис. 1.7 показаны элементы симметрии, которые могут встретиться при расчетах конкретных электрических полей. Центр инверсии (центр симметрии) показан на рис. 1.7а; обозначается символом C_i и означает, что для каждой точки A_i ($i = 1, 2, 3$) найдется точка B_i , у которой величина потенциала и напряженности поля такие же, как и в точке A_i , а направление векторов изменится на противоположное. Понятно, что наличие этого элемента вдвое уменьшает количество расчетных точек при численных расчетах. На рис. 1.7б, в, г показаны фигуры, обладающие различными осями симметрии. Ось симметрии обозначается символом $C_{360/\alpha}$, где α – минимальный угол, на который следует повернуть фигуру (или поле) для того, чтобы совместить ее с собой. Так для правильного треугольника минимальный угол поворота будет 120° , а ось симметрии, проходящая через его центр, обозначается символом $C_{360/120} = C_3$. Минимальные углы для квадрата и правильного шестиугольника равны 90° и 60° , а оси симметрии обозначаются символами C_4 и C_6 . Для такой фигуры как круг минимальный угол поворота в пределе стремится к нулю, а ось симметрии обозначается символом C_∞ . На рис. 1.7д изображен цилиндр, у которого ось симметрии C_∞ проходит по его оси. При наличии такого элемента симметрии можно не вычислять параметры поля во всем трехмерном пространстве, а достаточно вычислить параметры поля на любой плоскости, проходящей через ось цилиндра. Параметры в остальной части пространства могут быть получены вращением выбранной плоскости на любой угол вокруг оси цилиндра. В этом смысле говорят, что задача нахождения параметров поля цилиндра (коаксиального кабеля) в пространстве сводится к задаче нахождения поля на плоскости, а само такое поле часто называется **плоскопараллельным**. На рис. 1.7е изображена плоскость симметрии (плоскость зеркального отображения), которая обозначается символом m . Предельной симметрией, которая обозначается символом C_∞ , обладает шар. Если поле обладает такой симметрией, то расчеты трехмерного поля сводятся к расчету параметров вдоль оси, проходящей через центр шара, т.е. к одномерному полю. Зависимости параметров поля от сферических координат θ и φ не будет.

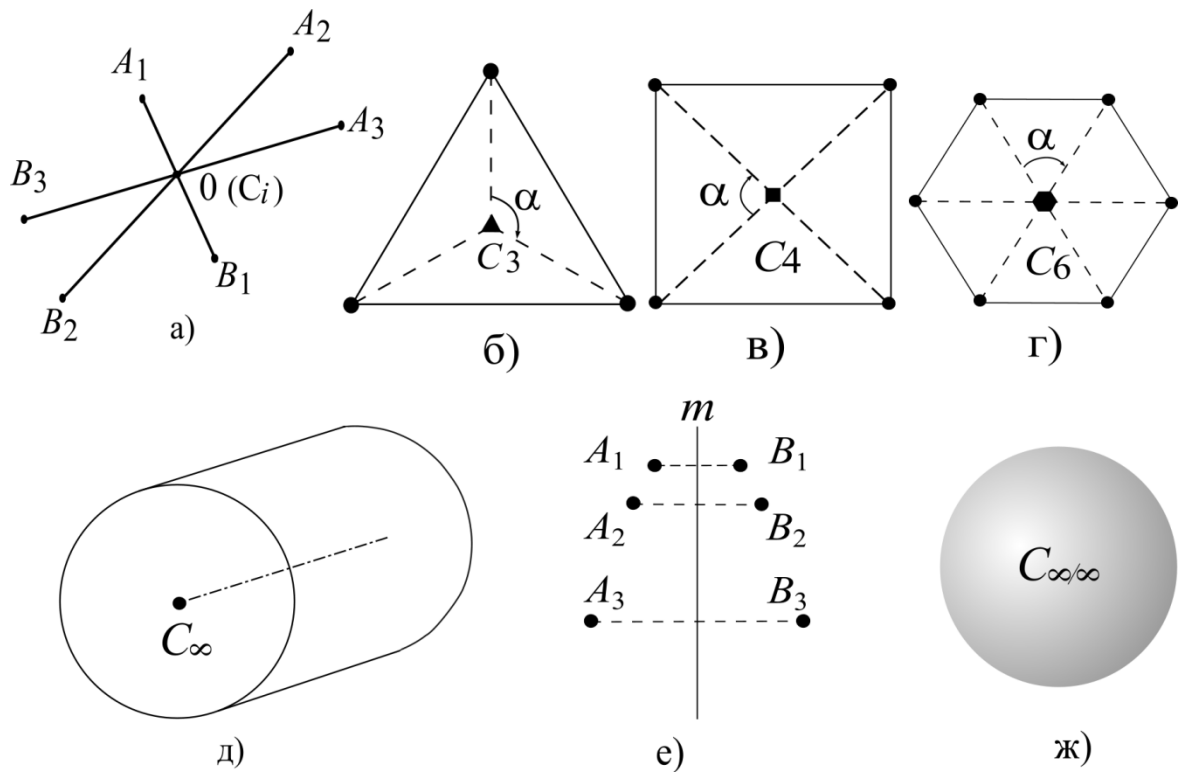


Рис. 1.7. Элементы симметрии

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные характеристики электрических полей и их определения. Дайте определение потенциалу электрического поля.
2. Назовите отличия потенциальных и вихревых полей. Является ли электростатическое поле полем потенциальным?
3. Какова связь потенциала и напряженности электрического поля?
4. Как определить напряженность электрического поля вблизи поверхности, имеющей поверхностную плотность заряда σ ?
5. Перечислите правила графического изображения электрического поля.
6. Назовите следствия теоремы о единственности и их применения при расчетах электрических полей.
7. Приведите формулы преобразования нормальной и тангенциальной составляющих векторов напряженности электрического поля и электрического смещения на границе раздела двух сред с различными величинами диэлектрической проницаемости.
8. Определите напряженность электростатического поля внутри сплошного металлического шарика радиуса R , находящегося в

трансформаторном масле в однородном электрическом поле напряженностью E .

9. Объясните принцип электростатического экранирования.

10. Перечислите элементы симметрии электродных систем. Для чего нужно определять симметрию рассматриваемых устройств?

11. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса для вектора электрического смещения.

12. В чем состоит физический смысл циркуляции электрического поля вдоль некоторой линии L ? Чему равен ротор электростатического поля?

13. В чем заключается физический смысл градиента потенциала электрического поля? Какова его связь с вектором напряженности?

14. В каких единицах измеряются в системе СИ потенциал, напряженность, поверхностная плотность и диэлектрическая проницаемость?

15. Как по картине расположения силовых линий определить области максимальной напряженности поля?

16. Для чего нужно знать элементы симметрии электродной системы?

17. Перечислите элементы симметрии электродных систем.

18. Как зависит напряжённость электрического поля около электрода от радиуса кривизны его поверхности.

Глава 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

§ 2.1. Решение дифференциальных уравнений Лапласа

Наиболее общим методом расчета электрических полей является непосредственное интегрирование уравнений Лапласа или Пуассона, рассмотренных в предыдущем разделе, при заданных граничных условиях. При таком решении предполагается, что переменные в этих уравнениях можно разделить. В зависимости от симметрии задачи (формы электродов) используются различные системы координат, из которых наиболее часто употребляются три: декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат. Обозначения систем координат приведены на рис. 1.1. Рассмотрим ряд важных решений, называемых **фундаментальными решениями уравнений Лапласа**.

1. Рассмотрим бесконечную заряженную плоскость с поверхностной плотностью заряда σ . Пусть эта плоскость совпадает с плоскостью yz прямоугольной декартовой системы координат. Заряд распределен по плоскости равномерно, поэтому любой участок плоскости неотличим от другого участка, т.е. пропадает зависимость от координат y и z . Используя вид оператора Лапласа в декартовых координатах (1.30) и учитывая независимость от координат y и z (производные $\partial\varphi/\partial y = 0$ и $\partial\varphi/\partial z = 0$), получаем уравнение Лапласа и его решение в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \mathbf{E} = -C_1 \cdot \mathbf{i} \quad \text{и} \quad \varphi = C_1 \cdot x + C_2, \quad (2.1)$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Из решений уравнения Лапласа для бесконечной заряженной плоскости (или плоского конденсатора вдали от его краев) (2.1) следует, что напряженность поля (между обкладками) не зависит от расстояния до плоскости (обкладки). Потенциал линейно изменяется по мере удаления от плоскости. Решения уравнения (2.1) называются фундаментальными решениями уравнения Лапласа в однородном поле.

2. Для нахождения параметров электростатического поля для бесконечной тонкой заряженной нити удобно использовать цилиндрическую систему координат. Величина потенциала не изменяется вдоль заряженной нити, т.е. вдоль осевой координаты Z в цилиндрической системе координат. В силу цилиндрической симметрии поля величина потенциала не изменяется и вдоль координаты θ . Тогда уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad r \frac{d\varphi}{dr} = C_3, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_3}{r} = -E, \quad \varphi = \int \frac{C_3 \cdot dr}{r} = C_3 \cdot \ln r + C_4. \quad (2.2)$$

Выражения (2.2) называются фундаментальными решениями уравнения Лапласа в плоскопараллельном поле. Сравнивая эти решения с выражениями для однородного поля, можно заметить, что напряженность убывает линейно по мере удаления от нити, а не остается постоянной. Потенциал возрастает не линейно, как в случае однородного поля, а пропорционально логарифму расстояния. Примерами таких полей являются поля цилиндрического конденсатора, коаксиального кабеля, высоковольтных вводов и т.п.

3. Поле одиночного точечного заряда. Поместим начало координат в точку расположения заряда. Потенциал такого заряда в силу сферической симметрии зависит от расстояния до заряда и не зависит от координат θ и φ в сферической системе координат, в которой получается наиболее простое решение для этого случая. Уравнение Лапласа и его решение имеют вид:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] = 0; \quad r^2 \frac{d\varphi}{dr} = C_5; \quad -E = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_5}{r^2}; \quad \varphi = \int \frac{C_5 \cdot dr}{r^2} = -\frac{C_5}{r} + C_6. \quad (2.3)$$

Выражения (2.3) называются фундаментальными решениями уравнения Лапласа в пространстве.

§ 2.2. Поле одиночного точечного заряда и проводящего шара.

Сферический конденсатор

2.2.1. Поле точечного заряда

В предыдущем параграфе были получены выражения для потенциала и напряженности поля одиночного точечного заряда. В данном разделе та же задача будет решена с использованием теоремы Остроградского – Гаусса и определены постоянные C_5 и C_6 в выражении (2.3). Расположим начало координат в точке расположения заряда. Опишем сферу радиуса r вокруг заряда и определим поток вектора электрического смещения \mathbf{D} через эту поверхность. В силу сферической симметрии задачи вектор \mathbf{D} будет иметь только радиальную составляющую, одинаковую во всех точках на поверхности сферы, и при положительном заряде будет направлен наружу вдоль нормали к поверхности сферы. Полный поток Φ будет равен произведению D на площадь поверхности сферы: $\Phi = D \cdot 4\pi r^2$. По теореме Остроградского – Гаусса полный поток будет равен заряду внутри сферы (q).

Тогда

$$\Phi = q = D \cdot 4\pi r^2 = \varepsilon_0 \varepsilon E \cdot 4\pi r^2, \quad \text{или } E = q / (4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2), \quad \mathbf{E} = E \cdot \mathbf{1}_r. \quad (2.4)$$

Линии поля всюду направлены радиально. Сравнивая выражения 2.3 и 2.4, находим, что постоянная $C_5 = -q/(4\pi\epsilon_0\epsilon)$, а потенциал примет вид:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C_6. \quad (2.5)$$

Постоянная C_6 зависит от выбора граничных условий. Например, если считать потенциал равным нулю в бесконечности ($r = \infty$), то $C_6 = 0$. Однако часто оказывается полезным считать равным нулю потенциал не в бесконечности, а на сфере какого-либо радиуса $r = r_0$. Тогда $C_6 = -q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r_0)$, а потенциал

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что при $r = \text{const}$ потенциал будет постоянным. Эквипотенциальными поверхностями являются сферы (рис. 2.1). Этот же результат получается из соображений симметрии. При построении графической картины электрического поля придерживаются следующего правила – потенциалы соседних эквипотенциальных поверхностей должны отличаться на одну и ту же величину потенциала. Из этого правила следует, что при изображении поля точечного заряда радиусы эквипотенциальных поверхностей должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} = d = \text{const}.$$

Пусть, например, мы хотим изобразить картину поля с шагом между эквипотенциалами в 20 %, т.е. $d = 0.2$, а радиус $r_0 = 1$, тогда $r_n = r_0/(1-n \cdot d \cdot r_0)$; $r_2 = 1.25$, $r_4 = 1.67$, $r_6 = 2.5$ и т.д. Изображение поля точечного заряда, выполненное по этому правилу, приведено на рис. 2.1. Из такой картины поля можно заключить, что при приближении к центру рисунка напряженность поля возрастает, поскольку расстояние между эквипотенциалами уменьшается, а напряженность равна $E = -\text{grad}(\varphi) = \Delta\varphi/\Delta r$, т.е. чем меньше расстояние между эквипотенциальными поверхностями, тем меньше знаменатель и, соответственно, больше напряженность. С другой стороны, чем меньше радиус сферы, тем меньше ее площадь, т.е. число силовых линий, приходящихся на единицу поверхности, становится больше. При графическом изображении картины электрического поля придерживаются также второго правила: число силовых линий, проходящих через единицу поверхности рисунка (плотность линий поля), должно быть пропорционально

напряженности поля в данной области поля, а коэффициент пропорциональности не должен меняться в пределах одного чертежа.

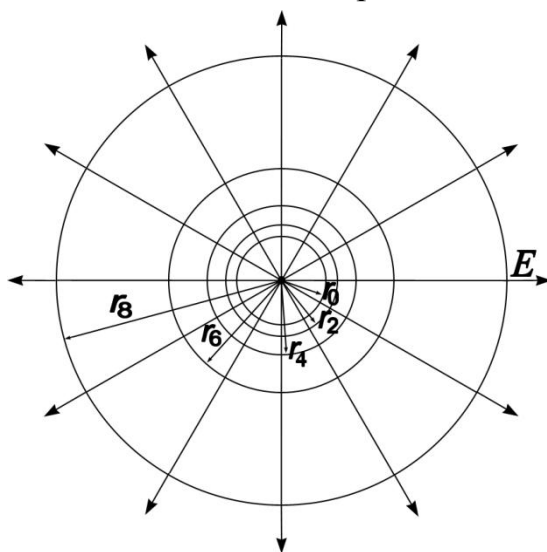


Рис. 2.1. Поле точечного заряда

2.2.2. Поле заряженного проводящего шара

В § 1.11 было показано, что поле внутри проводника равно нулю, как в самой проводящей среде, так и в любой возможной диэлектрической полости внутри проводника. Поле вне шара создается зарядами, расположенными на поверхности шара. В § 1.9 была доказана теорема о единственности, исходя из которой можно массивный металлический шар заменить тонкой металлической сферой того же радиуса, а сферу, в свою очередь, эквипотенциальной поверхностью каких либо зарядов внутри сферы. Для получения сферической эквипотенциальной поверхности достаточно в центре массивного металлического шара расположить точечный заряд. Тогда картина поля, создаваемого уединенным металлическим шаром, ничем не будет отличаться от поля, создаваемого точечным зарядом (рис. 2.1). Согласно теореме о единственности для получения параметров поля заряженного проводящего шара можно использовать формулы точечного заряда (2.4 ÷ 2.6) и считать, что весь заряд шара сосредоточен в его центре. Такой подход может быть использован для одиночного уединенного шара, когда вблизи него нет никаких других зарядов или металлических тел.

2.2.3. Сферический конденсатор

Если заменить поверхности равного потенциала рис. 2.1. тонкими металлическими поверхностями, например, с радиусом r_0 и r_6 , то мы получим электродную систему, называемую **сферическим конденсатором**. На каждой из обкладок такого конденсатора расположен заряд, равный по величине заряду в центре шара, а знак заряда на его наружной обкладке противоположен центральному. Разность потенциалов между обкладками такого конденсатора определяется по формуле (2.5):

$$U = \varphi_{\text{внутр}} - \varphi_{\text{нар}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_{\text{внутр}}} - \frac{1}{r_{\text{нар}}} \right),$$

где $r_{\text{внутр}}$ и $r_{\text{нар}}$ – соответственно радиусы внутренней и наружной обкладки конденсатора. Ёмкость сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon}{\left(\frac{1}{r_{\text{внутр}}} - \frac{1}{r_{\text{нар}}} \right)}. \quad (2.7)$$

Размерность ёмкости кулон/вольт. Эта единица называется **фарадой**. Пусть наружный радиус бесконечно большой ($r_{\text{нар}} = \infty$). Тогда из (2.7) следует формула для емкости одиночного шара:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r. \quad (2.8)$$

По формуле (2.8) можно определить емкость земного шара, для которого $r = 6.4 \cdot 10^6$ м: $C \approx 0.67 \cdot 10^{-3}$ ф = 670 мкф.

§ 2.3. Поле однородно заряженного диэлектрического шара

Пусть дан однородно заряженный диэлектрический шар с зарядом Q радиуса r_0 равного для определенности радиусу r_4 (рис. 2.1). Определим потенциал и напряженность электрического поля вне этого шара и внутри его. Для нахождения поля вне заряженного шара воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. Построим мысленно сферическую поверхность S радиусом, например, $r > r_0$ концентрическую с шаром. Определим поток вектора электрического смещения \mathbf{D} через эту поверхность. По теореме Остроградского – Гаусса он равен заряду Q . Для любой точки поверхности S величина вектора \mathbf{D} одинакова в силу сферической симметрии задачи. Направление \mathbf{D} совпадает с направлением радиус-вектора, проведенного из центра шара, и с направлением нормали к поверхности S , как показано на рис. 2.1. Тогда

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \cdot 4\pi r^2 = Q; \quad \mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \mathbf{1}_r. \quad (2.9)$$

Потенциал электрического поля вне сферы находится следующим образом:

$$\varphi = -\int \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{r} = -\int \frac{\mathbf{D}_S}{\epsilon_0 \epsilon} \cdot \mathbf{1}_r dr = -\int \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \cdot \mathbf{1}_r \cdot \mathbf{1}_r dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r} + \text{const1}. \quad (2.10)$$

Для нахождения потенциала и напряженности поля внутри заряженного шара поступим аналогичным образом. Пусть требуется найти параметры поля на расстоянии $r < r_0$ от центра шара. Проведем концентрическую сферу радиуса r и определим заряд внутри проведенной нами сферы. Объем всего шара $V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$. Плотность заряда

$$\rho = \frac{Q}{V_0} = \frac{3Q}{4\pi r_0^3}. \text{ Заряд внутри сферы равен}$$

$$q = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \cdot \left(\frac{r}{r_0} \right)^3.$$

Напряженность поля и потенциал внутри сферы будут равны:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \mathbf{1}_r = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0 \epsilon} = \frac{Q \cdot r}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_0^3}. \quad (2.11)$$

А потенциал

$$\varphi = -\int E \cdot dr = -\int \frac{\rho \cdot r \cdot dr}{3\epsilon_0 \epsilon} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0 \epsilon} + \text{const2}. \quad (2.12)$$

Физический смысл const2 можно понять из (2.12): приравняв радиус нулю, получим $\varphi = \text{const2}$, т.е. потенциал в центре шара. Пусть он равен нулю. Поскольку потенциал поля сферы является непрерывной функцией, т.е. потенциалы в формулах (2.10) и (2.12) должны быть равны на границе сферы $sr = r_0$, можно записать:

$$\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_0} + \text{const1} = -\frac{\rho r_0^2}{6\epsilon_0 \epsilon}; \quad \text{const1} = -\left(\frac{\rho r_0^2}{6\epsilon_0 \epsilon} + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_0} \right). \quad (2.13)$$

Если мы приняли значение потенциала в центре шара равным нулю, то физический смысл const1 в том, что она представляет собой потенциал на поверхности диэлектрического шара. На рис. 2.2. изображено изменение напряженности и потенциала диэлектрического шара внутри и снаружи. В центре шара потенциал равен нулю, по мере удаления от центра к

поверхности шара потенциал возрастает (по модулю) пропорционально квадрату радиуса, достигая максимума на поверхности, а затем убывает обратно пропорционально расстоянию до центра шара. На поверхности шара потенциал непрерывен. Направление вектора напряженности поля совпадает с направлением радиус-вектора, проведенного из центра шара в произвольную точку пространства, а его величина линейно возрастает внутри шара при $r < r_0$. На границе шара напряженность испытывает скачок в ϵ раз, связанный с переходом из среды с относительной диэлектрической постоянной $\epsilon > 1$ в среду с $\epsilon = 1$. При дальнейшем увеличении расстояния напряженность уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, а не первой степени, как в случае потенциала. При сравнении зависимости потенциала и напряженности поля, создаваемого заряженным диэлектрическим шаром вне шара и точечным зарядом, можно заметить, что формулы совпадают.

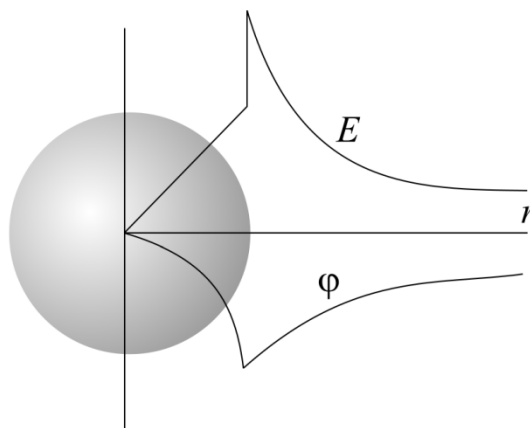


Рис. 2.2. Потенциал и напряженность поля равномерно заряженного диэлектрического шара

§ 2.4. Поле длинной равномерно заряженной оси

В качестве длинной заряженной оси принимается тонкий длинный заряженный проводник (провод), когда краевыми эффектами на концах провода (нити) можно пренебречь, а расстояния от нити до области рассматриваемого поля значительно больше радиуса проводника и намного меньше длины нити. Пусть нить равномерно заряжена по длине с линейной плотностью заряда τ . Поле имеет цилиндрическую симметрию с осью симметрии C_∞ . Вид эквипотенциальных поверхностей был получен нами при решении уравнений Лапласа в § 2.1, описывается выражениями (2.2) и показан на рис. 2.3. Вектор напряженности электростатического

поля всюду направлен по радиусу от нити, а его величина обратно пропорциональна радиусу. Для определения коэффициента пропорциональности воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. Определим поток вектора электрического смещения из цилиндра радиуса r , ось которого совпадает с заряженной осью, а длина равна $L \gg r$. Полный поток складывается из потока через боковую поверхность $S_{\text{бок}}$ и потока через два основания цилиндра $S_{\text{осн}}$. Поток через боковую поверхность $\Phi_{\text{бок}} = \mathbf{D}_r \cdot \mathbf{S}_{\text{бок}} = D_r \cdot 2\pi r L$. Вектор \mathbf{D} перпендикулярен заряженной оси, а вектор площади оснований направлен вдоль оси, поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. поток через основания цилиндра равен нулю. Тогда $D_r \cdot 2\pi r L = \tau \cdot L$,

$$D_r = \frac{\tau}{2\pi r}; E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon r} \quad (2.14)$$

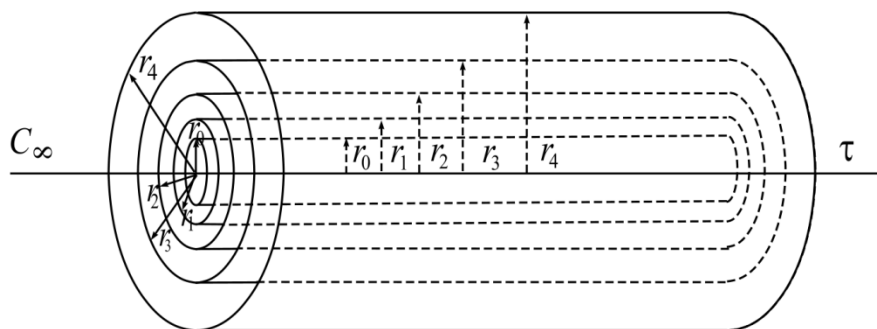


Рис. 2.3. Эквипотенциальные поверхности бесконечной заряженной нити

Сравнивая выражения (2.2) и (2.14), определяем постоянную C_3 в (2.2):

$$C_3 = -\frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon};$$

$$\varphi = \int \frac{C_3 \cdot dr}{r} = C_3 \cdot \ln r + C_4 = -\frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \ln r + C_4.$$

Пусть потенциал равен нулю на какой-либо цилиндрической поверхности радиуса $r = r_0$. Тогда

$$C_4 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \ln r_0; \varphi = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{r} \quad (2.15)$$

При изображении поля длинной заряженной нити радиусы эквипотенциальных поверхностей (боковых поверхностей цилиндров) должны удовлетворять следующему условию: $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \text{const} = r_{n+1}/r_n$, т.е. радиусы эквипотенциалей образуют геометрическую прогрессию.

§ 2.5. Коаксиальный кабель. Цилиндрический конденсатор

Коаксиальным кабелем называется система двух цилиндрических проводников различного радиуса, размещенных один внутри другого так, что

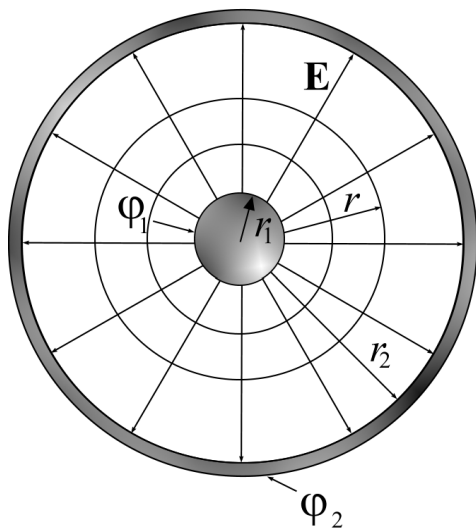


Рис. 2.4. Электрическое поле коаксиального кабеля

их оси совпадают. Электрическое поле зарядов, расположенных на внутреннем проводнике, может быть заменено полем зарядов, расположенных на оси внутреннего проводника, как это делалось в случае заряженного проводящего шара. Поскольку обычно длина кабеля существенно больше его диаметра (диаметра наружного проводника), то для расчета параметров поля кабеля могут быть применены формулы (2.14), (2.15). Пусть потенциал наружного проводника равен нулю, тогда потенциал внутреннего проводника равен:

$$\varphi_{\text{внутр}} = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.16)$$

Емкость кабеля на единицу длины определяется как:

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.17)$$

Напряженность поля в кабеле определяется выражением (2.14):

$$\mathbf{E} = E_r \cdot \mathbf{1}_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} \cdot \mathbf{1}_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \mathbf{1}_r. \quad (2.18)$$

Цилиндрическим конденсатором называется система из двух электродов цилиндрической формы различного радиуса, имеющих общую ось и вставленных один в другой. Любой отрезок коаксиального кабеля может рассматриваться как цилиндрический конденсатор. Если не

учитывать влияния краев, то для расчета емкости и напряженности поля в цилиндрическом конденсаторе можно использовать формулы для коаксиального кабеля (2.16)–(2.18).

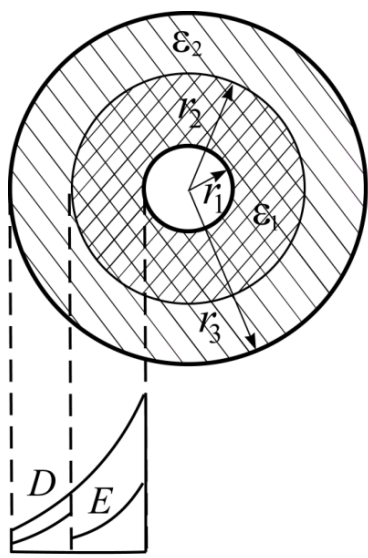
Как следует из формулы (2.18), наибольшая напряженность электрического поля в цилиндрическом конденсаторе будет при минимальном значении текущего радиуса r , которое равно r_1 , т.е. напряженность максимальна на поверхности внутреннего электрода. Рассмотрим вопрос о нахождении оптимального размера внутреннего электрода, при котором напряженность на нем будет минимальна при заданных размерах внешнего электрода r_2 и потенциала U . Как следует из формулы (2.18), напряженность будет минимальна тогда, когда знаменатель в формуле будет максимален. Для нахождения экстремума этой функции нужно взять производную по r_1 и приравнять нулю:

$$\frac{d\left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}\right)}{dr_1} = 0 = \ln \frac{r_2}{r_1} - 1, \text{ откуда } \frac{r_2}{r_1} = e. \quad (2.19)$$

При заданном напряжении между обкладками цилиндрического конденсатора (коаксиального кабеля) наименьшая напряженность на внутренней обкладке (центральной жиле) будет при отношении радиусов равном основанию натуральных логарифмов $e = 2,718281828459\dots$

§ 2.6. Коаксиальный кабель с двухслойным диэлектриком

Для выравнивания напряженности электрического поля вдоль радиуса применяются многослойные диэлектрики с различными величинами диэлектрической проницаемости. На рис. 2.5 показан коаксиальный кабель



(цилиндрический конденсатор) с двухслойным диэлектриком и изменение электрического смещения и напряженности электрического поля вдоль радиуса кабеля. Радиус внутренней жилы, первого слоя диэлектрика, а также внешней оболочки, который совпадает с радиусом второго слоя диэлектрика, обозначены соответственно r_1 , r_2 и r_3 . Диэлектрические проницаемости первого и второго слоя диэлектрика обозначены ϵ_1 и ϵ_2 . Пусть к обкладкам приложено напряжение U , а граница

Рис. 2.5. Цилиндрический конденсатор с двухслойным диэлектриком

раздела диэлектриков совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей. В соответствии с теоремой о единственности

картина поля не изменится, если разместить на границе раздела диэлектриков тонкую металлическую обкладку. Двухслойный конденсатор в этом случае может быть рассмотрен как два однослойных цилиндрических конденсатора вложенных один в другой, т.е. соединенных последовательно. В этом случае их емкость можно рассчитать по формуле емкости двух последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2 :

$C = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$, а емкости C_1 и C_2 определяются выражением (2.17):

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}}; C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \epsilon_2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (2.20)$$

Напряженность поля может быть определена следующим образом: из равенства линейной плотности зарядов $\tau = C \cdot U = C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$; получаем $U_1 = C \cdot U / C_1$, $U_2 = C \cdot U / C_2$ и напряженности в первом и втором слое диэлектрика:

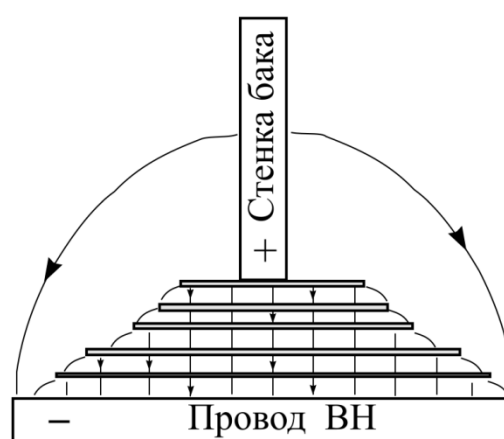
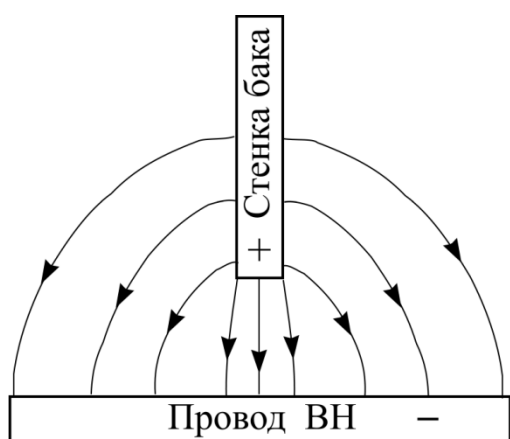
$$E_1 = \frac{U_1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{CU}{C_1 \cdot r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{U \cdot \epsilon_2}{r \cdot \left(\epsilon_2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \epsilon_1 \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} \right)}; \quad (2.21)$$

$$E_2 = \frac{U_2}{r \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{CU}{C_2 \cdot r \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{U \cdot \epsilon_1}{r \cdot \left(\epsilon_2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \epsilon_1 \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} \right)}. \quad (2.22)$$

На границе раздела диэлектриков напряженность (радиальная составляющая) испытывает скачок, как это и следовало ожидать в соответствии с выражениями (1.40) – (1.42). В то же время величина вектора электрического смещения $D_1 = \epsilon_1 E_1 = D_2 = \epsilon_2 E_2$ непрерывна. На рис. 2.5 приведены зависимости напряженности и электрического смещения в зависимости от радиуса для случая, когда $\epsilon_1 > \epsilon_2$. При таком выборе диэлектриков удастся добиться выравнивания напряженности вдоль радиуса и существенно снизить напряженность вблизи центральной жилы.

§ 2.7. Конденсаторный ввод

Другим примером цилиндрического конденсатора может служить электродная система, называемая конденсаторный ввод и образованная проводом высокого напряжения и стенками бака трансформатора. Картина электрического поля изображена на рис. 2.6а. Видно, что силовые линии поля распределены неравномерно. Для выравнивания поля, снижения максимальной напряженности на проводе ВН и стенках бака, получения выигрыша в электрической прочности изоляцию делают расслоенной. Между слоями изоляции равной толщины (рис. 2.6б) делают вставки из тонких металлических цилиндров различной длины. Получается система вложенных друг в друга цилиндрических конденсаторов, обладающая почти равномерным распределением напряженности поля. Изменение напряженности в пределах одного цилиндрического конденсатора будет небольшим из-за небольшой толщины слоя диэлектрика. Длина металлических цилиндров выбирается с таким расчетом, чтобы площадь поверхности каждого цилиндра была одинакова. Это делается из следующих соображений: поскольку заряд на каждом из вложенных конденсаторов одинаков, то если площади обкладок будут одинаковы, то и поверхностная плотность заряда также будет одинакова. Поверхностная плотность определяет величину вектора напряженности, которая также оказывается одинаковой для всех конденсаторов. Условие равенства площадей может быть записано в виде: $S_i = 2\pi r_i \cdot L_i = \text{const}$, где r_i – радиус i -го цилиндра, а L_i – его длина. Тогда отношение длин цилиндров должно быть обратно пропорционально их радиусам $L_m/L_n = r_n/r_m$. Внутренние цилиндры оказываются более длинными, чем наружные.



а) б) Рис. 2.6. Конденсаторный ввод

го конденсатора

Плоским конденсатором (рис. 2.7) называется электродная система из двух параллельных пластин, называемых обкладками конденсатора. Расстояние между обкладками обычно значительно меньше их длины и ширины. При таких условиях почти все заряды оказываются практически равномерно распределенными по внутренним поверхностям обкладок. В пространстве между обкладками вдали от краев поле однородно, т.е. вектор напряженности поля \mathbf{E} постоянен и направлен по нормали к поверхности обкладок. Силовые линии поля представляют собой прямые

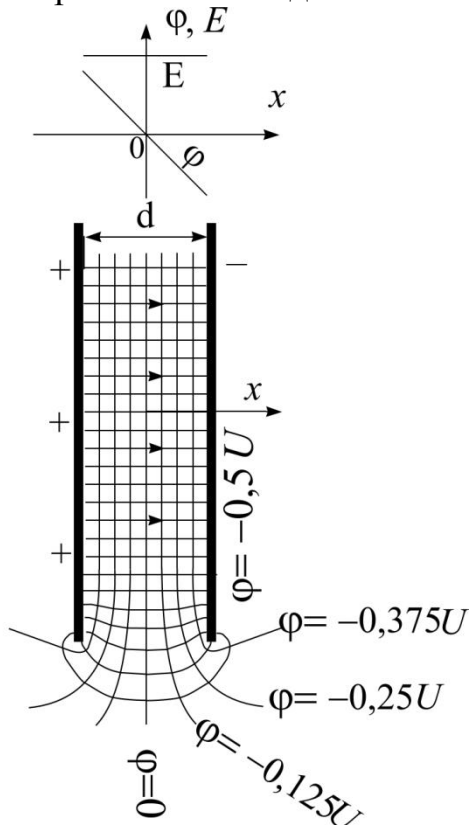


Рис. 2.7. Поле плоского конденсатора

линии, параллельные нормали. Для описания такой электродной системы применим декартову систему координат с осью x , параллельной нормали к поверхности, и началом координат, расположенным в центре конденсатора на середине расстояния между пластинами. Используя определение электрического смещения (1.22)–(1.23), можно записать:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{i}_x, \quad (2.23)$$

где $\sigma = Q/S$ – поверхностная плотность заряда на обкладках, которая является постоянной величиной вдали от краев обкладок. К задаче подходят фундаментальные решения уравнения Лапласа (2.1). Сравнивая выражения (2.1) и (2.23), определяем постоянную интегрирования C_1 :

$$C_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ и } \varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot x + C_2. \quad (2.24)$$

Пусть потенциал $\varphi = 0$ по центру между обкладками конденсатора при $x = 0$. Тогда $C_2 = 0$. Напряжение между обкладками конденсатора равно:

$$U = \varphi_{x=-\frac{d}{2}} - \varphi_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \text{ откуда } \sigma = \frac{U \cdot \varepsilon_0 \varepsilon}{d} \text{ и } \varphi = -U \frac{x}{d}. \quad (2.25)$$

Эквипотенциальные поверхности представляют собой плоскости, параллельные обкладкам ($x = \text{const}$). При графическом изображении поля плоского конденсатора расстояние между эквипотенциальными

поверхностями должно быть одинаково для того, чтобы потенциалы отличались на одну и ту же величину. Заряд конденсатора $Q = \sigma \cdot S$, где S – площадь обкладки. Емкость конденсатора равна

$$C = Q/U = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \frac{S}{d}. \quad (2.26)$$

Поле плоского конденсатора является равномерным только вдали от краев. При приближении к краю линии поля искривляются, и расчет параметров поля (напряженности, потенциала) следует проводить по более сложным формулам, чем (2.23)–(2.26). Эти формулы будут получены при рассмотрении метода конформных отображений.

§ 2.9. Метод наложения. Частичные емкости

Пусть мы имеем несколько заряженных проводников с зарядами известной величины Q_i , место расположения которых нам также известно. В этом случае потенциал поля в некоторой произвольной точке будет представлять собой сумму потенциалов, создаваемых каждым из проводников в этой точке:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i. \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) справедливо в любой точке поля, в том числе и в месте расположения проводников с зарядами. Потенциал первого проводника определяется суммой:

$$\varphi_1 = \alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3 + \alpha_{14} Q_4 + \dots + \alpha_{1n} Q_n. \quad (2.28)$$

Первое слагаемое в (2.28) представляет собой потенциал первого проводника, обусловленный зарядом на самом проводнике. Второе слагаемое – потенциал на первом проводнике, обусловленный зарядом Q_2 на втором проводнике и т.д. Коэффициенты α_{mn} называются **потенциальными коэффициентами**. Их величина зависит только от формы и взаимного расположения проводников. Так коэффициент α_{11} численно равен потенциалу на первом проводнике при величине заряда на нем, равном 1 ($Q_1 = 1$), причем заряды других проводников должны равняться нулю. Коэффициент α_{12} численно равен потенциалу на первом проводнике при величине заряда на втором проводнике, равном 1 ($Q_2 = 1$), причем заряды других проводников должны равняться нулю и т.д. Выражения, подобные (2.28) можно записать для любого проводника:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3 + \alpha_{14} Q_4 + \dots + \alpha_{1n} Q_n; \\ \varphi_2 &= \alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \alpha_{23} Q_3 + \alpha_{24} Q_4 + \dots + \alpha_{2n} Q_n; \\ \varphi_3 &= \alpha_{31} Q_1 + \alpha_{32} Q_2 + \alpha_{33} Q_3 + \alpha_{34} Q_4 + \dots + \alpha_{3n} Q_n; \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n = \alpha_{n1}Q_1 + \alpha_{n2}Q_2 + \alpha_{n3}Q_3 + \alpha_{n4}Q_4 + \dots + \alpha_{nn}Q_n.$$

Задача расчета потенциалов проводников сводится к определению потенциальных коэффициентов α_{mn} системы уравнений (2.29).

Чаще приходится решать задачу, обратную рассмотренной – находить заряды проводников по известным величинам разностей потенциалов между проводниками. Линейную систему уравнений (2.29) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\cdot\varphi_1 + C_{12}\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}\cdot(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + C_{1n}\cdot(\varphi_1 - \varphi_n); \\ Q_2 &= C_{21}\cdot(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\cdot\varphi_2 + C_{23}\cdot(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + C_{2n}\cdot(\varphi_2 - \varphi_n); \\ Q_3 &= C_{31}\cdot(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}\cdot(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{33}\cdot\varphi_3 + \dots + C_{3n}\cdot(\varphi_3 - \varphi_n); \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_n = C_{n1}\cdot(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}\cdot(\varphi_n - \varphi_2) + C_{n3}\cdot(\varphi_n - \varphi_3) + \dots + C_{nn}\cdot\varphi_n.$$

Коэффициенты C_{mn} в системе уравнений (2.30) называются **частичными емкостями**. Так коэффициент C_{11} численно равен заряду на первом проводнике, когда потенциалы всех проводников равны между собой и равны единице. Коэффициент C_{12} численно равен заряду на первом проводнике, когда все проводники, кроме второго заземлены (их потенциал равен нулю), а потенциал второго проводника равен -1 .

Потенциальные коэффициенты в (2.29) и частичные емкости в (2.30) образуют симметричные относительно главной диагонали квадратные действительные матрицы: $\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$, $C_{mn} = C_{nm}$. Это свойство вытекает из самих определений потенциальных коэффициентов и частичных емкостей. Пусть на проводник под номером n поместили заряд $Q_n = 1$, а на всех остальных проводниках заряды равны нулю. Потенциал проводника под номером m будет равен $\varphi_m = \alpha_{mn}Q_n = \alpha_{mn}\cdot 1$. Величина этого наведенного в проводнике m потенциала будет определяться только взаимным расположением и формой проводников m и n . Если теперь, не изменяя взаимного расположения проводников, заряд $Q = 1$ перенести на проводник m , то потенциал, наведенный на проводнике n , будет иметь ту же величину, что ранее был на проводнике m . В результате $\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$.

Величина частичной емкости между проводниками m и n зависит только от их формы и взаимного расположения. Частичные емкости удобно определять опытным путем.

§ 2.10. Поле двух разноименных точечных зарядов.

Электрический диполь

Одним из простейших примеров применения принципа наложения (суперпозиции электрических полей) является система двух разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии d друг от друга. При больших расстояниях $r \gg d$ по сравнению с расстояниями между зарядами такую систему зарядов называют **электрическим диполем**. Для нахождения поля от такой системы зарядов поместим начало декартовой системы координат в середину между зарядами, а ось Z проведем через оба заряда. Потенциал от двух зарядов равен сумме потенциалов от каждого в отдельности. В общем случае он будет иметь вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{+q}{r_1} + \frac{-q}{r_2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{+q}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (2.31)$$

При малых расстояниях по сравнению с расстоянием между зарядами вид эквипотенциальных поверхностей и силовых линий поля в плоскости, содержащей заряды, представлен на рис. 2.8б и 2.8в соответственно. Эквипотенциальной поверхностью с потенциалом, равным нулю, является плоскость, нормаль которой параллельна прямой, соединяющей заряды. Уравнение силовых линий поля имеет вид: $\text{Cos}\theta_1 - \text{Cos}\theta_2 = \text{const}$.

Будем рассматривать случай, когда r_1 и r_2 значительно больше расстояния между зарядами d ($r_1, r_2 \gg d$). Одним из важных технических приложений рассматриваемого случая является искажение электрического поля около малых включений в изоляцию (частички воды, металла и пр.). Такие включения вносят изменения в картину электрического поля такие же, как при замене такого включения электрическим диполем. Хотя в технических расчетах такая ситуация встречается нечасто, этот случай представляет интерес по крайней мере с трех позиций.

Во-первых, расчет поля диполя является простейшим примером применения принципа суперпозиции (сложения, наложения) электрических полей. Во-вторых, детальное знакомство с полем диполя важно для понимания строения диэлектрических материалов и процессов поляризации. В-третьих, это важно для понимания физической природы практических применений высоких напряжений в различных технологических процессах.

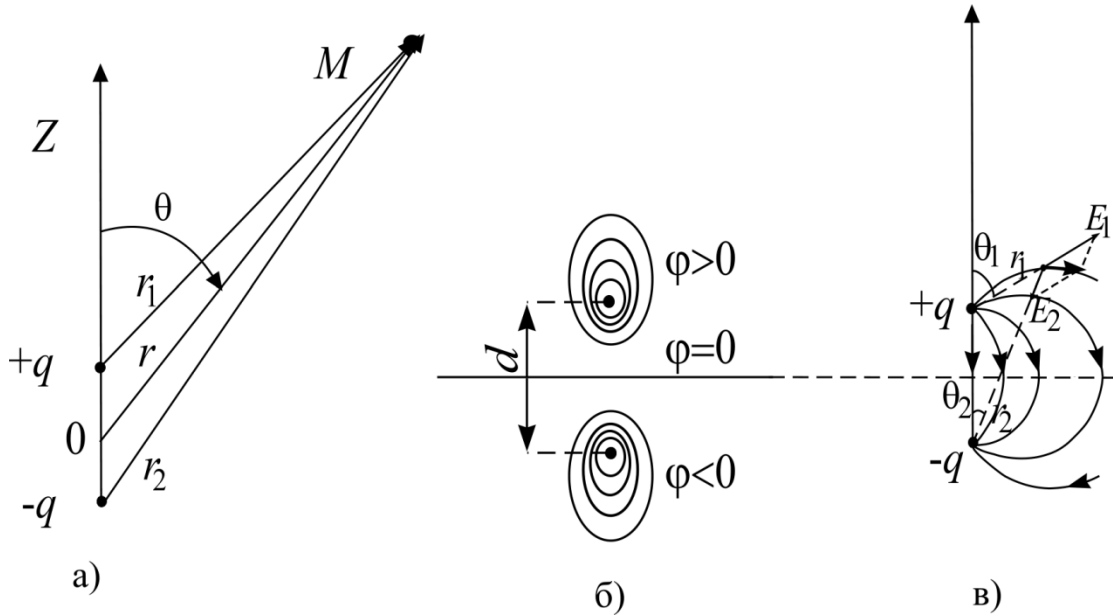


Рис. 2.8. Электрический диполь: а) $r (r_1, r_2) \ll d$;

б) эквипотенциальные линии; в) силовые линии при $r (r_1, r_2) \sim d$

Диполи возникают в диэлектриках как результат воздействия электрического поля на положительные ядра и отрицательные электронные облака, в результате чего центры положительных и отрицательных зарядов перестают совпадать. Расстояния d в таких системах значительно меньше размеров атомов. **Дипольным моментом** (не путать с импульсом) называют произведение модуля заряда q на расстояние между зарядами:

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{d}. \quad (2.32)$$

Направление вектора дипольного момента совпадает с направлением от отрицательного заряда к положительному заряду. Дипольный момент в веществах может проявиться не только в результате воздействия внешних электрических полей, но и в силу особенностей строения самого вещества. В зависимости от природы возникновения дипольных моментов различают следующие типы диэлектриков: сегнетоэлектрики, антисегнетоэлектрики, электреты, пьезоэлектрики.

Проведем некоторые упрощения в (2.31) с учетом того, что расстояния до точки M значительно больше расстояния между зарядами. Поскольку координаты точки, в которой мы будем рассчитывать параметры электрического поля $x, y, z \gg d$, то мы можем оставлять только линейные по d члены (члены, в которых d входит в первой степени). Так

$$(z - d/2)^2 = z^2 - d \cdot z + d^2/4 \approx z^2 - z \cdot d.$$

Удобно обозначить $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Тогда $(z - d/2)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - z \cdot d = r^2(1 - z \cdot d / r^2)$ и

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{r^2}\right)}} = \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Разложим получившееся выражение в степенной ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

при $z_0 = 0$ и оставим, как и выше, только линейные по d члены

$$\left(1 - \frac{z \cdot d}{r^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{z \cdot d}{2r^2}.$$

Действуя аналогичным образом для второго члена в (2.31), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{2r^2}\right).$$

Вычитая из первого члена второй, получим:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{z}{r^3} q \cdot d. \quad (2.33)$$

Учитывая (2.32) и то, что $\text{Cos}\theta = z/r$, выражение (2.33) примет вид:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \text{Cos}\theta}{r^2}. \quad (2.34)$$

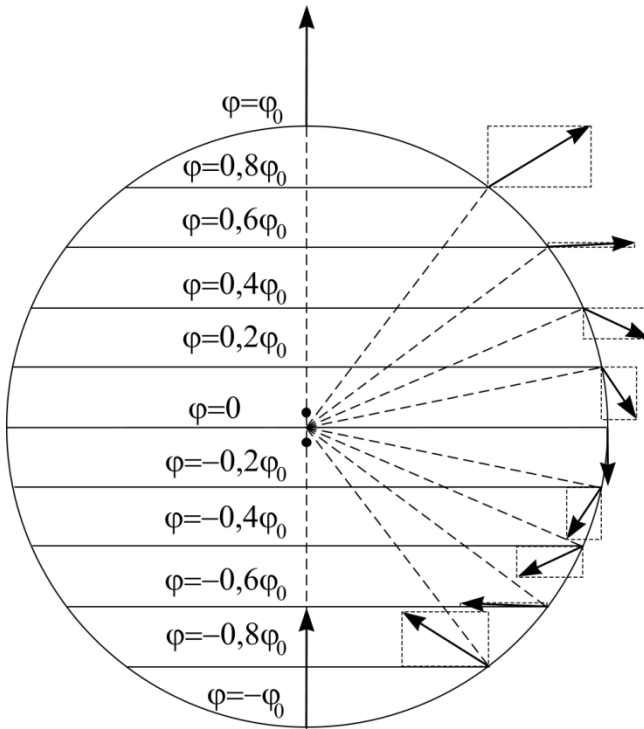
Потенциал диполя убывает при постоянном угле θ ($\theta = \text{const}$) с увеличением расстояния как $1/r^2$ (потенциал одиночного изолированного заряда убывает значительно медленнее $\sim 1/r$). При постоянном значении r потенциал зависит от величины z (2.33), т.е. эквипотенциальные линии получаются при $\text{Cos}\theta = \text{const}$, что соответствует параллелям сферической системы координат. При построении картины поля параллели изображаются так, чтобы разность между координатами z была постоянной или была постоянной разность между косинусами углов в (2.34). Величина z меняется от r до $-r$. Пусть этот интервал состоит из 10 интервалов. Если величину потенциала при $z = r$ обозначить за φ_0 , то эквипотенциальные линии будут иметь потенциалы $\varphi_1 = \varphi_0$; $\varphi_2 = 0,8\varphi_0$; $\varphi_3 = 0,6\varphi_0$; $\varphi_4 = 0,4\varphi_0$; $\varphi_5 = 0,2\varphi_0$; $\varphi_6 = 0$; $\varphi_7 = -0,2\varphi_0$; $\varphi_8 = -0,4\varphi_0$; $\varphi_9 = -0,6\varphi_0$; $\varphi_{10} = -0,8\varphi_0$; $\varphi_{11} = -\varphi_0$. Соответствующие им косинусы углов будут равны: 1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0; -0,2; -0,4; -0,6; -0,8; -1, а сами углы θ примут значения: 0; 36,87°;

53,13°; 66,42°; 78,46°; 90°; 101,54°; 113,57°; 126,87°; 143,13; 180°. Вид эквипотенциальных линий на сфере радиусом r при $r \gg d$ показан на рис. 2.9.

Формула (2.34) может быть переписана в векторном виде с учетом следующего:

$$\cos\theta = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_r, \quad (2.35)$$

где $\mathbf{e}_p = \mathbf{p}/p$ – единичный вектор диполя (направлен от отрицательного заряда к положительному), $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор вектора \mathbf{r} (направлен от диполя в точку расчета поля). Подставляя (2.35) в (2.34), получим:



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.36)$$

Эта формула справедлива для диполя произвольной ориентации, если \mathbf{r} – радиус вектор, направленный от диполя в точку расчета параметров поля.

Рис. 2.9. Эквипотенциальные линии и напряженность поля вдали от диполя

Найдем явный вид компонент напряженности электрического поля диполя. Дифференцируя (2.33), получим:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}; \quad (2.37)$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{3xz}{r^5}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{3yz}{r^5}; \quad (2.38)$$

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{3\cos\theta \cdot \sin\theta}{r^3}. \quad (2.39)$$

Перпендикулярная компонента напряженности поля лежит в плоскости XU и направлена прямо от оси диполя. Поле диполя изменяется

обратно пропорционально кубу расстояния от диполя. Из (2.37) и (2.39) следует, что на оси диполя при $\theta = 0^\circ$, т.е. при $\text{Cos}\theta = 1$, модуль напряженности поля достигает максимума, который в два раза больше, чем при $\theta = 90^\circ$, когда напряженность минимальна. В этих двух случаях перпендикулярная компонента поля равна нулю. Параллельная компонента поля равна нулю, когда $3\text{Cos}^2\theta - 1 = 0$ в уравнении (2.37), т.е. при $\theta \sim 54.74^\circ$ (иногда этот угол называют «магический угол»). Полный вектор напряженности поля равен:

$$E = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{1}_\theta\right) = \sqrt{E_z^2 + E_\perp^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \left[\text{Cos}\theta \cdot \mathbf{1}_r + \text{Sin}\theta \cdot \mathbf{1}_\theta \right]; \quad (2.40)$$

$$|E| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{3\text{Cos}^2\theta + 1}.$$

Напряженность электрического поля $E = -\text{grad}(\varphi)$ убывает пропорционально 3-й степени расстояния от диполя $\sim 1/r^3$. Напряженность электростатического поля диполя на большом расстоянии от диполя показана стрелками на рис. 2.9.

Одним из примеров применения формул поля диполя является следующая ситуация: пусть мы имеем малый проводящий шарик во внешнем поле, пример которого рассматривали в § 1.11. Такие шарики могут возникнуть, например, в толще масла масляного выключателя при разбрызгивании металла контактов в момент горения дуги при разрыве цепи короткого замыкания. Из-за своих малых размеров они могут находиться во взвешенном состоянии в масле, оседая на дно бака чрезвычайно медленно, и изменять изоляционные свойства масла. Для того, чтобы внутри такого шарика поле было равным нулю, на его поверхности должно произойти разделение зарядов таким образом, чтобы наведенное поле и поле в масле в сумме дали нуль в шарике. Это произойдет, если распределение поверхностной плотности заряда на поверхности шарика будет пропорционально $\sigma = \sigma_0 \cdot \text{Cos}\theta$ косинусу полярного угла θ . Полярная ось направлена вдоль вектора напряженности внешнего поля в масле. Такое распределение зарядов можно заменить двумя равномерно и разноименно заряженными диэлектрическими шарами, вложенными один в другой. Центры шаров не совпадают. Поле такой системы эквивалентно полю диполя. Похожая картина возникает и для микроскопических капелек влаги в трансформаторном масле при приложении электрического поля. Такие диполи дополнительно притягиваются друг к другу, что используется на практике, например, для осушки нефтепродуктов. Другим важным примером поля диполя является

дипольное приближение для произвольного распределения зарядов и в частности поле электрически нейтральных молекул. Силы Ван-дер-Ваальса имеют дипольное происхождение.

§ 2.11. Поле двух одноименных точечных зарядов

Общий вид такого поля изображен на рис. 2.10. Для такой системы зарядов имеется особая точка, называемая точкой ветвления, в которой напряженность поля равна нулю. Эта точка находится в середине отрезка, соединяющего точечные заряды. Эквипотенциальная поверхность в ней пересекает сама себя, схлопываясь в точку, так что нормаль к поверхности в этой точке не определена. Потенциал поля двух точечных зарядов в произвольной точке поля определяется по правилу наложения (суперпозиции, сложения) полей, как и в предыдущем параграфе:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.41)$$

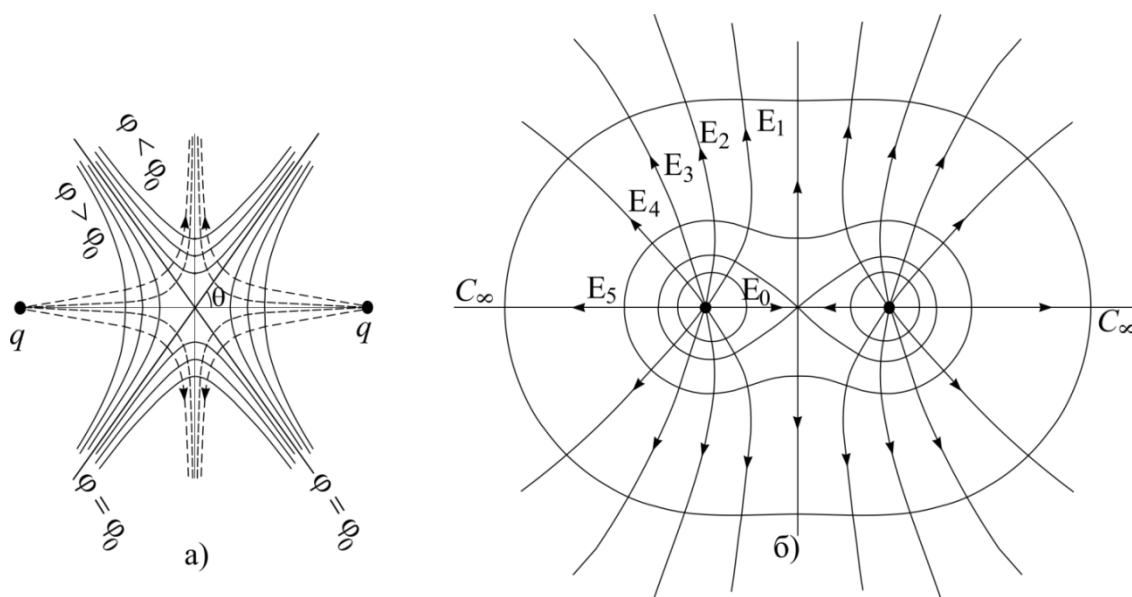


Рис. 2.10. Поле одноименных зарядов:
а) около и б) вдали от центра симметрии

Система зарядов имеет центр симметрии, ось симметрии C_∞ и зеркальную плоскость симметрии, перпендикулярную оси и проходящую через середину отрезка, соединяющего заряды. При такой симметрии зарядов все эквипотенциальные поверхности будут представлять собой тела вращения вокруг оси симметрии. В силу этого достаточно рассмотреть поле в некоторой плоскости, содержащей ось симметрии. Выберем систему декартовых координат на этой плоскости таким образом, что ось абсцисс (x) совпадет с осью симметрии, ось ординат (y) с линией пересечения выбранной

плоскости с плоскостью симметрии, а начало координат расположено в точке пересечения оси и плоскости симметрии, т.е. в центре между зарядами (в центре симметрии). Пусть расстояние от начала координат до места расположения зарядов равно h , от зарядов до произвольной точки M равно r_1 и r_2 , а потенциал в начале координат равен φ_0 .

Разность потенциалов между потенциалом в произвольной точке $M(x,y)$ и потенциалом в начале координат (φ_0) равна:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{h} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{h} \right) \right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot N, \quad (2.42)$$

где
$$N = \frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2 - x^2 + y^2}} - \frac{2}{h}.$$

Рассмотрим вид эквипотенциальных линий вблизи точки ветвления. Пусть рассматриваемая точка находится вблизи начала координат. Это означает, что ее координаты x и y малы по сравнению с расстояниями до зарядов h . По аналогии с предыдущим параграфом разложим N в степенной ряд. В отличие от разложения предыдущего параграфа линейные члены в данном разложении оказываются равными нулю, поэтому разложение в ряд приходится проводить до квадратичных по x и y членов:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} N \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{2x^2 - y^2}{h^3}. \quad (2.43)$$

Уравнению эквипотенциалей соответствует $N = \text{const}$ или $2x^2 - y^2 = \text{const}$. Возможны три варианта уравнений типа (2.43) в зависимости от величины N :

1. При $N=0$ $\Delta\varphi=0$, т.е. $2x^2 - y^2 = 0$. Эквипотенциали описываются уравнениями двух прямых, ($y = \pm\sqrt{2} \cdot x$) проходящих через выбранное нами начало координат, т.е. через центр симметрии. При вращении вокруг оси симметрии прямые превращаются в образующие конуса, а эквипотенциальная поверхность представляет собой боковую поверхность двух конусов, имеющих общую вершину. Если обозначить угол между образующей конуса и осью симметрии символом θ , то $\text{tg}\theta = y/x = \pm\sqrt{2}$, а угол θ – «магический» угол, равный, как и в предыдущем параграфе, $\theta = 54.74^\circ$.

2. При $N > 0$ $\Delta\varphi > 0$, т.е. $2x^2 - y^2 > 0$. Эквипотенциальные кривые описываются уравнением гиперболы, в фокусах которой находятся заряды. Вращение вокруг оси симметрии приводит к тому, что эквипотенциальной поверхностью в этом случае является двуполостной гиперболоид вращения.

3. При $N < 0$ $\Delta\varphi < 0$, т.е. $2x^2 - y^2 < 0$. Эквипотенциальные кривые также описываются уравнением гиперболы, однако вращение вокруг оси

симметрии приводит к тому, что эквипотенциальной поверхностью в этом случае является однополостной гиперболоид вращения.

В отличие от поля двух разноименных зарядов уравнение силовых линий поля описывается кривой, для которой постоянна сумма косинусов углов радиус векторов: $\text{Cos}\theta_1 + \text{Cos}\theta_2 = \text{const}$, а не разность косинусов этих углов, как это было для поля диполя. Эквипотенциальные поверхности и силовые линии поля двух одноименных зарядов показаны на рис. 2.10б.

Для правильного отображения линий поля следует соблюдать правила, приведенные в § 2.2.1. Определим углы между осью симметрии и силовыми линиями поля. Каждая силовая линия должна отображать определенную и одинаковую величину потока напряженности поля, исходящего из точечного заряда. Полный поток распространяется в полном телесном угле $\Omega = 4\pi$. Этот полный телесный угол следует разбить на ряд телесных углов Ω_i так, чтобы поток, распространяющийся в любой области пространства $\Omega_{i+1}-\Omega_i$ был одинаков. Построим вокруг точечного заряда сферу радиуса r и впишем в нее, например, два конуса, имеющих общую ось симметрии, вершины которых совпадают с центром сферы, т.е. с точечным зарядом. Пусть Ω_1 и Ω_2 – телесные углы этих конусов, вырезающих на сфере участки, площадь поверхности которых равна $S_1 = \Omega_1 \cdot r^2$ и $S_2 = \Omega_2 \cdot r^2$. Телесный угол конуса Ω и угол θ между осью конуса и его образующей на плоскости, проходящей через ось симметрии, связаны следующим соотношением: $\Omega = 2\pi(1 - \text{Cos}\theta)$. Должны выполняться следующие соотношения: $S_1 = S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = \dots = S_n - S_{n-1} = \text{const}$; $\Omega_1 = \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_3 - \Omega_2 = \dots = \Omega_n - \Omega_{n-1} = \text{const}$; $S_n = 4\pi r^2$; $S_0 = 0$, $\Omega_n = 4\pi$; $\Omega_0 = 0$. Пусть $n = 5$, тогда $\Omega_1 = 1 \cdot 4\pi/5$; $\Omega_2 = 2 \cdot 4\pi/5$; $\Omega_i = i \cdot 4\pi/n$;

$$2\pi(1 - \text{Cos}\theta_i) = i \cdot 4\pi/n,$$

$$\text{Cos}\theta_i = 1 - \frac{2 \cdot i}{n}. \quad (2.44)$$

Линии поля при $n = 5$ изображены на рис. 2.10б. Величины косинусов и углов, рассчитанных по (2.44) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Углы и их косинусы между осью C_∞ и векторами E_i

i	0	1	2	3	4	5
$\text{Cos}\theta_i$	1	0,6	0,2	-0,2	-0,6	-1
θ_i (°)	0	53,13	78,46	101,54	126,87	180

§ 2.12. Электрическое поле двух равномерно и разноименно заряженных параллельных осей

Электродная система из двух равномерно и разноименно заряженных параллельных осей имеет следующие элементы симметрии:

- а) плоскость зеркального отражения, содержащую заряженные оси;
- б) плоскость инверсного отражения, перпендикулярную плоскости а) и находящуюся на равном расстоянии от осей;
- в) трансляционную симметрию параллельно оси пересечения плоскостей а) и б) с бесконечно малым шагом трансляции.

Плоскость инверсного отражения отличается от плоскости зеркального отражения тем, что при отражении направления векторов и знаков зарядов меняются на противоположные. При таком наборе элементов симметрии для расчета параметров электрического поля в пространстве достаточно определить параметры поля в плоскости, перпендикулярной (нормальной) заряженным осям. Эта плоскость, в свою очередь, может быть разбита на четыре эквивалентные части линиями пересечения с плоскостями зеркального отражения (ось x) и инверсного отражения (ось y). Электрическое поле в этой плоскости представлено на рис. 2.11.

Поместим начало координат в точку пересечения трех плоскостей и примем потенциал в этой точке равным нулю. Пусть расстояние от начала координат до каждой из осей равно h , линейная плотность заряда осей $+\tau$ и $-\tau$, а расстояния до произвольной точки поля M равны a_1 и a_2 соответственно. Тогда, полагая в (2.15) $r_0 = h$ и $r = a_1, a_2$, имеем

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{h}{a_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{h}{a_2},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.45)$$

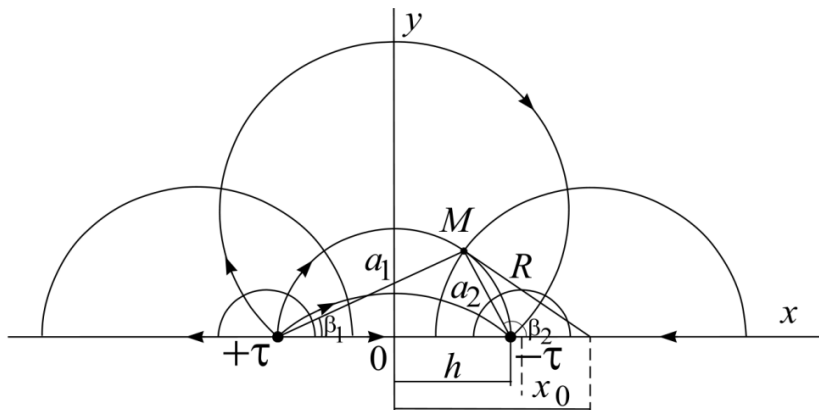


Рис. 2.11. Поле двух параллельных разноименно-заряженных осей

Эквипотенциальные линии должны удовлетворять уравнению $a_2/a_1 = k$, где k – некоторое число. Как упоминалось ранее, это уравнение семейства окружностей. Определим радиусы и центры этих окружностей.

Пусть точка M имеет координаты x, y, z . Тогда $a_1^2 = (x+h)^2 + y^2$;

$$a_2^2 = (x-h)^2 + y^2, \quad \text{а} \quad k^2 = \frac{(x-h)^2 + y^2}{(x+h)^2 + y^2}.$$

Раскрывая скобки и освобождаясь от знаменателя, получим:

$$(k^2-1)(x^2+y^2+h^2)+2hx(k^2+1)=0;$$

$$x^2+2hx(k^2+1)/(k^2-1)+h^2+y^2=0.$$

Чтобы получить уравнение окружности, нужно полученное уравнение привести к виду $(x+x_0)^2 + y^2 = R^2$. Обозначая $x_0 = h(k^2+1)/(k^2-1)$, добавим (для получения полного квадрата) к левой и правой частям уравнения величину $(x_0)^2$ и перенесем h^2 в правую часть:

$$(x+x_0)^2 + y^2 = R^2 = \left[h \frac{(k^2+1)}{(k^2-1)} \right]^2 - h^2 = \left(h \frac{2k}{k^2-1} \right)^2.$$

При различных значениях коэффициента k получаются окружности с координатами центра $(-x_0, 0)$ и радиусом R ,

где

$$R = \pm h \frac{2k}{k^2-1}, \quad (2.46)$$

$$-x_0 = -h \frac{k^2+1}{k^2-1}. \quad (2.47)$$

При $k > 1$ $-x_0 < 1$ и окружности расположены слева от начала координат. При $k < 1$ $-x_0 > 1$ и окружности расположены справа. Радиус окружности является всегда положительной величиной. Знак в (2.46) следует брать исходя из этого условия, т.е. при $k > 1$ берется знак плюс, а при $k < 1$ берется знак минус. Между величинами R, x_0 и h существует соотношение:

$$x_0^2 - R^2 = h^2 \left[\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 - \left(\frac{2k}{k^2-1} \right)^2 \right] = h^2. \quad (2.48)$$

Решая квадратное уравнение (2.46) относительно k , получим:

$$k = \frac{x_0 \pm h}{R}. \quad (2.49)$$

Подставляя полученное значение k в (2.45), получим:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \frac{x_0 \pm h}{R}. \quad (2.50)$$

Знаки в уравнении (2.50) выбираются как в (2.46): положительный знак берется для точек, лежащих в левой половине рисунка 2.11 (около положительной оси). Отрицательный знак при h берется для точек, лежащих в правой половине рисунка 2.11 (около отрицательной оси).

Напряженность поля в точке M от каждой из нитей находится по формуле (2.14). Так вектор напряженности и его составляющие вдоль осей x и y от нити $+\tau$ имеют вид:

$$E_{\leftarrow \tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon a_1}; \quad E_{\leftarrow \tau} \bar{x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon a_1} \cos\beta_1; \quad E_{\leftarrow \tau} \bar{y} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon a_1} \sin\beta_1.$$

Вектор напряженности и его компоненты от нити $-\tau$ рассчитываются по аналогичным формулам при замене a_1 на a_2 и β_1 на β_2 . Полный вектор напряженности имеет вид:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\left(\frac{\cos\beta_1}{a_1} - \frac{\cos\beta_2}{a_2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\sin\beta_1}{a_1} - \frac{\sin\beta_2}{a_2} \right) \mathbf{j} \right]. \quad (2.51)$$

Линии поля являются окружностями различного радиуса с центрами, лежащими на оси y . Доказательство этого утверждения приведено в [1]. Одна из линий поля совпадает с кратчайшим отрезком между осями.

§ 2.13. Метод отражения. Поле точечного заряда над бесконечной проводящей плоскостью

Пусть у нас имеется заряд q , находящийся на расстоянии h над проводящей поверхностью. Вследствие кулоновского взаимодействия точечного заряда с поверхностными зарядами произойдет их перераспределение. Равномерное распределение поверхностной плотности зарядов, характерное для уединённой плоскости, превратится в неравномерное распределение со сложной зависимостью плотности зарядов от расстояния между точечным зарядом и позицией на плоскости. Определение параметров поля в произвольной точке пространства по методу суперпозиции с интегрированием по поверхности – достаточно сложная и трудоемкая задача. Задача о параметрах поля такой системы зарядов в произвольной точке существенно упрощается, если воспользоваться теоремой о единственности. При анализе поля двух разноименных точечных зарядов (см. § 2.10) было показано, что одной из эквипотенциальных поверхностей является плоскость, перпендикулярная

прямой, соединяющей заряды. Достаточно положить в уравнении (2.31) координату $z = 0$, как получим эквипотенциальную плоскость xu (001) с потенциалом, равным нулю. Если эту эквипотенциальную плоскость заменить тонкой проводящей плоскостью с нулевым потенциалом, то картина поля на рис. 2.8б, рис. 2.8в не изменится. Как было показано в § 1.11, поля выше и ниже такой плоскости не зависят друг от друга. Из этого результата, а также из теоремы о единственности следует метод расчета электростатических полей, который называется **метод отражения**. Сущность этого метода в приложении к данной системе зарядов состоит в следующем: сложную систему неравномерно распределенных поверхностных зарядов заменяют одним единственным зарядом – изображением, расположенным под поверхностью на таком расстоянии и с таким зарядом, чтобы картина силовых линий и эквипотенциалей над поверхностью не изменилась. Применяя это и учитывая решения § 2.10, находим, что заряд-изображение должен удовлетворять следующим условиям: он должен быть равен по величине точечному заряду и противоположен ему по знаку. Он должен находиться под плоскостью на продолжении перпендикуляра, опущенного из точечного заряда на плоскость. Расстояние от точечного заряда до плоскости должно быть равно расстоянию от заряда-изображения до плоскости. При выполнении этих условий сложная задача расчета поля параметров поля от заряда, расположенного над заземленной плоскостью, сводится к задаче § 2.10, а вычисления проводятся по формуле (2.31).

§ 2.14. Поле точечного заряда и проводящего шара

Другим примером применения метода отражения является задача нахождения параметров поля точечного заряда и проводящего шара. Пусть имеется проводящий шар радиуса r и точечный заряд q , находящийся на расстоянии s от центра шара (точка O). Распределение поверхностной плотности зарядов на шаре не является равномерным. Определение параметров поля в произвольной точке пространства методом суперпозиции представляет собой не простую задачу. Если подобрать заряд-изображение q' таким образом, чтобы картина силовых линий не изменилась, тогда, как и в предыдущем параграфе, задача сведется к нахождению поля от двух точечных зарядов. Система заряд-шар имеет ось симметрии типа C_∞ . Из соображений симметрии следует, что заряд-изображение q' должен лежать внутри проводящего шара на этой оси. Пусть проводящий шар заземлен, т.е. его потенциал равен нулю.

Поместим заряд-изображение q' на некотором расстоянии x от центра, как показано на рис. 2.12. Обозначим расстояния от точечного заряда q и заряда изображения q' до некоторой произвольной точки M на поверхности шара символами a_1 и a_2 соответственно. В этой точке, как и в любой другой на поверхности шара должно выполняться соотношение:

$$\varphi = 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a_1} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\epsilon a_2},$$

из которого следует:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{q}{q'} = K = \text{const.}$$

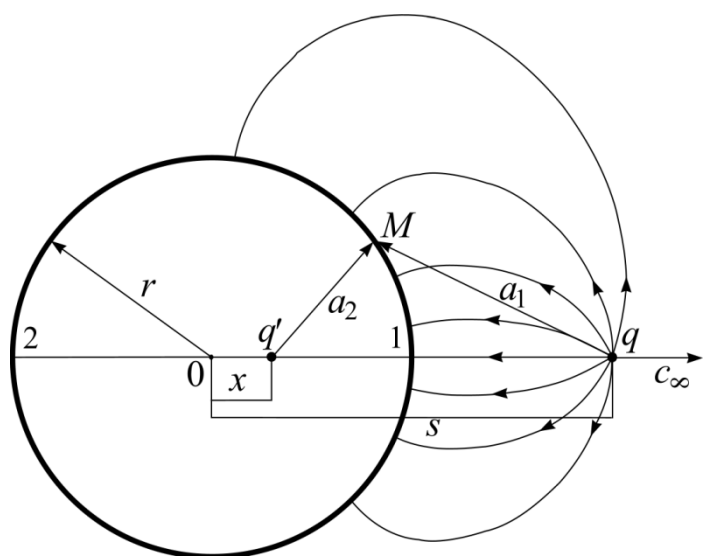


Рис. 2.12. Точечный заряд около проводящей сферы

Как отмечалось в предыдущих параграфах, геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до двух заданных точек постоянно, называется на плоскости **окружностью**, а в пространстве **сферой**. Из полученного соотношения следует, что для сферической поверхности действительно можно подобрать заряд-изображение. Определим

его величину и расстояние от него до центра сферы. Выберем две точки пересечения поверхности шара с осью симметрии 1 и 2. Для точки 1 расстояние $a_1 = s - r$, а расстояние $a_2 = r - x$. Для точки 2 расстояние $a_1 = s + r$, а расстояние $a_2 = r + x$. Поскольку

$$\frac{q}{q'} = \frac{a_1}{a_2} = K = \frac{s - r}{r - x} = \frac{s + r}{r + x}, \quad \text{то } x = \frac{r^2}{s}, \quad (2.52)$$

$$K = \frac{s}{r}, \quad q' = -q \frac{r}{s}. \quad (2.53)$$

Разберем три возможных варианта изолированной от земли сферы: 1) сфера не заряжена; 2) сфера имеет заряд; 3) сфера имеет потенциал, не равный нулю. Во всех трех случаях в дополнение к заряду-изображению q' следует добавить в центр сферы дополнительный точечный заряд q'' .

По принципу суперпозиции сфера останется эквипотенциальной, изменится только величина потенциала.

1. Пусть незаряженная сфера изолирована от земли. До того как к ней был поднесен точечный заряд q , суммарный заряд сферы был равен нулю. Поскольку сфера изолирована, то после перераспределения зарядов по поверхности сферы суммарный заряд также останется равным нулю. Дополнительный заряд q'' , который следует разместить в центре сферы, должен быть равен по величине и противоположен по знаку заряду-изображению $q'' = -q'$, чтобы их сумма была равна нулю.

2. Если на изолированной сфере находился заряд Q , то величина дополнительного заряда должна быть такой, чтобы в сумме с зарядом-изображением получался заряд Q , т.е. $q'' = Q - q' = Q + q \cdot r/s$.

3. Если сфера была заряжена до потенциала φ , то величина дополнительного заряда в центре сферы будет определять потенциал на поверхности сферы, который определится выражением:

$$\varphi = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (2.54)$$

Во всех трех рассмотренных случаях потенциал и напряженность в произвольной точке поля определяются суперпозицией трех зарядов q , q' и q'' , а не двух, как было в случае заземленной сферы.

Следует отметить, что в литературе существуют решения задачи электростатики по нахождению положения и величины заряда-изображения для заряда, находящегося вблизи гиперболических поверхностей и других поверхностей сложной формы. На первый взгляд кажется удивительным, как вообще удалось рассчитать поля при такой сложной форме поверхности. Можно сказать, что решение этих задач было найдено инверсным методом, т.е. задом наперед. Решается простая задача двух разноименных неравных по величине зарядов. При анализе решения находится какая-либо эквипотенциальная поверхность, например, гиперболической формы. Эта эквипотенциальная поверхность заменяется поверхностью электрода, а заряд внутри поверхности объявляется зарядом-изображением. Задача о нахождении положения и величины заряда-изображения вблизи гиперболической поверхности оказывается решена.

§ 2.15. Поле двухпроводной линии. Поле однопроводной линии и земли

Пусть имеется двухпроводная линия, составленная из двух цилиндрических проводов с одинаковыми радиусами R при расстоянии $2H$ между центрами проводов и напряжением между проводами U . При решении задачи о поле двух параллельных осей в § 2.12 было найдено, что эквипотенциальные поверхности представляют собой окружности на плоскости, перпендикулярной осям, т.е. цилиндры в пространстве. Задача о поле двухпроводной линии сводится, таким образом, к обратной задаче § 2.12. Там было дано положение заряженных осей, а мы находили радиус цилиндрических поверхностей R и координату центра окружности (оси цилиндра) x_0 . В этом же параграфе дан радиус цилиндров R и расстояние между центрами окружностей $2x_0$, обозначаемое как $2H$ и нужно найти положение эквивалентных нитей (электрических осей проводов). Перенесение заряда с поверхности цилиндров на электрические оси проводов не меняет картину поля. Для нахождения положения электрических осей h можно воспользоваться формулой (2.48), заменив в ней x_0 на H :

$$h = \sqrt{H^2 - R^2}. \quad (2.55)$$

Потенциалы проводов определяются по формуле (2.50):

$$\varphi_{\text{прав}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{H-h}{R}\right); \quad \varphi_{\text{лев}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{H+h}{R}\right).$$

Напряжение между проводами равно:

$$U = \varphi_{\text{лев}} - \varphi_{\text{прав}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{H+h}{H-h}\right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{H+h}{\sqrt{H^2-h^2}}\right) = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{H+h}{R}\right). \quad (2.56)$$

Емкость на единицу длины линии без учета влияния земли определится выражением:

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln\left(\frac{H+h}{R}\right)}. \quad (2.57)$$

При $H \gg R$ (справедливо для воздушных линий) значение k стремится к бесконечности, а x_0 , которое в этом параграфе обозначается символом H , стремится к h ($h \approx H$). В этом случае емкость будет иметь вид:

$$C' = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln\left(\frac{2H}{R}\right)}. \quad (2.58)$$

Расчет напряженности в произвольной точке проводится по формуле (2.51), в которой величина линейной плотности заряда определяется из (2.56). Напряженность поля на поверхности проводов определяется выражением:

$$E_{\text{провода}} = \frac{U \cdot h}{2R \left(H + R \cos \varphi \right) \ln \left(\frac{H + h}{R} \right)}, \quad (2.59)$$

где φ – угол между осью x и радиус-вектором, проведенным из центра провода в точку M на поверхности провода. Наибольшая напряженность будет при $\varphi = 180^\circ$, т.е. на ближайшей к противоположному проводу точке поверхности.

Для расчета поля однопроводной линии и земли применим метод отражения. Заметим, что плоскость отражения (ось y рис. 2.11) является эквипотенциальной поверхностью. Если принять эту плоскость за поверхность земли, то задача сводится к задаче о двухпроводной линии, рассмотренной выше в этом параграфе. Пусть дана однопроводная линия с проводом радиуса R , находящаяся под потенциалом U и на расстоянии H между центром провода и землей. Очевидно, что заряд-изображение будет иметь радиус R , потенциал – $-U$, а расстояние между его центром и землей равно H . Как и рассмотрено выше, первый шаг заключается в нахождении расстояния от земли до электрических осей провода (h) и его изображения. В отличие от двухпроводной линии, где разность потенциалов между проводами принималась равной U , в задаче об одиночном проводе над землей разность потенциалов между проводом и проводом-изображением вдвое больше и равна $2U$. В связи с этим емкость провода на единицу длины одиночной линии над землей вдвое больше, чем для двухпроводной линии:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon}{\ln \frac{2H}{R}}. \quad (2.60)$$

Максимальная напряженность также будет вдвое больше в ближайшей к земле точке провода, т.е. при $\varphi = 180^\circ$:

$$E_{\text{max}} = \frac{U \cdot h}{R \cdot \left(H - R \right) \ln \left(\frac{H + h}{R} \right)}. \quad (2.61)$$

Вектор напряженности всюду нормален поверхности земли. Определив в произвольной точке поверхности напряженность по формуле (2.51) и учитывая определение электрического смещения, можно определить плотность наведенных на поверхности земли зарядов. В (2.51) $a_1 = a_2$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$, т.е. второй член обращается в нуль. Обозначая расстояние между проекцией провода на землю и искомой точкой символом y , получим:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon U \cdot h}{\sqrt{2 + y^2} \cdot \ln\left(\frac{H + h}{R}\right)}. \quad (2.62)$$

§ 2.16. Электрическое поле и емкости трехфазной линии

Практическим примером применения метода наложения (суперпозиции) и метода отражения является расчёт ёмкостей и потенциалов трехфазной линии электропередачи (ЛЭП). На рис. 2.13.а схематично показана одноцепная ЛЭП без грозозащитного троса. Обозначим расстояния между проводом (его изображением) и землей, между двумя проводами (изображениями), и между проводом и его изображением символами: h , g и d , соответственно. Радиус проводов r значительно меньше каждого из расстояний ($r \ll h, g, d$). Кроме этого, будем считать, что $g \ll h, d$, так что выполняются следующие соотношения: $h_i = h$, $g_{ik} = g$, $d_{ik} = d$, где i и k принимают значения 1, 2 и 3. Трехфазной линии соответствует схема рис. 2.13.б, в которой учтены емкости между проводами и емкости проводов относительно земли. В принятом приближении электрические оси проводов совпадают с их геометрическими осями, так что для расчета можно использовать формулы бесконечной заряженной оси (см. § 2.4). Предполагается, что потенциалы каждого из проводов известны и равны φ_1 , φ_2 , φ_3 . Пусть линейные плотности зарядов на проводах 1, 2, 3 равны Q_1' , Q_2' и Q_3' , соответственно. Потенциал на первом проводе, например, будет суперпозицией потенциалов от шести линейных зарядов (зарядов проводов и их изображений). Учитывая, что для воздуха $\varepsilon = 1$, и используя (2.15), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{h}{r} - \ln \frac{h}{2h} \right) + \frac{Q_2'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{h}{g} - \ln \frac{h}{d} \right) + \frac{Q_3'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{h}{g} - \ln \frac{h}{d} \right) = \\ &= \frac{Q_1'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{2h}{r} + \frac{Q_2'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{d}{g} + \frac{Q_3'}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{d}{g} = \alpha_{11}Q_1' + \alpha_{12}Q_2' + \alpha_{13}Q_3'. \end{aligned}$$

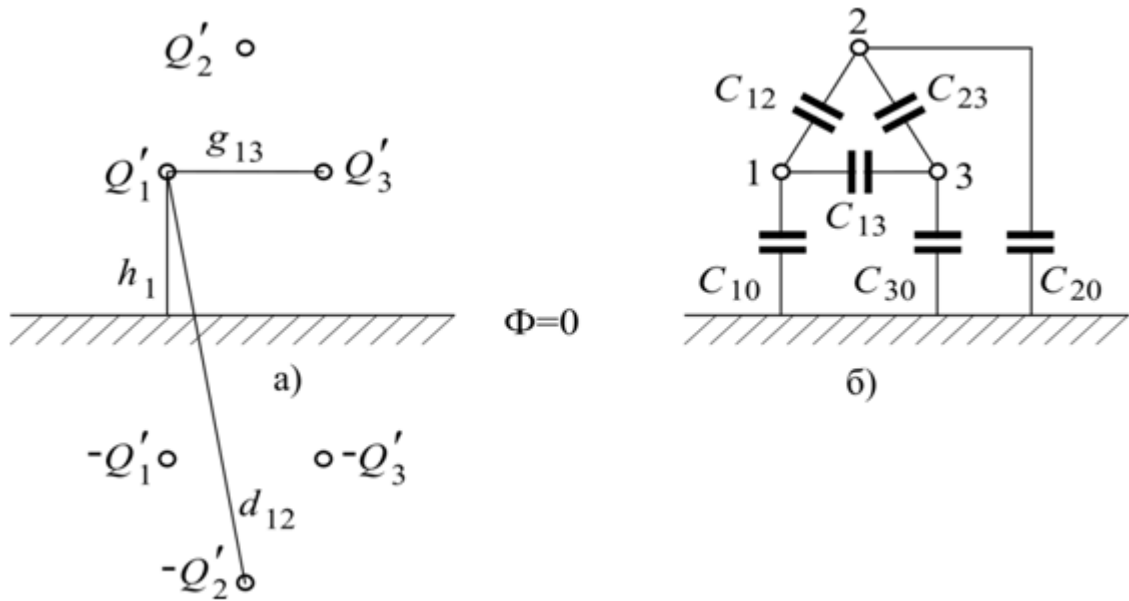


Рис. 2.13: а) трехфазная линия и ее зеркальное отражение;
б) емкости трехфазной линии

Аналогично можно записать потенциал на поверхности второго и третьего проводов. Для всех трех проводов получается система уравнений типа (2.29):

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

где

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{r}\right) \equiv a,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{d}{g} \equiv a'.$$

В линиях электропередачи провода, как правило, расположены симметрично, а через некоторое расстояние вдоль ЛЭП фазные провода (1, 2, 3) меняются местами (транспонирование проводов). В таких случаях допустимы упрощения потенциальных коэффициентов, приведенные выше.

При нормальном режиме работы трехфазной линии три заряда Q'_1 , Q'_2 и Q'_3 в сумме дают нуль ($Q'_1 = -Q'_2 - Q'_3$), и поэтому согласно (2.63) можно записать:

$$\varphi_1 = aQ'_1 - a'Q'_1 = (a - a')Q'_1. \quad (2.64)$$

Заряд провода пропорционален его потенциалу, поэтому с учетом (2.60) можно определить емкость линии на единицу её длины:

$$C_1' = \frac{Q_1'}{\varphi_1} = \frac{1}{a - a'} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2h \cdot g}{r \cdot d}\right)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{g}{r}\right)}. \quad (2.65)$$

Последнее преобразование в (2.65) записано в случае $d \approx 2h$.

При определении общей картины поля трехфазной линии как суммы шести линейных зарядов необходимо учитывать фазы проводов. По этой же схеме можно учесть влияние защитных тросов, которые способны существенно снизить напряженность электростатического поля у земли. При определении поля двухцепной линии с нерасщепленными проводами в фазе общее число линейных зарядов с учетом защитного троса возрастает до 14. Наибольшая напряженность у земли, как и следует ожидать, получается под осью линии. Для двухцепной линии 110 кВ при высоте подвеса нижних проводов $h = 10$ м, она составляет около 1,1 кВ/м.

§ 2.17. Поле двух проводящих шаров

Электродная система, состоящая из двух шаров одинаковых размеров, широко применяется в технике высоких напряжений для измерения высокого напряжения, коммутации цепей и т.п. Задача о параметрах поля такой системы может быть решена различными способами. В этом параграфе продемонстрируем решение методом изображений в сочетании с методом суперпозиции. Пусть радиусы шаров одинаковы и равны R . Система имеет ось симметрии C_∞ и задача сводится к нахождению параметров поля в плоскости, содержащей ось симметрии. Обозначим расстояние между центрами шаров символом L , а отношение L/R символом K ($K = L/R$). Пусть один из шаров, например, шар A , имеет потенциал $\varphi > 0$, а другой (шар B) заземлен ($\varphi = 0$).

1. Поместим в центр шара A (точка A_1) заряд q_1 . Благодаря этому на поверхности шаров A и B установятся потенциалы φ_A и φ_B соответственно:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, \quad \varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon L}.$$

2. Поместим внутрь шара B (точка B_2) заряд $q_2 = -q_1/K$, являющийся изображением заряда q_1 в поверхности шара B . Расстояние от точки B_2 до центра шара B (точка B_0) определяется по формуле (2.52): $x_{02} = R^2/L = R/K$. Потенциал φ_B при этом становится равным нулю, а потенциал φ_A равен:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon(L - R - x_{02})}$$

3. Поместим внутрь шара A (точка A_3) заряд $q_3 = -q_2R/(L-x_{02}) = q_1/(K^2-1)$, являющийся изображением заряда q_1 в поверхности шара B . Расстояние от точки A_3 до центра шара A равно: $x_{13} = R^2/(L-x_{02}) = R \cdot K/(K^2-1) = L/(K^2-1)$. Потенциал φ_A приобретает при этом своё первоначальное значение, а потенциал φ_B становится равным:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, \quad \varphi_B = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0\epsilon(L - R - x_{13})}$$

При измерениях напряжений шаровыми разрядниками величина K изменяется в пределах от 2,1 до 3,5. Если обозначить расстояние между ближайшими точками шаров A и B символом S ($S = L - 2R$), то это изменение K соответствует изменению отношения $S/2R = 0,05 \div 0,75$. Шаг 3 повторяет в некоторой степени шаг 1. Однако, заряд q_3 меньше заряда q_1 в K^2-1 раз (в $5,76 \div 11,25$ раза).

4. Чтобы сделать потенциал шара B равным нулю, в него следует поместить заряд-изображение $q_4 = -q_3 \cdot R/(L-x_{13}) = -q_1/(K(K^2-2))$. Расстояние

$$x_{04} = \frac{R^2}{L - x_{13}} = \frac{R}{K} \frac{K^2 - 1}{K^2 - 2}$$

Потенциал φ_A приобретает при этом значение:

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0\epsilon(L - R - x_{04})}$$

5. Для компенсации возросшего потенциала φ_A внутрь шара A помещают заряд q_5 , являющийся изображением заряда q_4 , и т.д. Получающийся ряд достаточно быстро сходится.

Потенциал и напряженность в произвольной точке поля находится методом суперпозиции полученных зарядов q_i . Наибольшая напряженность поля получается в точке P (рис. 2.14), которая является ближайшей точкой заряженного шара к шару не заряженному. Напряженность поля в этой точке может быть определена по приближенной формуле Пика [1]:

$$E_P \approx \frac{U}{4S} \left(1 + \frac{S}{R} + \sqrt{\left(1 + \frac{S}{R} \right)^2 + 8} \right) \quad (2.66)$$

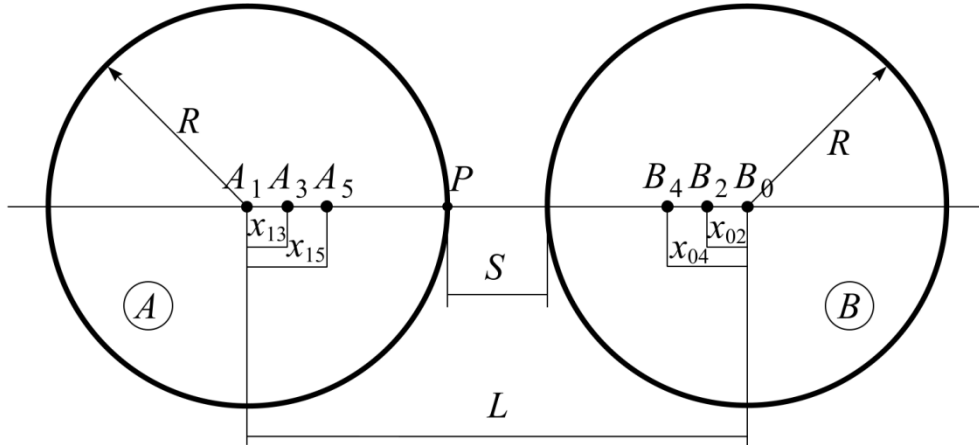


Рис. 2.14. Система шар-шар и расположение зарядов-изображений

Подробные расчеты электрического поля двух заряженных проводящих шаров приводятся в [7,8]. Более точные результаты могут быть получены по нижеприведенным формулам. Частичные ёмкости (см. § 2.9):

$$C_{AA} = C_{BB} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \cdot \text{sh}\mu \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\text{sh} \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\text{sh} 2 \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu}} \right); \quad (2.67)$$

$$C_{AB} = C_{BA} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \cdot \text{sh}\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\text{sh} 2 \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu}}, \quad (2.68)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} \text{Arsh} \left(\frac{L^2}{2R^2} - 1 \right). \quad (2.69)$$

Коэффициенты для расчета максимальной напряженности:

$$\xi_{11} = 1 + \text{sh}\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh} \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu} + \text{sh} 2n\bar{\mu}}{\text{sh} \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu} - \text{sh} 2n\bar{\mu}}; \quad (2.70)$$

$$\xi_{12} = \text{sh}\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh} 2 \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu} + \text{sh} \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu}}{\text{sh} 2 \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu} - \text{sh} \mathfrak{C}n+1 \bar{\mu}}. \quad (2.71)$$

Используя формулы (2.67)–(2.71), можно определить C – ёмкость системы двух шаров и E_{\max} – максимальную напряженность.

1. Один из шаров заземлен ($\varphi_A = U$; $\varphi_B = 0$):

$$C = C_{AA} + C_{AB}; \quad E_{\max} = \frac{U}{R} \xi_{11}. \quad (2.72)$$

2. Потенциалы равны по величине и противоположны по знаку ($\varphi_A = U/2$; $\varphi_B = -U/2$):

$$C = \frac{1}{2} C_{AA} + C_{AB}; \quad E_{\max} = \frac{U}{2R} (\xi_{11} + \xi_{12}). \quad (2.73)$$

§ 2.18. Поле равномерно заряженного проводника конечной длины

До сих пор мы рассматривали примеры электростатических полей, которые сводились к полям одного или нескольких отдельных точечных зарядов. В данном параграфе и двух последующих будут приведены примеры полей, создаваемых непрерывным распределением зарядов. Пусть нам дан бесконечно тонкий, равномерно заряженный проводник конечной длины L (рис. 2.15) с линейной плотностью заряда σ . Требуется найти потенциал и напряженность электрического поля в любой точке пространства вне проводника. Как и в задаче о бесконечно тонком, равномерно заряженном проводнике бесконечной длины (см. § 2.4), задача имеет цилиндрическую симметрию. Ось симметрии бесконечного порядка проходит через заряженный проводник. В силу симметрии задача сводится к определению характеристик двумерного поля в плоскости, содержащей ось симметрии. На рис. 2.15 введены следующие обозначения: x и y – оси координат; точка M_1 с координатами (x_1, y_1) и точка M_2 с координатами (x_2, y_2) соответствуют началу и концу бесконечно тонкого проводника; произвольная точка M с координатами (x, y) – точка, в которой рассчитываются потенциал и напряженность поля; d – длина перпендикуляра, опущенного из расчетной точки M на нить или ее продолжение; dx –

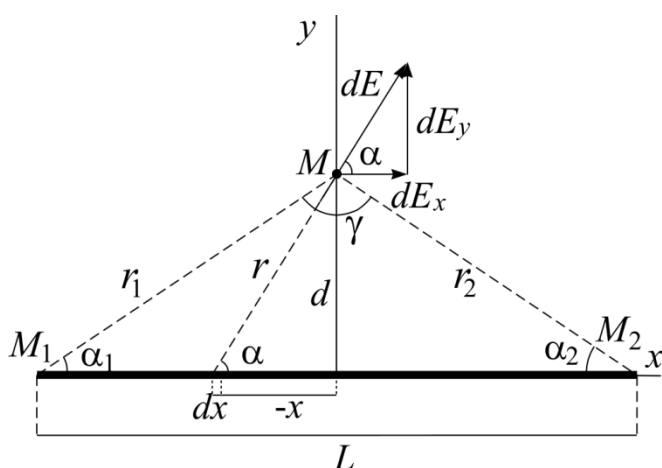


Рис. 2.15. Поле нити конечной длины

текущий бесконечно малый элемент нити; $-x$ – расстояние от начала координат до элемента dx . Остальные обозначения приведены на рис. 2.15. Заряд бесконечно малого отрезка dx равен $dq = \sigma \cdot dx$. Этот заряд можно считать точечным зарядом. В точке M он создает потенциал и напряженность:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r} = \frac{\sigma \cdot dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \sqrt{d^2 + x^2}}; \quad (2.74)$$

$$dE_x = \frac{\sigma \cdot dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r^2} \cdot \cos(\alpha); dE_y = \frac{\sigma \cdot dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r^2} \cdot \sin(\alpha). \quad (2.75)$$

Произведем замены $r = \frac{d}{\sin(\alpha)}$; $x = -d \cdot \text{Ctg}(\alpha)$; $dx = \frac{d \cdot d\alpha}{\sin^2(\alpha)}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \frac{\sigma \cdot d \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \sin^2(\alpha) \sqrt{d^2 + d^2 \cdot \text{Ctg}^2(\alpha)}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin(\alpha)} = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \left[\text{Ctg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \cdot \text{Ctg} \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + L}{r_1 + r_2 - L} \right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Последнее преобразование проведено по формуле Мальвейде.

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \frac{\sigma \cdot d \cdot d\alpha \cdot \cos(\alpha)}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \sin^2(\alpha) \sqrt{d^2 + d^2 \cdot \text{Ctg}^2(\alpha)}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (2.77)$$

$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot d} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \sin(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot d} \cdot [\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)]; \quad (2.78)$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot d} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.79)$$

Из соотношения (2.76) следует, что эквипотенциальные линии с $\varphi = \text{const}$ должны удовлетворять условию $r_1 + r_2 = \text{const}$. Из курса математики известно, что такая фигура, для каждой точки которой сумма расстояний от двух заданных точек постоянна, называется **эллипс**. Сами точки конца проводника M_1 и M_2 расположены в фокусах. В пространстве эквипотенциальные поверхности представляют собой конфокальные эллипсоиды вращения. Поскольку силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, то в плоскости они представляют собой конфокальные гиперболы, а в пространстве конфокальные гиперболоиды вращения. Нормаль к эллипсу в произвольной точке M делит пополам угол между радиус-векторами, проведенными из фокусов в M , что также следует из (2.79). Приведем явный вид некоторых переменных в координатной форме:

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}; r_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2};$$

$$d = \frac{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}}{L};$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_1 - y & z_1 - z \end{vmatrix} = (y_2 - y_1)(z_1 - z) - (y_1 - y)(z_2 - z_1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_1 - z & x_1 - x \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(x_1 - x) - (z_1 - z)(x_2 - x_1); \quad (2.80)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_1 - x & y_1 - y \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_1 - y) - (x_1 - x)(y_2 - y_1);$$

$$\frac{\cos(\alpha)}{d} = \sqrt{\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2}}. \quad (2.81)$$

В выражении (2.80) расстояние (d) между расчетной точкой и прямой, содержащей заряженный проводник, приведено для трехмерного пространства. В плоском поле все координаты z следует принять равными нулю. Как будет показано в следующем разделе, при приближенных расчетах электрических полей методом эквивалентных зарядов реальную систему электродов заменяют набором пробных зарядов, основными из которых являются точечные, линейные и кольцевые заряды. В таких расчетах используются формулы в координатной форме. Наиболее простой вид выражения для напряженности поля будет, если точка M лежит на оси симметрии. Тогда радиальные составляющие напряженности равны нулю ($E_y = 0$), а общая напряженность поля вычисляется по формуле (2.77). На концах заряженной нити или $r_1 = 0$ или $r_2 = 0$. Тогда напряженность обращается в бесконечность. Из этого результата следует, что максимальная напряженность на концах нити. Как будет показано далее в этом разделе, напряженность на концах заряженного отрезка является конечной величиной при учете реальной толщины проводника.

§ 2.19. Поле кольцевого заряда

Пусть нам дан проводник в форме окружности (кольца) с центром в точке O и радиусом R , заряженный равномерно с линейной плотностью заряда τ . Система имеет ось симметрии C_∞ , совпадающую с осью x рис. 2.16. Задача о параметрах поля в пространстве вырождается, как и предыдущем параграфе, в задачу на плоскости, содержащей ось симметрии. Простые аналитические выражения параметров поля получаются только для точек, лежащих на оси симметрии. Из соображений

симметрии следует, что вектор напряженности в точках, лежащих на оси симметрии, имеет только осевую составляющую ($E = E_x$). Определим потенциал и напряженность поля в произвольной точке M , на оси симметрии. На заряженном кольце выделим бесконечно малый участок с зарядом dq и длиной $R \cdot d\theta$, который можно принять за точечный заряд. Величина заряда равна $dq = \tau \cdot R \cdot d\theta$. Расстояние от этого точечного заряда до расчетной точки M обозначим символом r , а угол между r и осью x символом α ($\text{Sin}\alpha = R/r$). Потенциал и напряженность электрического поля, которые создает этот элементарный заряд, равны:

$$d\varphi = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \text{Sin}\alpha \cdot d\theta; \quad (2.82)$$

$$dE_x = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \text{Sin}^2\alpha \text{Cos}\alpha \cdot d\theta. \quad (2.83)$$

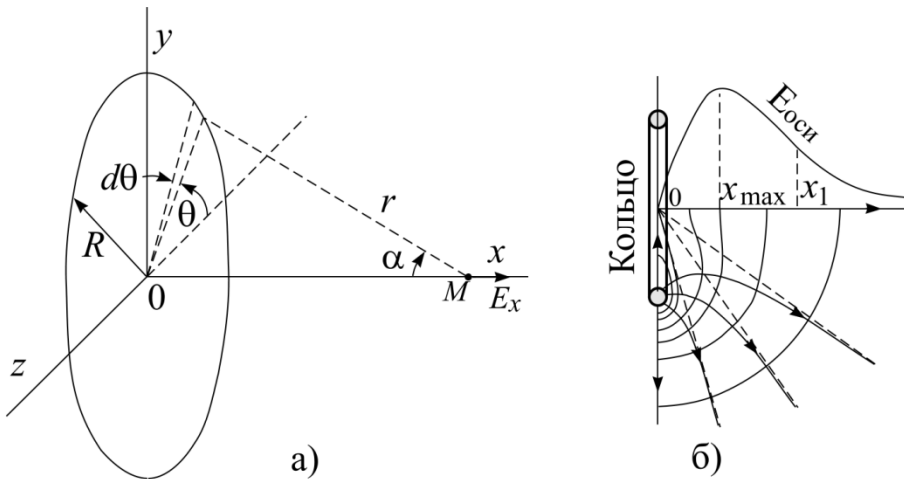


Рис. 2.16. Поле равномерно заряженного кольцевого электрода

Для получения параметров поля кольца следует взять интеграл по всей длине кольца. Обозначив угол до элемента кольца θ , пределы интегрирования получим от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$. Расстояния от любого элемента кольца до точки на оси будут равны между собой (r). Равны также и углы между r и x (угол α). После интегрирования получаем:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\epsilon_0\epsilon} \text{Sin}\alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \text{Sin}\alpha; \quad (2.84)$$

$$E_{\text{оси}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} \text{Sin}^2\alpha \text{Cos}\alpha, \quad (2.85)$$

где $Q = 2\pi R \cdot \tau$ – заряд кольца. Максимальное (по модулю) значение потенциала наблюдается при значении $\text{Sin}\alpha = 1$, т.е. угол $\alpha = 90^\circ$, что соответствует точке 0 в центре кольца. Максимальное значение

напряженности поля соответствует экстремуму функции $f = \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$. Должно выполняться соотношение $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$. Это условие выполняется в точке оси, отстоящей от центра кольца (точка 0) на величину $x = R/\sqrt{2}$. Минимальное значение напряженности ($E = 0$) соответствует центру кольца. Значение тангенса $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{0,4}$ соответствует точке перегиба функции f . Точка перегиба отстоит от центра кольца на величину $x_1 = \sqrt{2,5} \cdot R$.

§ 2.20. Поле заряженного диска

Пусть нам дан не проводящий диск с центром в точке 0 и радиусом R , заряженный равномерно с поверхностной плотностью заряда $\sigma = Q/(2\pi R^2)$. Система, как и в двух предыдущих параграфах, имеет ось симметрии C_∞ , совпадающую с осью x рис. 2.17. Задача о параметрах поля в пространстве вырождается в задачу на плоскости, содержащей ось симметрии. Наличие плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью диска, и взаимно-перпендикулярных плоскостей симметрии, содержащих ось C_∞ , позволяет, рассчитав параметры поля в четвертой части плоскости, описать поле в пространстве. Как и в предыдущем параграфе будем рассчитывать параметры поля только для точек, лежащих на оси симметрии, для которых получаются компактные аналитические выражения. Обозначения приведены на рис. 2.17. Представим заряженный диск как совокупность вложенных друг в друга тонких колец толщиной dy .

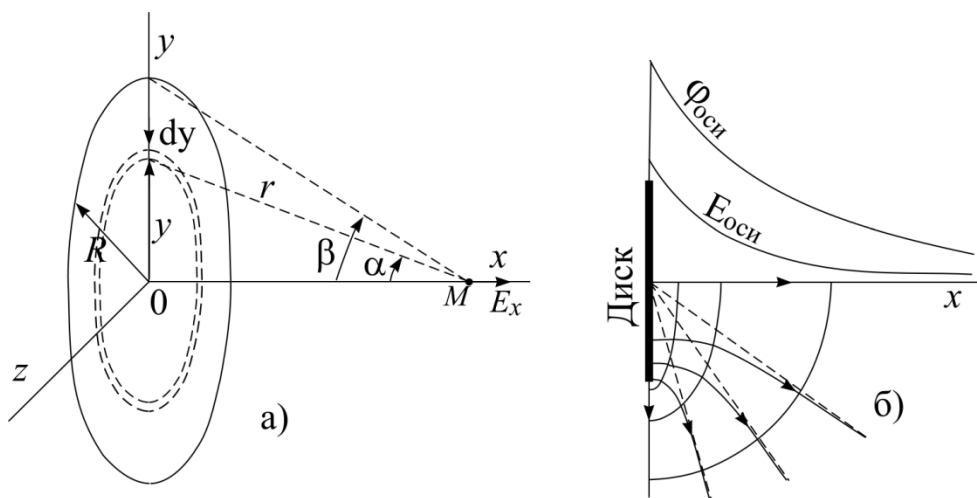


Рис. 2.17. Поле равномерно заряженного диска

Пусть радиус такого произвольно выделенного кольца равен y . Определим потенциал и напряженность от этого кольца в точке M , лежащей на оси симметрии на расстоянии x от центра диска (кольца). Для этого воспользуемся формулами (2.84), (2.85), выведенными в предыдущем параграфе. Заменяем в этих формулах линейную плотность заряда τ на поверхностную плотность σ , φ на $d\varphi$, $E_{\text{оси}}$ на $dE_{\text{оси}}$, R на $y = x \cdot \text{tg}\alpha$, Q на $dQ = \sigma \cdot 2\pi y \cdot dy$ ($dy = x \cdot d\alpha / \text{Cos}^2 \alpha$):

$$d\varphi = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos}^2 \alpha} d\alpha, \quad dE_{\text{оси}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \text{Sin}\alpha \cdot d\alpha. \quad (2.86)$$

Для получения параметров поля диска следует провести интегрирование выражений (2.86) по углу α в пределах от $\alpha = 0$ до $\alpha = \beta$, где $\text{tg}\beta = y/x$:

$$\varphi = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \int_0^\beta \frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos}^2 \alpha} d\alpha = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{\text{Cos}\beta} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \left(-x \right); \quad (2.87)$$

$$E_{\text{оси}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \int_0^\beta \text{Sin}\alpha \cdot d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \left(-\text{Cos}\beta \right). \quad (2.88)$$

В центре диска $x = 0$, $r = R$, $\beta = \pi/2$, $\text{Cos}\beta = 0$ и (2.87), (2.88) примут вид:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 \varepsilon}; \quad E_{\text{оси}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (2.89)$$

Если диск является проводящим (металлическим), то из-за взаимного отталкивания заряды распределены по поверхности неравномерно. В центре диска поверхностная плотность меньше, чем на краях. Распределение поверхностной плотности можно оценить по формуле [10]:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R \sqrt{R^2 - y^2}}. \quad (2.90)$$

В центре диска ($y = 0$) поверхностная плотность заряда σ в четыре раза меньше, чем в случае равномерного распределения заряда по площади диска ($S = \pi R^2$). Край диска соответствует значению $y = R$. Знаменатель в (2.90) обращается в нуль, а напряженность на краю стремится к бесконечности. В реальных электродных системах, когда толщина диска является конечной величиной, радиус кривизны не является бесконечно малым, и напряженность остается конечной. Расчет напряженности на краю диска проводится методом конформных отображений, который рассматривается далее в этой главе. Собственная емкость проводящего диска равна:

$$C = 8\varepsilon_0 \varepsilon K. \quad (2.91)$$

§ 2.21. Поле двух проводящих шаров различного размера

Для того, чтобы оценить зависимость напряженности электростатического поля от радиуса кривизны поверхности, рассмотрим электродную систему, состоящую из двух проводящих шаров различного радиуса, соединенных тонкой проводящей проволокой (рис. 2.18). Пусть большой шар 1 имеет радиус R_1 , а малый шар 2 – радиус r_2 . Потенциал обеих сфер одинаков из-за соединяющего сферы проводника. На сферах размещаются заряды Q_1 и q_2 , соответственно. Напряженность электростатического поля вблизи от поверхности большого шара и поверхностная плотность заряда обозначены соответственно E_1 и σ_1 . Для малого шара – E_2 и σ_2 . Провод, соединяющий шары, будет влиять на

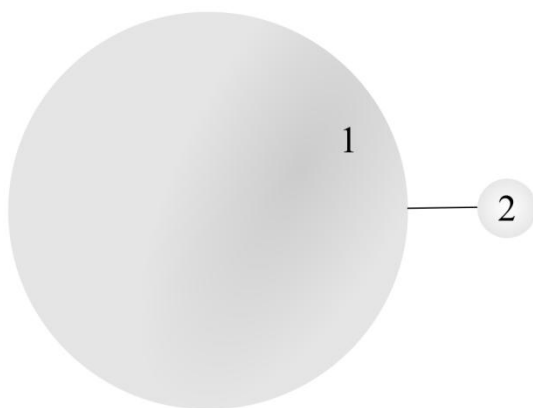


Рис. 2.18. Две сферы одинакового потенциала

распределение напряженности поля не очень сильно. Его назначение: уравнять потенциалы большого и малого шаров. Для ориентировочных оценок напряженности электродной системы из двух шаров различного размера достаточно хорошим является нулевое приближение, при котором заряды шаров расположены в их геометрических центрах. Потенциалы шаров при таком приближении соответственно равны:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{Q_1}{R_1} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_2}{r_2},$$

поскольку $\varphi_1 = \varphi_2$, $\frac{Q_1}{R_1} = \frac{q_2}{r_2}$.

Напряженность поля у поверхности пропорциональна поверхностной плотности зарядов (см. (1.22), (1.23)):

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{R_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{q_2} = \frac{r_2}{R_1}. \quad (2.92)$$

Из (2.92) следует, что у поверхности меньшей сферы поле больше. Поля обратно пропорциональны радиусам кривизны. Полученный результат позволяет понять резкое повышение напряженности поля на концах и диска. С технической точки зрения выражение (2.92) очень важно, поскольку вблизи неоднородностей начинаются частичные разряды, а при повышении напряженности поля выше пробивной может

произойти пробой или в местах повышенной напряженности может возникнуть коронный разряд. Из этого результата следует также рекомендация – все электроды высокого напряжения должны быть выполнены по возможности гладкими, закругленными, а поверхность электродов должна быть тщательно отшлифована.

§ 2.22. Метод конформных отображений

Электродные системы со сложными двумерными электростатическими полями могут быть рассчитаны методом конформных отображений. Основная идея этого метода состоит в замене сложных полей – простыми полями, для которых решения известны. К таким простым полям относятся поля плоского или цилиндрического конденсатора вдали от их краев. Метод конформных отображений является практическим применением теории функции комплексного переменного. Конформное отображение – это непрерывное отображение, сохраняющее форму бесконечно малых (б.м.) фигур. Для конформного отображения выполняется свойство постоянства углов и постоянства растяжений. Название происходит от позднелатинского – *conformis* – подобный, непрерывное отображение, сохраняющее форму бесконечно малых фигур: например, б.м. круг остается б.м. кругом; углы между линиями в точке их пересечения друг с другом не изменяются. Область применения метода конформных отображений для расчета электрических полей – двумерные электрические поля.

Конформное преобразование отображает каждую точку $z = x + jy$ реального расчетного поля, описывающегося комплексной плоскостью, в точку $w = u + jv$ другой комплексной плоскости, с более простой конфигурацией поля. Основная сложность метода – нахождение вида функции для данной реальной электродной системы. На практике, при попытках найти функцию конформного отображения, используют либо специальные каталоги конформных отображений [11,12], либо ищут ее посредством последовательных проб.

Предположим, что мы знаем вид некоторого преобразования $z = f(w)$ или обратного преобразования $w = f(z)$, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между двумя комплексными плоскостями со сложной (z) и простой (w) конфигурацией поля. **Коэффициентом преобразования** называется отношение dw/dz .

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.93)$$

здесь использованы соотношения:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{\frac{\partial x}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial(x+jy)}{\partial x}} = 1, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial z}}{\frac{\partial y}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial z}} = \frac{1}{\frac{\partial(x+jy)}{\partial y}} = \frac{1}{j} = -j. \quad (2.94)$$

Аналогично можно записать:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.95)$$

Два комплексных числа равны, если у них равны порознь действительные и мнимые части. Сравнивая значения коэффициента преобразования, приведенные в выражениях (2.93) и (2.95) можно записать:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.96)$$

Выражения (2.96) известны под названием условий Коши-Римана. Используя различные формы представления комплексных чисел, коэффициент преобразования можно записать в виде:

$$\frac{dw}{dz} = a + jb = M \cdot e^{j\varphi} = M \left[\cos \varphi + j \sin \varphi \right],$$

где $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ – коэффициент изменения длины отрезков при преобразовании, а $\operatorname{tg}(\varphi) = b/a$ (φ – угол поворота отрезков при преобразовании). Из соотношений Коши-Римана, получим:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = |\nabla u| = |\operatorname{grad} u|; \quad (2.97)$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = |\nabla v| = |\operatorname{grad} v|; \quad (2.98)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}. \quad (2.99)$$

Из соотношений (2.97)–(2.98) следует, что коэффициент конформного преобразования M является относительной напряженностью электрического поля, а каждая из функций u и v может быть выбрана в качестве потенциала на новой комплексной плоскости $w = f(u, v)$. Этот вывод может быть проверен другим способом. Если функции u и v могут быть выбраны в качестве потенциала, то каждая из них должна удовлетворять уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$. Это можно проверить непосредственным повторным

дифференцированием условий Коши-Римана. Продифференцируем первое условие по x , а второе по y ; сложим результат; перенесем в левую часть все значащие производные и оставим справа нуль:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0. \quad (2.100)$$

Из полученного выражения следует, что функция u удовлетворяет уравнению Лапласа (1.25), (1.30) и может быть принята за потенциал. Продифференцируем 1-е условие по y , а 2-е – по x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \quad \rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (2.101)$$

т.е. и функция v также удовлетворяет уравнению Лапласа и также может быть принята за потенциал. Поскольку силовые и эквипотенциальные линии на плоскости $z = f(x, y)$ взаимно перпендикулярны, а конформное преобразование оставляет неизменными углы между линиями в точке их пересечения, то из (2.97) ÷ (2.101) следует, что если функция u принята, например, за потенциал, то тогда линия с $v = \text{const}$ – является силовой линией. Если же v – потенциал, то $u = \text{const}$ – силовая линия. Какая из функций u или v является потенциалом, а какая силовой линией, следует определять из анализа конформного преобразования поля на исходной плоскости $z = f(x, y)$ в поле на плоскости $w = f(u, v)$. Любая функция $z = f(w)$ (или $w = f(z)$) дает нам решение какой-либо задачи электростатики. Можно придумать произвольную функцию, найти для нее решения, а затем к найденным решениям подобрать соответствующую электродную систему. Таким методом (задом наперед) было найдено много решений электрического поля сложных электродных систем.

При нахождении напряженности электрического поля методом конформных отображений следует учитывать следующее важное обстоятельство: картина электрического поля полностью определяется геометрическими параметрами электродной системы независимо от пространственного масштаба и приложенного напряжения. Поэтому поле может быть описано напряженностью, отнесенной к единице напряжения или длины. Выражения (2.97)–(2.98) представляют собой именно такую относительную напряженность. Для получения реальной напряженности необходимо учесть действительно приложенное напряжение и фактическое расстояние между электродами. Это делается умножением выражений (2.97)–(2.98) на коэффициент масштаба K_M . Пусть расстояние между электродами в плоскости w равно $u_2 - u_1$ ($v_2 - v_1$), если за

эквипотенциальные линии приняты функции u или v , соответственно. Тогда коэффициент масштаба принимает вид:

$$K_M = U/(u_2 - u_1) \text{ или } K_M = U/(v_2 - v_1). \quad (2.102)$$

2.22.1. Цилиндрический конденсатор

Хотя расчет электрического поля цилиндрического конденсатора приведен в § 2.5, рассмотрим его в качестве примера применения метода конформных отображений. Поле цилиндрического конденсатора (поле двух концентрических окружностей) на плоскости xu может быть отображено в однородное поле (поле плоского конденсатора) (рис. 2.19) следующим преобразованием:

$$z = e^w; x + jy = e^{u+jv} = e^u (\text{Cos}(v) + j \cdot \text{Sin}(v)).$$

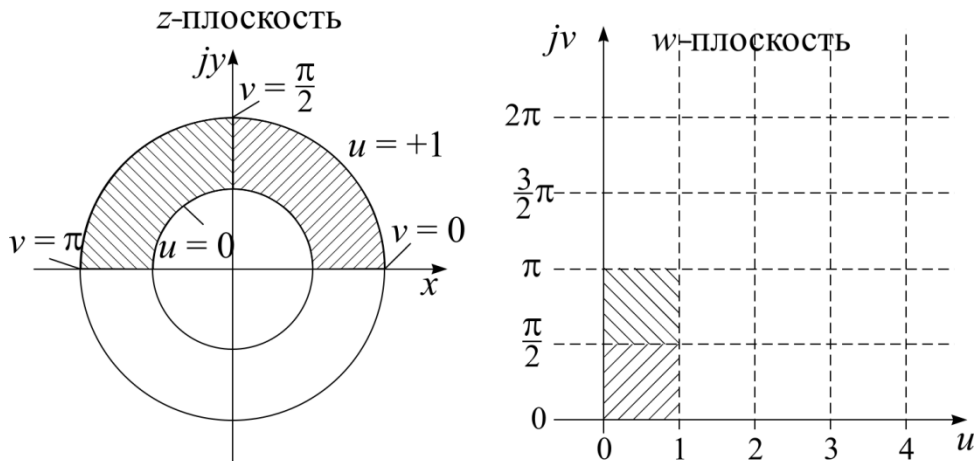


Рис. 2.19. Преобразование радиального поля в однородное поле функцией $z = e^w$

Произведем разделение действительных и мнимых частей:

$$x = e^u \text{Cos } \varphi; y = e^u \text{Sin } \varphi; e^u = \sqrt{x^2 + y^2}; \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

Прямая линия на реальной плоскости z , проходящая через начало координат с углом наклона к оси x , равным $v = \text{const}$ переходит в прямую линию на плоскости w , параллельную оси абсцисс.

При $u = \text{const}$ на плоскости w получается система прямых линий, параллельных оси ординат. На плоскости z они соответствуют системе концентрических окружностей. Очевидно, что линии с $u = \text{const}$ следует принять за потенциальные линии, а v — за силовые линии поля. Расчет напряженности будем проводить по формуле (2.97):

При $u = \text{const}$ на плоскости w получается система прямых линий, параллельных оси ординат. На плоскости z они соответствуют системе концентрических окружностей. Очевидно, что линии с $u = \text{const}$ следует принять за потенциальные линии, а v – за силовые линии поля. Расчет напряженности будем проводить по формуле (2.97):

$$u = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right); E = -\text{grad } u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$E_z' = -\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x - jy}{x^2 + y^2};$$

$$M = |E_z'| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}; \text{tg } \varphi = -\frac{y}{x}.$$

Длина преобразуемого малого отрезка при переносе с плоскости z на плоскость w изменяется в $1/r$ раз, где r – расстояние до центра окружностей. Чем дальше от центра, тем меньше коэффициент изменения длин отрезков. Переносимый отрезок поворачивается на угол $\varphi = \text{arctg}(-y/x)$. Угол между лучом, идущим из начала координат в середину преобразуемого отрезка, и осью x становится равным нулю. Все радиусы на z -плоскости превращаются на w -плоскости в линии параллельные оси u . Масштабный коэффициент:

$$K_M = \frac{U}{u_2 - u_1} = \frac{U}{\ln\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right) - \ln\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)} = \frac{U}{\ln r_2 - \ln r_1} = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Напряженность:

$$E_z = E_z' \cdot K_M = \frac{1}{r} \frac{U}{\ln r_2 / r_1}. \quad (2.103)$$

Полученная формула (2.103) совпадает, как и следовало ожидать в силу теоремы о единственности, с выражением (2.18), полученным с помощью теоремы Остроградского – Гаусса.

2.22.2. Поле внутри прямого угла, образованного двумя плоскостями

В качестве другого примера применения метода конформных отображений рассмотрим поле, образованное двумя бесконечными проводящими взаимно перпендикулярными плоскостями. Очевидно, что такая электродная система имеет трансляционную симметрию с

бесконечно малым шагом трансляции вдоль плоскостей и плоскость симметрии, проходящую под углом 45° к каждой из плоскостей. Такое поле сводится к двумерному полю, а для определения его параметров достаточно рассчитать характеристики поля между одной из плоскостей и плоскостью симметрии. Для двумерных полей может быть применен метод конформного отображения. Поле в z -плоскости, перпендикулярной линии пересечения заряженных плоскостей, показано на рис. 2.20а. За оси x и y приняты линии пересечения заряженных плоскостей с z -плоскостью. Поле внутри прямого угла, образованного двумя плоскостями, преобразуется в однородное поле преобразованием $w = z^2$. Покажем это:

$$w = u + jv = z^2 = (x+jy)^2 = x^2 + j^2 xy - y^2; u = x^2 - y^2; v = +j^2 xy.$$

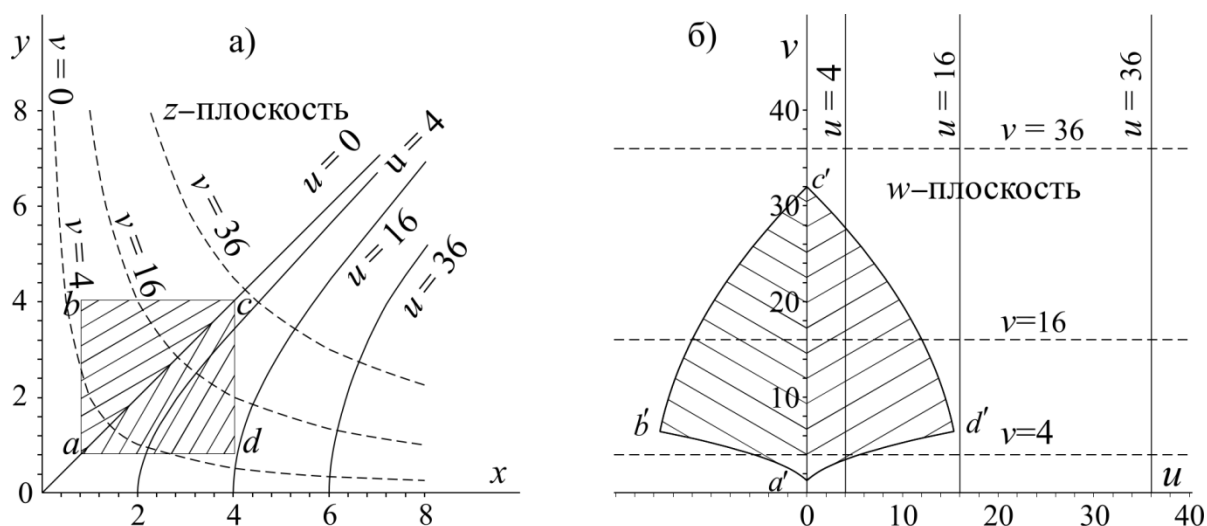


Рис. 2.20. Преобразование поля двух плоскостей в однородное поле

При $u = \text{const}$ линии, параллельные оси v на плоскости w , преобразуются в семейство равнобочных гипербол $x^2 - y^2 = a^2$ на плоскости z . Ось $0x$ является действительной (фокальной) осью гипербол, а ось y – ее мнимой осью. Прямая линия, проходящая через начало координат под углом 45° к оси x ($u = 0; y = x$), представляет собой линию пересечения z -плоскости с плоскостью симметрии и является асимптотой гипербол. Угол пересечения гипербол с осью x равен 90° , т.е. линии функции $u = x^2 - y^2$ перпендикулярны эквипотенциальной линии x (поверхности заряженной плоскости x).

Функции $v = 2xy$ при различных значениях v описывают другое семейство равнобочных гипербол, у которых оси x и y являются асимптотами, а линия $y = x$ является фокальной осью. На рис. 2.20а представлены гиперболы с $v = 4, 16, 36$. При $v = 0$ гипербола вырождается в оси координат x и y , которые совпадают с заряженными плоскостями.

Поскольку поверхность заряженных плоскостей является поверхностью одинакового потенциала, очевидно, что именно функция v должна быть принята за потенциальную функцию на плоскости w . В этом случае функция u представляет собой силовую функцию. Поле двух бесконечных взаимно перпендикулярных плоскостей (оси x и y на z -плоскости) превращается в однородное поле бесконечной заряженной плоскости (ось v на w -плоскости).

Конформное преобразование, сохраняя форму бесконечно малых фигур, может существенно изменить форму конечных фигур. В качестве примера такого изменения приведено преобразование квадрата $abcd$ координатами $a(0,8;0,8)$, $b(0,8;4)$, $c(4;4)$, $d(4;0,8)$ на z -плоскости в криволинейный четырехугольник $a'b'c'd'$ с координатами $a'(0;1,28)$, $b'(-15,36;6,4)$, $c'(0;32)$, $d'(15,36;6,4)$ на w -плоскости.

Определим относительную напряженность электрического поля заряженных плоскостей рис. 2.20а. Из двух формул (2.97) и (2.98) для определения напряженности будем использовать (2.98), поскольку именно функция $v = 2xy$ описывает систему эквипотенциальных поверхностей (линий). Линейный коэффициент преобразования:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad |E_z'| = M = \sqrt{e_y^2 + e_x^2} = 2r, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (2.104)$$

Длина преобразуемого малого отрезка при переносе с z -плоскости на w -плоскость увеличивается в $2r$ раз, где $r = x^2 + y^2$ – расстояние на z -плоскости от начала координат до центра отрезка. Переносимый отрезок поворачивается на угол $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Происходит удвоение угла между лучом, идущим из начала координат в середину отрезка, и осью x . Масштабный коэффициент $K_M = U/(v_2 - v_1) = U/(2x_2y_2 - v_1 2x_1y_1)$. Напряженность поля определится умножением относительной напряженности на масштабный коэффициент: $E = E'K_M$. Пусть масштабный коэффициент равен $K_M = 100$ в/м. Определим напряженность поля в двух точках на заряженной плоскости: более близкой к углу пересечения плоскостей $n_1(1;0)$ и отдаленной от него $n_2(5;0)$.

$$E_{n_1} = 100 \cdot 2\sqrt{1^2 + 0} = 200 \text{ в/м}, \quad E_{n_2} = 100 \cdot 2\sqrt{5^2 + 0} = 1000 \cdot \text{в/м}.$$

Чем ближе к углу, тем меньше напряженность поля. Этот результат можно было ожидать из картины поля рис. 2.20: расстояние между эквипотенциальными линиями уменьшается при удалении от угла. Любое углубление (вмятина, впадина, каверна, трещина и т.п.) на поверхности электрода может быть приблизительно описано рассмотренной задачей. Тогда, учитывая результаты предыдущего параграфа, можно заключить: вблизи острия или выступа напряженность электрического поля повышается,

а вблизи впадины или отверстия она слабеет. Аналогичная рис. 2.20а картина поведения силовых и эквипотенциальных линий наблюдается вблизи точки ветвления поля от двух одноименных зарядов (§ 2.11).

2.22.3. Поле на краю плоского конденсатора (профиль Роговского)

Поместим начало координат на z -плоскости так, чтобы ось x была параллельна плоскостям обкладок конденсатора и находилась от них на одинаковом расстоянии a (рис. 2.21). Ось y перпендикулярна обкладкам и проходит через их края. Функцию отображения поля на краю плоского конденсатора в однородное поле получил Ю.К. Максвелл в 1881 г. в виде:

$$z = \frac{a}{\pi} \left(w + 1 + e^w \right), \quad (2.105)$$

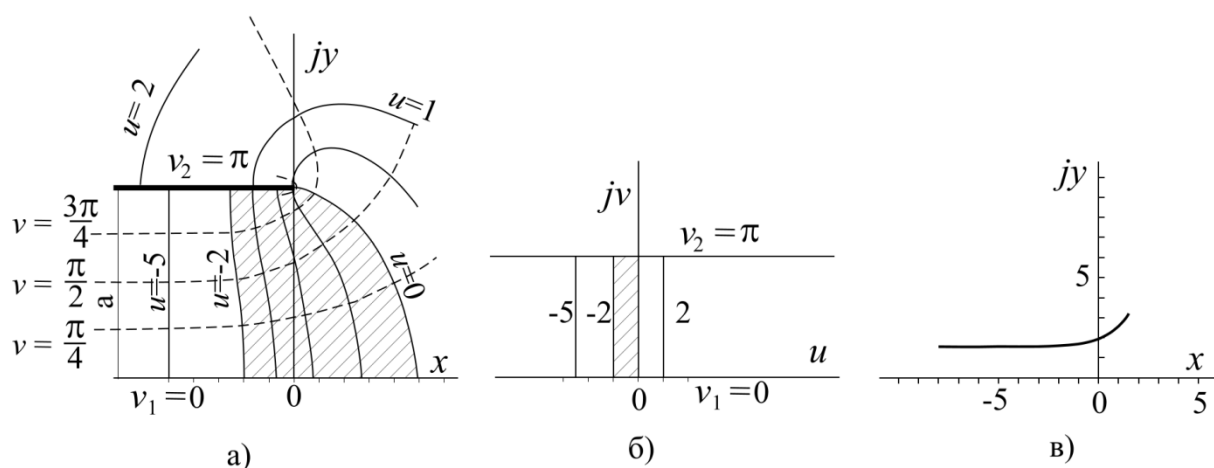


Рис. 2.21. Преобразование поля на краю плоского конденсатора в однородное функцией Максвелла $z = \frac{a}{\pi}(w + 1 + e^w)$

После разделения переменных получаем:

$$z = x + jy = w = \frac{a}{\pi} \left(1 + e^u \cdot \text{Cos}v \right) + j \left(1 + e^u \cdot \text{Sin}v \right),$$

$$x = \frac{a}{\pi} \left(1 + e^u \cdot \text{Cos}v \right); \quad y = \frac{a}{\pi} \left(1 + e^u \cdot \text{Sin}v \right).$$

При $v_1 = 0, y = 0, x = \frac{a}{\pi} \left(1 + e^u \right)$. При $v_2 = \pi, y = a, x = \frac{a}{\pi} \left(1 - e^u \right)$.

Очевидно, что за потенциальную функцию следует выбрать функцию v .

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{a}{\pi} e^u \cdot \text{Sin}v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{a}{\pi} \left(1 + e^u \cdot \text{Cos}v \right),$$

$$M = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\pi}{a\sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v}}.$$

Учитывая, что $K_M = U/(v_2 - v_1) = U/\pi$,

$$E = \frac{U}{a\sqrt{1 + e^{2u} + 2e^u \cos v}}. \quad (2.106)$$

При $u < -5$ в области от $v_1 = 0$ до $v_2 = \pi$ получается практически однородное поле с напряженностью U/a . При $u \rightarrow 0$ напряженность на электроде ($v = v_2 = \pi$) сильно возрастает и стремится к бесконечности при $u = 0$. Наибольшая напряженность в реальных системах не обращается в бесконечность и может быть определена:

$$E_{\max} = \frac{U}{a\sqrt{2 + 2\cos v}}. \quad (2.107)$$

При конечной толщине обкладки конденсатора $v \neq \pi$ и напряженность остается конечной. Величину v следует подбирать так, чтобы эквипотенциальная поверхность совпала с реальной поверхностью обкладки конденсатора. Пусть $v = 174^\circ = 29\pi/30$, тогда отношение напряженности у края электрода к средней напряженности:

$$E_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\left[1 + 2\cos\left(\frac{29}{30}\pi\right)\right]}} = 10.$$

Видно, что у даже довольно тупого края напряженность резко возрастает. Это отношение можно сделать близким к единице, если поверхность электрода выполнить в виде эквипотенциальной поверхности с $v \leq \pi/2$. Такой профиль электрода называется **профилем Роговского** (рис. 2.21в). При расстоянии $a = \pi$ (между обкладками расстояние 2π) он имеет координату $v = \pi/2$ и для него

$$x = u + 1; y = \pi/2 + e^u, \text{ т.е. } y = \pi/2 + e^{(x-1)}. \quad (2.108)$$

Профиль Роговского имеет большое практическое значение в экспериментах по пробоем в поле, близком к однородному для устранения краевого эффекта [3]. В центре устройства с электродами Роговского имеет место однородное поле.

2.22.4. Поле расщепленных проводов

В линиях электропередачи высокого напряжения фазовый провод расщепляют на несколько проводников в целях уменьшения потерь

передаваемой мощности из-за коронного разряда. Для описания поля расщепленного провода можно пользоваться функцией отображения:

$$z = a\sqrt[n]{e^w + 1},$$

где n – число отдельных проводников, на которые расщепляется фазовый провод. В качестве иллюстрации метода конформных отображений рассмотрим расщепление на два провода ($n = 2$).

Пусть плоскость z перпендикулярна расщепленным проводам. Выберем ось x на z -плоскости таким образом, чтобы она проходила через оси проводов (рис. 2.22). Пусть ось y проходит через середину отрезка между проводами. Решение существенно упрощается, если находить не функции $x, y = f(u, v)$, а функции $u, v = f(x, y)$. Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$u = \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^2 - 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} + 1 \right], \quad v = \operatorname{arctg} \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}.$$

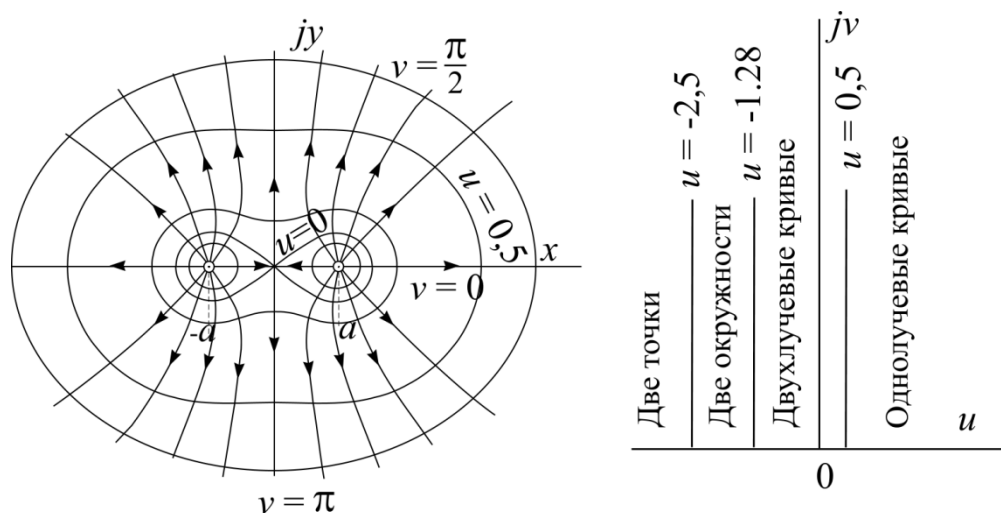


Рис. 2.22. Преобразование поля провода, расщепленного на два в однородное поле функцией $z = a\sqrt[n]{e^w + 1}$

Эквипотенциальным линиям соответствует функция u . Чтобы функция u равнялась нулю, логарифм должен быть равен нулю, а выражение в квадратных скобках должно быть равно 1. Тогда выполняется соотношение:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Эта функция проходит через начало координат z -плоскости. При u в диапазоне $-1,28 < u < 0$ на z -плоскости наблюдаются круговые области справа и слева от оси y . При $u \leq -1,28$ это практически точки с координатами $x = -a$ и $x = a$. При $u > 0$ решениями являются замкнутые кривые, которые при возрастании u приближаются по форме к окружностям. Эти кривые представляют собой потенциальные линии поля

двух цилиндров с зарядами одного знака, т.е. поля двух проводов с одним потенциалом. Наибольший интерес представляют точки на поверхности проводов p_2 и p_1 , в которых, соответственно, наибольшая и наименьшая напряженности поля. Точка p_2 находится на поверхности провода в наиболее удаленной от другого провода точке и имеет координаты:

$$x_2 = a + a\sqrt{1 - e^{u_1}}, y = 0.$$

Точка p_1 находится на поверхности провода в наиболее близкой к другому проводу точке и имеет координаты:

$$x_1 = a + a\sqrt{1 + e^{u_1}}, y = 0.$$

Значение u_1 соответствует эквипотенциальной поверхности, совпадающей с поверхностью провода. Относительная напряженность в произвольной точке определится выражением (2.97):

$$E_z' = \frac{2}{a^2} \frac{\left[x^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \right)^2 + y^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right)^2 - 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} + 1}.$$

$$\text{При } y = 0 \quad E_z' = \frac{2}{a^2} \frac{x}{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

$$\text{Для точек } p_1 \text{ (} p_2 \text{): } E_z' \big|_{p_1} = \frac{2}{a} \frac{\sqrt{1 - e^{u_1}}}{e^{u_1}}; \quad E_z' \big|_{p_2} = \frac{2}{a} \frac{\sqrt{1 + e^{u_1}}}{e^{u_1}}.$$

Введем следующие характеристики расщепления:

- а) r – радиус провода; б) s – расстояние между проводами одной фазы;
- в) $b = s/r$ – отношение расстояния между проводами к их радиусу;
- г) $p = (a+r)/r$ – отношение расстояния от начала координат до точки с максимальной напряженностью к радиусу провода.

$$b = \frac{s}{r} = \frac{2a}{a(\sqrt{1 + e^{u_1}} - 1)}, \quad u_1 = \ln \left[\left(\frac{2}{b} + 1 \right)^2 - 1 \right].$$

С учетом масштабного коэффициента для точки p_2 получаем:

$$E_{\Phi_2} \approx \frac{U}{a} \frac{\Phi^{-1} \left(1 + \frac{b}{2} \right)}{\left(1 + b \right) \ln \left(\frac{p + \frac{b}{2}}{\sqrt{1+b}} \right)}. \quad (2.109)$$

При $s \rightarrow 0$ электродная система превращается в систему двух коаксиальных цилиндров ($b = 0, s = 0$) (см.(2.18)):

$$E_{\Phi_2} \approx \frac{U}{r \ln \frac{a+r}{r}}.$$

Обычно для линии электропередачи $p \geq 200$.

§ 2.23. Поля с объемным зарядом

До сих пор в данной главе рассматривались электростатические поля, не содержащие объемных зарядов и описываемые дифференциальным уравнением Лапласа. Если в пространстве имеются носители зарядов, суммарный заряд которых не равен нулю в некоторых конечных областях (между электродами, например), то такие поля называются полями с **объемными зарядами**. Описание такого поля проводится с помощью уравнения Пуассона. Основная трудность, с которой сталкиваются при решении уравнений Пуассона, заключается в том, что в большинстве случаев неизвестен характер распределения объемных зарядов, а не в математических проблемах решения собственно дифференциального уравнения.

В газах свободные носители зарядов возникают в результате ионизации нейтральных молекул или атомов. Ионизация может происходить по естественным причинам: космическое излучение, радиоактивность земли, соударение молекул в результате теплового движения или заряженных частиц, ускоренных в электрическом поле с нейтральными частицами. Время жизни свободных электронов, возникающих в результате ионизации, невелико. Они могут захватываться нейтральными частицами, образуя отрицательные ионы, или осаждаться на взвешенных в среде частицах. Обратный ионизации процесс – рекомбинация частиц различной полярности. Он может происходить как в пространстве, так и на поверхности электродов. Процессы ионизации и рекомбинации зависят от концентрации носителей зарядов в пространстве. Изменение концентрации носителей заряда вследствие теплового движения, дрейфа в электрическом поле и диффузии

приводит к изменению объемного заряда. Эти процессы в общем случае достаточно сложны в описании. Удовлетворительное представление реальных полей с объёмным зарядом возможно лишь при ряде упрощающих допущений. На практике чаще встречается обратная задача: задана электродная система (координаты электродов, их форма и потенциалы) и по измеренному распределению напряженности поля требуется найти распределение объёмного заряда. С точки зрения теории поля обе задачи практически одинаковы.

§ 2.23.1. Плоское поле с объёмным зарядом

Рассмотрим поле плоского конденсатора с разностью потенциалов между обкладками U . Пусть расстояние между обкладками d значительно меньше размеров пластин, так что поле можно считать однородным. В газовой диэлектрике между пластинами существует объёмный заряд с плотностью ρ . В этом случае потенциал должен удовлетворять не уравнению Лапласа (2.1), как рассматривалось ранее, а уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2.110)$$

После интегрирования с учетом граничных условий $\varphi(x=0) = 0$, $\varphi(x=d) = U$ формулы для потенциала и напряженности поля примут вид:

$$\varphi = \frac{U}{d}x + \frac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon}x^2 - \frac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon}x^2, \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{U}{d} - \frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon}x.$$

Найдем отношение напряженности поля при наличии объёмного заряда к напряженности поля без объёмного заряда E_x/E_0 :

$$\frac{E_x}{E_0} = 1 - \frac{\rho d}{2\epsilon_0\epsilon U} \left(1 - 2\frac{x}{d}\right) = 1 - \delta \left(1 - 2\frac{x}{d}\right). \quad (2.111)$$

При $\delta = 1$ (равномерное распределение объёмного заряда в пространстве) при $x = d$ напряженность поля в два раза выше, чем в отсутствие объёмного заряда ($\delta = 0$). При $\delta = 1$ величина объёмного заряда примерно в два раза больше заряда на электродах.

§ 2.23.2. Сферический конденсатор с объёмным зарядом

Для снижения напряженности электрического поля в технике высоких напряжений широко применяются сферические экраны. Вблизи поверхности такого экрана вследствие ионизации воздуха может образоваться объёмный заряд. Сферический экран можно представить как сферический конденсатор, у которого радиус внешнего электрода бесконечно велик, а плотность объёмного заряда быстро уменьшается в направлении от внутреннего электрода к внешнему. Например, при

радиусе внутреннего экрана $r_1 = 35$ см и постоянном напряжении на экране 1 МВ объемная плотность убывает как четвертая степень расстояния от центра экрана: $\rho(r) = a/r^4$, где $a = 4 \cdot 10^{-5}$ К·см [3]. Для расчета поля используется уравнение Пуассона в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon r^4},$$

решение которого имеет вид:

$$E = \frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon r^3} + \frac{K_1}{r^2}, \quad (2.112)$$

$$\varphi = -\frac{a}{2\varepsilon_0 \varepsilon r^2} - \frac{K_1}{r}, \quad (2.113)$$

где $K_1 = -41.5$ МВ·см [3].

Положительный объемный заряд у положительного электрода снижает напряженность поля у поверхности, что приводит к замедлению образования объемного заряда вследствие ионизации.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите фундаментальные уравнения Лапласа в пространстве, однородном и плоскопараллельном поле.
2. Приведите формулы для расчета потенциала и напряженности поля точечного заряда. Определите емкость одиночного металлического шара.
3. Приведите формулы для расчета потенциала и напряженности поля одиночной бесконечно тонкого прямого провода бесконечной длины.
4. Где в коаксиальном кабеле напряженность поля максимальна? Найдите оптимальный диаметр внутренней жилы при заданном размере внешней оболочки и разности потенциалов между ними. Определите погонную емкость коаксиального кабеля.
5. Для чего изготавливают кабели с изоляцией из различных типов диэлектриков?
6. Объясните конструкцию конденсаторного ввода и его назначение.
7. В чем состоит метод наложения, и что такое частичная емкость?
8. Что такое электрический диполь, каковы характеристики поля диполя? Для объяснения каких явлений используется понятие диполя?
9. В чем состоит сходство и различие полей двух одноименных и разноименных зарядов?
10. Графически изобразите поле двух разноименно заряженных бесконечных осей. Приведите формулы для расчета такой системы и укажите точки с максимальной напряженностью поля.
11. В чем состоит метод отражения? Объясните сущность метода на примере расчета параметров поля одиночного провода над землей.

12. Приведите методику расчета параметров поля точечного заряда, расположенного вблизи металлического шара.

13. Определите напряженность электрического поля на поверхности одиночного провода, расположенного над землей.

14. Как определить параметры поля трехфазной линии?

15. Определите максимальную напряженность шарового разрядника.

16. Приведите методику нахождения параметров поля, создаваемого проводником конечной длины.

17. Приведите методику нахождения параметров поля, создаваемого кольцевым зарядом.

18. Приведите методику нахождения параметров поля, создаваемого заряженным диском.

19. Как зависят параметры поля от радиуса закругления поверхности электрода? Для чего следует сглаживать и шлифовать поверхности электродов высокого напряжения?

20. Поясните сущность метода конформных отображений и перечислите последовательность расчета по этому методу.

21. Что такое профиль Роговского?

22. Как возникает объемный заряд, и как он изменяет характеристики электрического поля?

23. Какая из характеристик электрического поля является аналогом энергии?

24. Какая из характеристик электрического поля является аналогом силы?

25. С какой целью на линиях электропередач с номинальным напряжением 330 кВ и выше проводник одной фазы выполняют расщепленным на несколько параллельных проводников? Укажите точки с максимальной напряженностью на расщепленных проводах. Каковы расстояния между расщепленными проводниками?

26. Где напряженность электрического поля вблизи поверхности земли выше: в углублении (яме, овраге) или на возвышении (холм, бугор)? Ответ поясните графически и расчетом.

27. Как изменяется напряженность электрического поля на уровне земли под одноцепной линией электропередач с горизонтальным расположением фазных проводов?

28. Приведите алгоритм расчета емкости на землю трехфазной ВЛ.

29. С какой целью на аппаратах высокого напряжения ставятся кольцевые экраны?

30. Выведете формулы расчета параметров цилиндрического конденсатора.

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ

§ 3.1. Дифференциальный метод расчета электрических полей

3.1.1. Основы метода

Дифференциальный метод расчета электрических полей основан на том, что любую функцию (в том числе и потенциал) можно разложить в ряд по малому параметру. Какой бы сложной ни была зависимость потенциала от координат, он может быть представлен в виде:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{d\Phi}{dr} \cdot (r - r_0) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2\Phi}{dr^2} \cdot (r - r_0)^2 + \dots, \quad (3.1)$$

где Φ – потенциал в точке с координатами r , который следует определить, Φ_0 – потенциал в точке с координатами r_0 , который известен (или наоборот).

Рассмотрим частный случай плоского поля. Тогда (3.1) будет иметь вид:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{1!} \cdot \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot (y - y_0) \right] + \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cdot (x - x_0)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \cdot (y - y_0)^2 \right] + \dots \quad (3.1)$$

На рис. 3.1 показаны точки электрического поля 1, 2, 3 и 4 в которых определены потенциалы Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и Φ_4 , соответственно. Расстояние между всеми этими точками одинаково и равно некоторой величине a . Потенциал в начале координат неизвестен и его следует выразить через известные потенциалы в точках 1, 2, 3 и 4.

Воспользуемся формулой 3.2 и запишем потенциал в точках 1, 2, 3 и 4 через потенциал в начале координат (точка 0):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 + a \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot a \cdot 0 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + 0^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right); \\ \Phi_2 &= \Phi_0 + 0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + a \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(0^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot 0 \cdot a \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right); \\ \Phi_3 &= \Phi_0 - a \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot a \cdot 0 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + 0^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

$$\Phi_4 = \Phi_0 + 0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(0^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot 0 \cdot a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right).$$

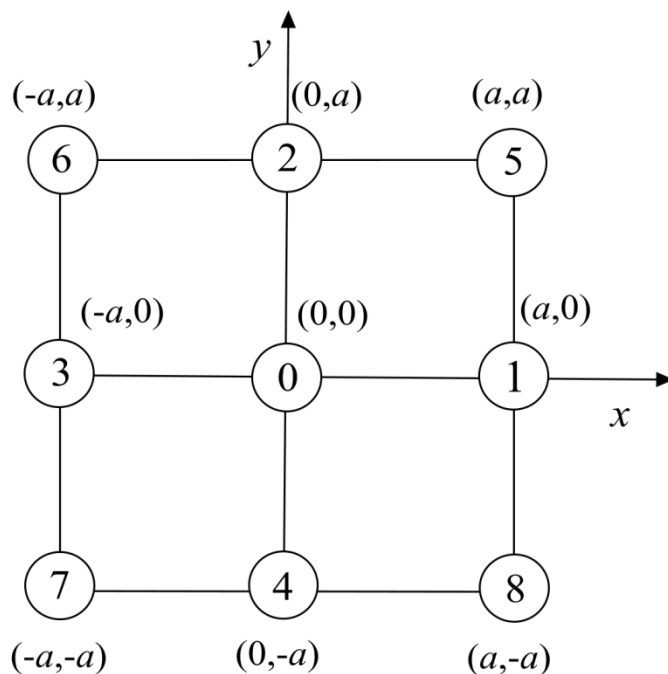


Рис. 3.1. Четырехугольная сетка с шагом a

Просуммируем уравнения:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 4 \cdot \Phi_0 + a \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + a \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right).$$

Второй и третий члены справа обращаются в нуль, а четвертый представляет собой уравнение Лапласа для двумерного поля в декартовой системе координат, т.е. тоже равен нулю. В результате получаем:

$$\sum_{i=1}^4 \Phi_i = 4 \cdot \Phi_0, \text{ или } \Phi_0 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \Phi_i. \quad (3.3)$$

Формулу (3.3) называют **формулой четырехугольника**.

Используя разложение (3.2), можно определить потенциалы в диагональных точках 5, 6, 7 и 8:

$$\Phi_5 = \Phi_0 + a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right);$$

$$\Phi_6 = \Phi_0 - a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right);$$

$$\Phi_7 = \Phi_0 - a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right);$$

$$\Phi_8 = \Phi_0 + a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(0^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right).$$

Проводя суммирование уравнений и учитывая, что Лапласиан $\Delta \Phi = 0$, получим **диагональную формулу**:

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 \Phi_i \quad (3.4)$$

При наличии каких-либо элементов симметрии формулы (3.3) и (3.4) упрощаются. Например, при наличии диагональной плоскости симметрии, проходящей через элементы 7, 0, 5 формула четырехугольника может быть заменена формулой:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_4)$$

а при наличии плоскости симметрии, проходящей через элементы 3, 0, 1, диагональную формулу можно заменить формулой:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} (\Phi_7 + \Phi_8)$$

При наличии нескольких элементов симметрии формулы еще больше упрощаются.

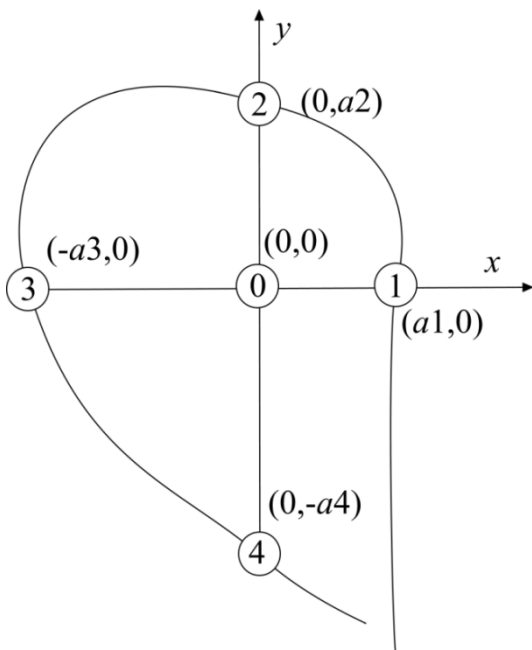


Рис. 3.2. Краевая область поля

При определении поля в некоторых случаях граница поля не может быть представлена, как на рис. 3.1, а имеет более сложную конфигурацию, показанную на рис. 3.2. Здесь все расстояния между началом координат и точками 1, 2, 3 и 4 не равны между собой, а пропорциональны произвольному множителю, в качестве которого может быть выбрана, например, единица измерения. В этом случае потенциалы в точках 1, 2, 3 и 4 можно выразить через потенциал точки 0 следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 + a1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(a1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \\ \Phi_2 &= \Phi_0 + a2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a2^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right); \\ \Phi_3 &= \Phi_0 - a3 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(a3^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \\ \Phi_4 &= \Phi_0 - a4 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(a4^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_1}{a1} + \frac{\Phi_3}{a3} &= \frac{\Phi_0}{a1} + \frac{\Phi_0}{a3} + \frac{a1 + a3}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right), \\ \frac{1}{a1 + a3} \cdot \left(\frac{\Phi_1}{a1} + \frac{\Phi_3}{a3} \right) &= \frac{\Phi_0}{a1 \cdot a3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \\ \frac{\Phi_2}{a2} + \frac{\Phi_4}{a4} &= \frac{\Phi_0}{a2} + \frac{\Phi_0}{a4} + \frac{a2 + a4}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{1}{a2 + a4} \cdot \left(\frac{\Phi_2}{a2} + \frac{\Phi_4}{a4} \right) &= \frac{\Phi_0}{a2 \cdot a4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \\ \frac{1}{a1 + a3} \cdot \left(\frac{\Phi_1}{a1} + \frac{\Phi_3}{a3} \right) + \frac{1}{a2 + a4} \cdot \left(\frac{\Phi_2}{a2} + \frac{\Phi_4}{a4} \right) &= \Phi_0 \cdot \left(\frac{1}{a1 \cdot a3} + \frac{1}{a2 \cdot a4} \right)\end{aligned}$$

Окончательно формула четырехугольника принимает вид:

$$\Phi_0 = \frac{\frac{1}{a1 + a3} \cdot \left(\frac{\Phi_1}{a1} + \frac{\Phi_3}{a3} \right) + \frac{1}{a2 + a4} \cdot \left(\frac{\Phi_2}{a2} + \frac{\Phi_4}{a4} \right)}{\frac{1}{a1 \cdot a3} + \frac{1}{a2 \cdot a4}}. \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что в случае равенства $a^1 = a^2 = a^3 = a^4 = a$ формула (3.5) переходит в формулу четырехугольника (3.3).

В случае слоистых диэлектриков, которые используются в аппаратах высокого напряжения, требуется определить потенциал точки, лежащей на границе раздела двух сред, различающихся диэлектрическими постоянными. В этом случае следует пользоваться методом наложения, а различие диэлектрических проницаемостей в уравнении поля учитывать в виде:

$$\varepsilon_i \Delta \Phi = 0. \quad (3.6)$$

На границе раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 выполняются следующие соотношения:

- потенциалы равны (непрерывны) $\Phi_1 = \Phi_2$;
- нормальные компоненты плотности смещения равны $D_1 = D_2$;
- тангенциальные компоненты напряженности поля равны $E_1 = E_2$.

Учитывая эти соотношения, граница раздела двух сред может быть изображена в виде, представленном на рис. 3.3. Тогда для формулы четырехугольника можно записать:

$$4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Phi_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\Phi_1 + \Phi_3) + 2\varepsilon_1\Phi_2 + 2\varepsilon_2\Phi_4;$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \left[\Phi_1 + \Phi_3 + \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left(\Phi_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Phi_4 \right) \right]. \quad (3.7)$$

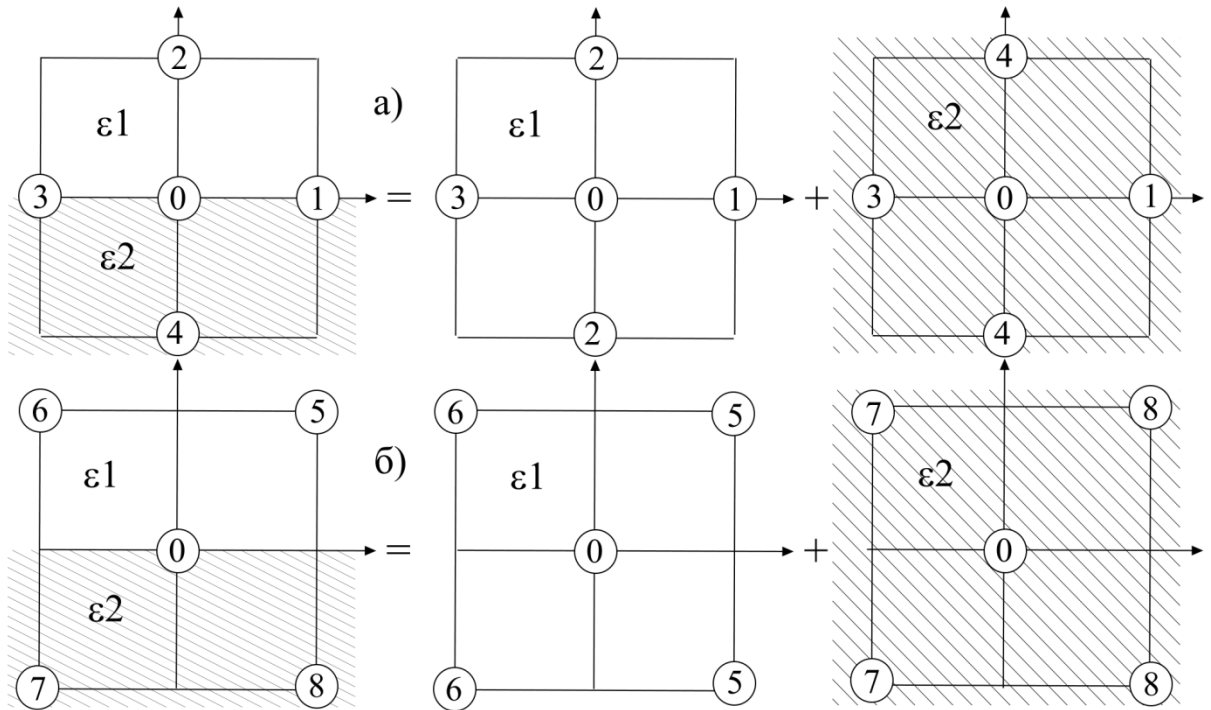


Рис. 3.3. Представление границы раздела диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 с помощью формулы четырехугольника а) и диагональной формулы б)

Для диагональной формулы:

$$4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Phi_0 = 2\varepsilon_1(\Phi_5 + \Phi_6) + 2\varepsilon_2(\Phi_7 + \Phi_8);$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)} \left[\Phi_5 + \Phi_6 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\Phi_7 + \Phi_8) \right]. \quad (3.8)$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ формулы (3.7) и (3.8) переходят в формулы (3.3) и (3.4), соответственно.

3.1.2. Порядок расчета

Порядок расчета по дифференциальному методу следующий: на первом этапе все рассчитываемое пространство следует заполнить сеткой из элементов, рассмотренных выше. Важно, чтобы края пространства и границы раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями как можно точнее совпадали с сеткой. Затем, каждому узлу сетки приписывается определенный потенциал $\Phi_{i,k}$. Важным моментом на этом этапе является факт, что потенциал на границах поля известен. Неизвестные потенциалы рассчитываются по формуле (3.3)÷(3.8).

Существуют два подхода к определению неизвестных потенциалов сетки. Первый вариант связан с непосредственным решением систем уравнений четырехугольников и диагональных уравнений. Этот способ связан с написанием матриц высокого ранга, в которых в основном содержатся нули и только вблизи главной диагонали появляются значения, отличные от нуля.

При втором – итерационном методе решения, сначала всем узлам сетки с неизвестными потенциалами приписываются из общих соображений оценочные потенциалы. Затем эти оценочные потенциалы уточняются по уравнениям 3.3÷3.8. Точность нахождения потенциала зависит от числа итераций, которое определяет время решения задачи. Шаг итерации означает однократный расчет потенциалов по всем узлам сетки. Сходимость метода зависит от таких параметров как конфигурация поля, направление обхода сетки, правильность задания оценочных потенциалов и т.п.

3.1.3. Дробление сетки

Точность определения параметров поля по дифференциальному методу зависит от шага сетки. Часто возникает ситуация, когда требуется уточнить параметры поля в области с резкими изменениями потенциала. Это означает, что после расчета параметров с выбранным шагом сетки требуется уменьшить шаг, т.е. раздробить сетку и найти потенциалы

промежуточных точек. Такая операция выполняется непосредственно по формуле четырехугольника и диагональной формуле. Достаточность дробления сетки определяется по всем восьми точкам рис. 3.1, а в разложении (3.1) учитываются шесть членов. В этом случае формула восьми точек рис. 3.1 имеет вид:

$$\Phi_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 \Phi_i + \frac{1}{20} \sum_{i=5}^8 \Phi_i. \quad (3.9)$$

При выполнении уравнения (3.9) дальнейшее дробление сетки можно прекратить.

3.1.4. Трехмерные поля

При расчете трехмерных полей по дифференциальному методу пространство заполняется кубической сеткой. Подобно формуле четырехугольника (3.3) в случае двумерной сетки можно получить формулу для куба:

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i \quad (3.10)$$

и диагональную формулу

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \sum_{i=7}^{14} \Phi_i. \quad (3.11)$$

Как и в случае плоского поля вычисления в трехмерном случае проводятся итерационным методом, однако объем вычислений резко возрастает. Поэтому указанный способ довольно трудоемок и предпочтение отдается методу эквивалентных зарядов.

3.1.5. Поля с цилиндрической симметрией

Трехмерные поля довольно часто обладают цилиндрической симметрией или приближенно могут быть заменены таковыми (рис. 3.4). Это позволяет свести задачу к двумерному полю, а при расчете использовать уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат.

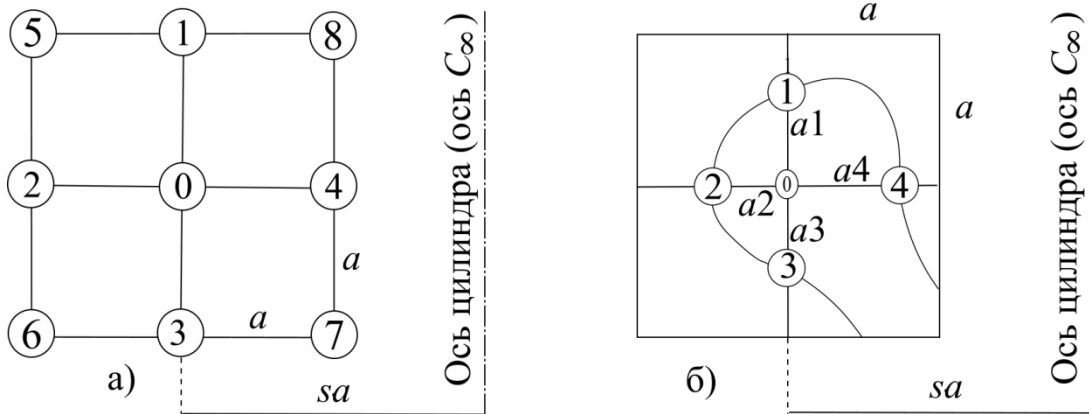


Рис. 3.4. Сетка поля с цилиндрической симметрией:
а) вдали от границы поля; б) область поля на границе

Поскольку система имеет ось симметрии C_∞ , производная от потенциала по θ равна нулю и в разложении (3.2) остаются только производные по r и z , которые следует подставить вместо x и y . Формула четырехугольника и диагональная формула в случае цилиндрического поля принимают вид:

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Phi_i + \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{8s}; \quad (3.12)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 \Phi_i + \frac{\Phi_5 + \Phi_6 - \Phi_7 - \Phi_8}{8s}. \quad (3.13)$$

Для краевых условий (рис. 3.4б) формула примет вид:

$$\Phi_0 = \frac{\frac{2s}{a1+a3} \left(\frac{\Phi_1}{a2} + \frac{\Phi_3}{a2} \right) + \frac{1}{a2+a4} \left[e^{s+a4} \frac{\Phi_2}{a2} + e^{s-a2} \frac{\Phi_4}{a4} \right]}{\frac{2s}{a1 \cdot a3} + \frac{e^{s+a4} - a2}{a2 \cdot a4}}. \quad (3.14)$$

На оси симметрии при $s = 0$ формулу четырехугольника (3.12) и диагональную формулу (3.13) использовать нельзя. Соответствующие им формулы имеют вид:

$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \left(\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_3 \right), \quad \Phi_0 = \frac{1}{4} \left(\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_6 \right). \quad (3.15)$$

§ 3.2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов применяется во многих областях техники. Первоначально он служил для нахождения экстремумов в вариационном исчислении. Расчет электростатических полей строится на следующем положении – энергия поля в определенном объеме с заданными граничными условиями должна быть минимальной. Энергия поля в единичном объеме равна:

$$W = \frac{DE}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \text{grad}\Phi^2}{2}, \quad F_W = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \text{grad}\Phi^2}{2} dV. \quad (3.16)$$

Функцию F_W называют **энергетическим функционалом** для определенного объема V , и она должна иметь минимум в этом объеме. В ходе решения уравнения пространство разбивается на элементы, например, на треугольники для случая плоских полей или тетраэдры в случае трехмерного поля. Эти формы фигур позволяют в дальнейшем довольно просто проводить дробление сетки в областях с резкими изменениями поля. В пределах выбранного элемента для аппроксимации потенциала используются полиномы различной степени, например, для плоского поля:

$$\Phi = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (3.17)$$

В формуле (3.17) в качестве полинома использован полином первой степени. Изменение потенциала в пределах элемента выражается через координаты его вершин. Пусть у треугольника, показанного на рис. 3.5а, с координатами $M1(1;1)$, $M2(2;3)$, $M3(3;1)$ потенциалы вершин известны: потенциал точки $M1$ равен $\Phi1 = 11$ В, точки $M2$ - $\Phi2 = 16$ В, точки $M3$ - $\Phi3 = 13$ В (координаты на рис. 3.5а приведены в сантиметрах). Подставив эти потенциалы в выражения (3.17), получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 &= a_0 + a_1 + a_2 = 11; \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 &= a_0 + 2 a_1 + 3 a_2 = 16; \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 &= a_0 + 3 a_1 + a_2 = 13. \end{aligned}$$

Система уравнений имеет следующее решение: $a_0 = 8$ В, $a_1 = 1$ В/см, $a_2 = 2$ В/см. Тогда в пределах площади треугольника рис. 3.5а функция потенциала Φ будет иметь вид: $\Phi = (8 + x + 2y)$ В. Напряженность поля в пределах треугольника при линейной аппроксимации остается постоянной $\text{grad}\Phi = (a_1^2 + a_2^2)^{0,5}$. Для рассматриваемого примера напряженность в точках $M1$, $M2$ и $M3$ равна $E = -\text{grad}\Phi = -\sqrt{5}$ В/см. Вклад в энергетический

функционал от рассматриваемой точки, например точки $M1$, при $\varepsilon = 1$ будет равен: $F'_W = 1/2 \varepsilon_0 (\text{grad}\Phi_1)^2 = 5/2 \varepsilon_0 = 33.1 \cdot 10^{-12}$ Дж.

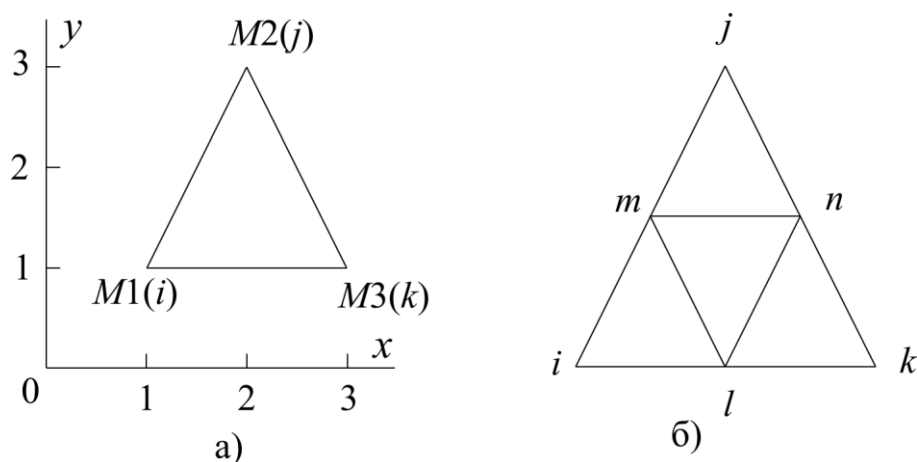


Рис. 3.5. Элементарный треугольный участок плоскости:
а) с тремя; б) с шестью узловыми точками

Для элемента рис. 3.5б потенциалы узловых точек определяются уравнением $\Phi = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$.

Вклад от элемента (треугольник) в энергетический функционал выражается интегралом по поверхности элемента. В расчетах этот поверхностный интеграл распространяется на всю поверхность рассчитываемого поля S . Для плоского поля энергетический функционал 3.16 принимает вид

$$F_W = \int_S \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\text{grad}\Phi)^2}{2} dS. \quad (3.18)$$

Минимизация такого функционала в каждой точке сетки i осуществляется следующим образом – производная от функционала (3.18) по потенциалу в данной точке должна равняться нулю:

$$\frac{\partial F_W}{\partial \Phi_i} = f(\Phi_i, c_i) = 0. \quad (3.19)$$

Часть потенциалов Φ_i равна потенциалу электродов, а остальные неизвестные потенциалы можно рассчитать с помощью уравнений (3.18), (3.19). В этом методе, как и в дифференциальном методе, рассмотренном в предыдущем параграфе, должны быть известны все потенциалы по всей границе поля.

Принципиально решение проблемы нахождения параметров поля в методе конечных элементов сравнимо с непосредственным решением

уравнения дифференциальным методом, причем области с различными диэлектрическими проницаемостями могут быть учтены непосредственно в уравнении (3.18). Существенным преимуществом метода конечных элементов является большая гибкость в построении сетки в пространстве поля, подлежащем расчету. Эта гибкость облегчает программную реализацию на ЭВМ. В настоящее время существуют развитые интегрированные пакеты прикладных программ для расчетов по методу конечных элементов: *ANSYS*, *ComSol*, *ELCUT*[21–23].

Ожидаемая точность вычислений в значительной степени зависит от вида функции, аппроксимирующей потенциал в каждом элементе. Для такой аппроксимации подходящими являются полиномы. Решение тем точнее, чем выше степень полинома. Вместе с ростом степени полинома существенно растет время расчета. Часто ограничиваются второй степенью полинома.

Для уменьшения погрешности расчетов в программу закладывают автоматическое изменение числа элементов в зависимости от степени неоднородности поля.

При расчетах полей электродов с плавающим потенциалом их заменяют диэлектриком с высокой диэлектрической проницаемостью. Для уменьшения погрешности, вызванной таким допущением, величину относительной диэлектрической проницаемости следует брать больше 10^4 ($\epsilon > 10^4$).

Расчет трехмерных полей методом конечных элементов является достаточно трудоемким, как, впрочем, и расчеты другими методами. Вместо треугольных элементов, использовавшихся в расчетах плоских полей, здесь элементом служит тетраэдр. Более сложный характер приобретает и закон изменения потенциала.

§ 3.3. Метод эквивалентных зарядов

3.3.1. Основы метода

Метод эквивалентных зарядов позволяет рассчитывать поле наложением нескольких единичных полей. Суть метода состоит в замене сложной электродной системы на более простую совокупность дискретных зарядов, для которой можно рассчитать характеристики электрического поля в любой требуемой области пространства. По условиям задачи известными являются геометрические размеры электродов и их потенциалы. Расчеты по методу эквивалентных зарядов проводятся в несколько этапов.

1. *Задание координат дискретных пробных зарядов.* Сложная электродная система заменяется набором дискретных пробных зарядов,

таких как точечные заряды, линейные или кольцевые заряды. Координаты размещения зарядов задаются из соображений симметрии задачи и являются известными, в то время, как сами величины зарядов на первом этапе неизвестны. Координаты дискретных зарядов должны выбираться в такой области поля, в которой расчеты характеристик производиться не будут. Например, внутри или на поверхности электродов.

2. *Задание координат реперных точек.* Задаются координаты реперных (контурных, контрольных) точек, в которых известны величины потенциалов. Эти точки выбираются, как правило, на поверхности электродов. Количество контрольных точек должно совпадать с числом задаваемых пробных зарядов.

3. *Определение потенциальных коэффициентов.* Определяются расстояния от каждого дискретного заряда до каждой контрольной точки. Находится величина потенциального коэффициента для каждой пары: заряд – контрольная точка. Поскольку заряды выбираются дискретными, то для них известны формулы определения величины потенциала, создаваемого зарядом в любой точке пространства, если известно расстояние до требуемой точки. Например, определим величину частичного потенциала, создаваемого в 7-ой контрольной точке 5-ым пробным точечным зарядом с величиной q_5 . Назовем эту величину частичным потенциалом, создаваемым в точке 7 зарядом 5, и обозначим её символом φ_{75} . По формуле для потенциала, создаваемого точечным зарядом $\varphi_{75} = q_5 / (4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r_{75}) = p_{75} \cdot q_5$, где r_{75} – расстояние между реперной точкой 7 и пробным зарядом 5, а p_{75} – соответствующий потенциальный коэффициент. Обозначим координаты пробных зарядов как (x_m, y_m, z_m) , а реперных точек (a_n, b_n, c_n) . Тогда

$$r_{mn} = \sqrt{(x_m - a_n)^2 + (y_m - b_n)^2 + (z_m - c_n)^2},$$

а потенциальные коэффициенты вычисляются по формуле $p_{mn} = 1 / (4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r_{mn})$ и представляют собой определенные числа, поскольку координаты всех точек известны из этапов расчета 1 и 2. Частичный потенциал $\varphi_{mn} = p_{mn} \cdot q_n$.

4. *Определение величины пробных зарядов.* В соответствии с принципом суперпозиции величина потенциала в реперной точке складывается из суммы частичных потенциалов, создаваемых в этой точке всеми пробными зарядами:

$$p_{11} \cdot q_1 + p_{12} \cdot q_2 + p_{13} \cdot q_3 + \dots + p_{1n} \cdot q_n = U_1.$$

$$p_{21} \cdot q_1 + p_{22} \cdot q_2 + p_{23} \cdot q_3 + \dots + p_{2n} \cdot q_n = U_2.$$

$$p_{31} \cdot q_1 + p_{32} \cdot q_2 + p_{33} \cdot q_3 + \dots + p_{3n} \cdot q_n = U_3. \quad (3.20)$$

.....

$$p_{n1} \cdot q_1 + p_{n2} \cdot q_2 + p_{n3} \cdot q_3 + \dots + p_{nn} \cdot q_n = U_n.$$

Получается система n -линейных уравнений с n -неизвестными зарядами q_n . Потенциальные коэффициенты p_{mn} были численно определены на предыдущем этапе расчета, а потенциалы U_n известны по условию выбора реперных точек. Система линейных уравнений (3.20) решается на ЭВМ стандартными методами, например, методом Гаусса. В результате решения величины пробных зарядов становятся известными.

5. *Определение потенциалов в требуемой области поля.* Для определения характеристик поля в интересующей области следует задать координаты точек, в которых будут рассчитываться потенциалы. Потенциал в выбранной точке в соответствии с принципом суперпозиции будет равен сумме частичных потенциалов, создаваемых в этой точке всеми пробными зарядами. Величина и положение (координаты) пробных зарядов были определены на предыдущих этапах расчета.

6. *Определение напряженности поля.* Для расчета напряженности поля ($E = -\text{grad}\phi$) нужно знать потенциалы в двух соседних (в идеале бесконечно близких) точках поля ϕ_1 и ϕ_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) , которые выбираются и рассчитываются на шаге 5. Для повышения точности расчетов точки поля должны выбираться как можно ближе друг к другу. Тогда проекции вектора напряженности на оси x, y, z будут, соответственно, равны:

$$E_x = -(\phi_2 - \phi_1)/(x_2 - x_1), E_y = -(\phi_2 - \phi_1)/(y_2 - y_1), E_z = -(\phi_2 - \phi_1)/(z_2 - z_1).$$

Величина вектора напряженности определяется как: $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$,

а направляющие косинусы вектора напряженности по осям x, y, z равны:

$$\cos x = \frac{E_x}{|\vec{E}|}; \cos y = \frac{E_y}{|\vec{E}|}; \cos z = \frac{E_z}{|\vec{E}|}.$$

3.3.2. Поле двух заряженных проводящих шаров

Одним из устройств измерения разрядного напряжения воздушных промежутков является шаровой разрядник. Два заряженных металлических шара приближаются друг к другу до тех пор, пока между ними не произойдет разряд. Расстояние S между шарами шарового разрядника (наименьшее расстояние между точками поверхностей шаров) равно расстоянию между точками A_7 и A_8 рис. 3.6 и обычно выбирается в

диапазоне $0,05 \div 0,5D$, где D – диаметр шара. Пусть имеется два проводящих шара 1 и 2, заряженных до потенциала U_1 и U_2 . Требуется определить напряженность поля в промежутке между шарами. Для расчета характеристик поля уединенного проводящего шара в силу сферической симметрии задачи мы помещали весь заряд шара в его центр и сводили задачу к расчету поля точечного заряда. В случае двух близко расположенных шаров, произвести подобную замену нельзя, т.к. распределение зарядов по поверхности шаров перестает быть равномерным. Решение задачи двух шаров методом отражений приведено в § 2.17. Решим эту же задачу методом эквивалентных зарядов. Задача двух шаров (см. рис. 3.6) имеет осевую симметрию, с осью C_∞ , проходящей через центры шаров. В силу симметрии расчет поля в пространстве сводится к расчету поля в плоскости, содержащей ось симметрии, например, в плоскости рис. 3.6. За ось X выберем ось симметрии C_∞ , а за ось Y – перпендикуляр к оси симметрии. Выберем начало декартовой системы координат в середине между шарами. Задача симметрична относительно оси X и Y . Для получения численной картины поля достаточно определить характеристики поля в одном из квадрантов. Объемный заряд в расчетах учитываться не будет. Наибольший интерес представляют данные вблизи оси X .

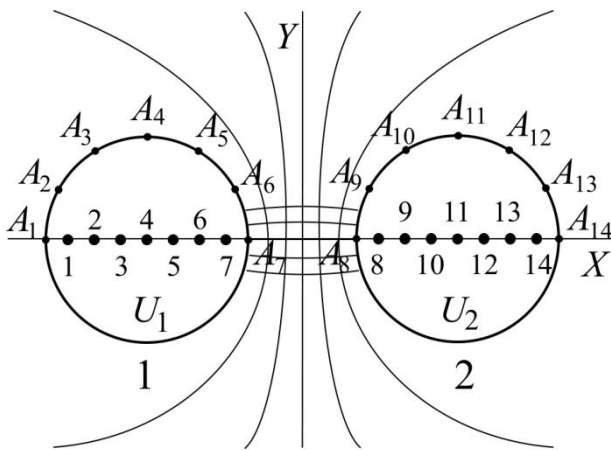


Рис. 3.6. Поле двух шаров

для точек 8-14 $x_m = x_{m-7} + S + D$.

2 этап. Реперные точки выберем на поверхности шаров таким образом, чтобы длина дуги между ближайшей парой точек была постоянной. Центральный угол в данном случае меняется на $\pi/6$ от π до 0 и равен $\varphi_{A1} = \pi$, $\varphi_{A2} = 5\pi/6$, $\varphi_{A3} = 2\pi/3$, $\varphi_{A4} = \pi/2$, $\varphi_{A5} = \pi/3$, $\varphi_{A6} = \pi/6$, $\varphi_{A7} = 0$.

Координаты x точек A_1 – A_7 равны: $x_n = \text{Cos}[\pi(7 - n)/6] \cdot D/2 - (S + D)/2$.

1 этап. Выберем места расположения пробных зарядов внутри шаров с равными между собой расстояниями и расстоянием от поверхности до крайних точек, как показано на рис. 3.6. Координата Y каждой точки равна 0 ($y_m = 0$), а координата X определяется следующим способом:

для точек 1-7 $x_m = -S/2 - D + m \cdot D/8$,

Координаты у точек A_1-A_7 равны: $y_n = \text{Sin}[\pi(7 - n)/6] \cdot D/2$.

Для точек 8–14 выполняются следующие соотношения:

$$x_n = x_{n-7} + S + D; y_n = y_{n-7}.$$

3 этап. Координаты всех точек заданы, и можно приступить к расчету потенциальных коэффициентов по формуле

$$P_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}}$$

Далее выполняются этапы 4, 5 и 6.

3.3.3. Дискретные эквивалентные заряды

Для воспроизведения поля, создаваемого расположенными на поверхности электродов зарядами, в методе эквивалентных зарядов используется три типа дискретных зарядов: точечные, линейные и кольцевые заряды (рис. 3.7). В случае линейных и кольцевых зарядов предполагается, что плотность заряда является постоянной для одного дискретного заряда. Выбор того или иного вида дискретного эквивалентного заряда определяется формой и симметрией расположения электродов. Так для параллельных цилиндрических электродов используются линейные заряды. Для электродов в форме оболочек более подходящими являются кольцевые заряды. Для сферических электродов можно использовать как точечные, так и кольцевые заряды.

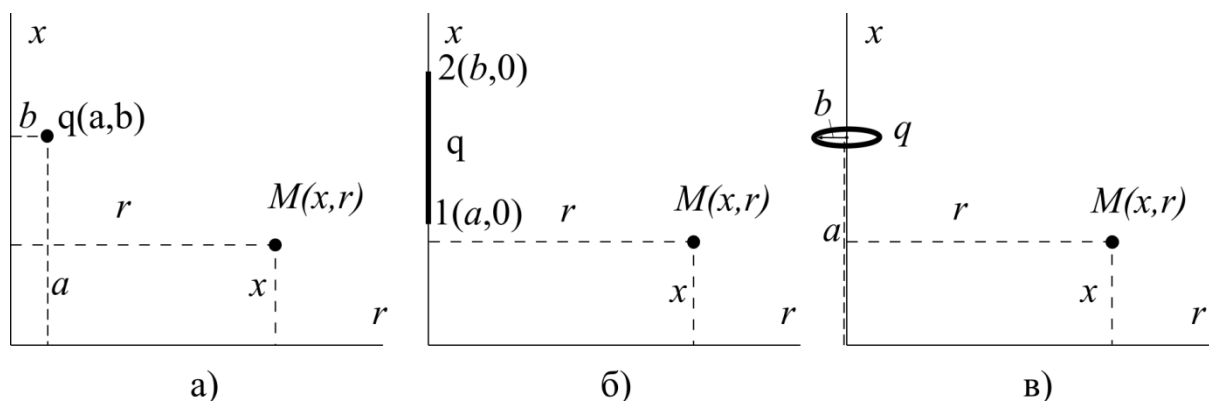


Рис. 3.7. Дискретные эквивалентные заряды: а) - точечный, б) - линейный в) - кольцевой

Потенциал в произвольной точке поля $M(x, r)$, создаваемый дискретным зарядом при использовании обозначений рис. 3.7 имеет вид:
 точечный заряд:

$$\Phi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{(a-b)^2 + (a-x)^2}}; \quad (3.21)$$

линейный заряд:

$$\Phi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon(a-b)} \ln \frac{b-x + \sqrt{r^2 + (a-x)^2}}{a-x + \sqrt{r^2 + (a-x)^2}}; \quad (3.22)$$

кольцевой заряд:

$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0\epsilon} \frac{k}{4\sqrt{b \cdot r}} K(k), \quad (3.23)$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k = \sqrt{\frac{4br}{(a+b)^2 + (a-x)^2}}. \quad (3.24)$$

Расчеты потенциальных коэффициентов p_M для линейных и кольцевых зарядов проводятся непосредственно по формулам 3.21 и 3.22 с учетом того, что потенциал $\Phi_M = p_M \cdot q$. Чтобы рассчитать соответствующий потенциальный коэффициент для пары эквивалентный кольцевой заряд – реперную точку, необходимо сначала вычислить величину коэффициента k в 3.24, который примет некоторое определенное число. Затем вычисляется функция $K(k)$. Вычисление этой функции не представляет сложности, поскольку на любом из языков программирования высокого уровня имеются подпрограммы вычисления определенных интегралов различными методами. Окончательно потенциальный коэффициент p_M рассчитывается по 3.23.

Расположение эквивалентных зарядов на плоскости позволяет рассчитывать поля при плоских тонких формах электродов, например, промежуточные прокладки вводов или фигурных изоляторов элегазовых устройств. Такое расположение эквивалентных зарядов в значительной степени соответствует реальным физическим поверхностным зарядам. При этом как потенциальные, так и силовые характеристики поля физически правильно воспроизводятся и могут быть рассчитаны в любой точке.

Реальные электродные системы, как правило, имеют сложные геометрические формы или граничные поверхности, которые описываются полиномами высоких степеней. С целью упрощения расчетов целесообразно ограничиваться линейным приближением при описании координат поверхности электродов и плоскостей зарядов. Если электродная система имеет цилиндрическую симметрию (C_∞), то поверхностную плотность реальных зарядов (σ) можно свести к

эквивалентным кольцевым зарядам, у которых изменяются значения заряда и диаметра. Используя обозначения рис. 3.7в, можно сказать, что радиус кольцевого заряда $b = f(x)$ и его линейная плотность $\tau = f(x) = q(x)/(2\pi b(x))$.

При расчетах поля в слоистых диэлектриках с различными значениями диэлектрической проницаемости слоев граница раздела влияет на электростатическое поле таким же образом, как и поверхностный заряд. Этот поверхностный заряд, как и заряд на металлических электродах, можно заменить эквивалентным зарядом, помещенным внутри диэлектрика. Поверхностный заряд на границе раздела может быть заменён точечными или линейными эквивалентными зарядами, помещёнными внутри обеих сред, причем для поля в одной среде учитывается заряд, помещенный в другую среду, и наоборот.

§ 3.4. Метод Монте-Карло

Этот метод расчёта может быть применен, если требуется определить потенциал только в ограниченной области поля. Он основан на использовании теоремы о среднем из теории потенциала, согласно которой потенциал $\Phi(P)$ центра шара равен среднему значению потенциала $\Phi(P_i)$ на его поверхности S , т.е.

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \Phi(P_i) dS \quad (3.25)$$

Теорема о среднем используется в стохастической форме: в каждой рассматриваемой точке P поля начинается путь случайного обхода, шаг которого выбирается с учётом геометрического расстояния до ближайшей поверхности электрода. Этот процесс продолжается, пока обход не закончится на поверхности электрода или вблизи нее. Точке P приписывается потенциал этого электрода. Если из точки P начинаются многие случайные обходы, то получается статистическая взаимосвязь оцениваемого значения $\Phi(P)$ и известных потенциалов электродов. Достоверность полученного значения $\Phi(P)$ можно оценить по рассчитываемому разбросу.

Вследствие конечного пути случайного обхода значение потенциала вблизи электрода ненадежно. Решение может быть существенно улучшено путём удлинения первых случайных шагов, при этом часть обходов заканчивается уже за электродами в пространстве, свободном от поля. Для этих конечных точек можно определить кажущиеся потенциалы, решив

линейную систему уравнений, как при способе эквивалентных зарядов, описанном в предыдущем параграфе.

§ 3.5. Оценка максимальных напряженностей поля

Физические процессы при разрядах в общем случае так сложны, что они не могут быть непосредственно привлечены к определению размеров и уровня изоляции. Поэтому в технике имеют значение оценки, в том числе и на эмпирической основе, с помощью которых можно просто найти точку опоры при определении уровня изоляции.

Коэффициент Швайгера

Коэффициент электродной системы, введенный Швайгером, позволяет сравнивать сложную электродную систему с простой электродной системой, имеющей однородное распределение поля, например с полем плоского конденсатора. Расстояние между электродами сложной и простой систем выбирается одинаковым. Тогда коэффициент Швайгера имеет вид:

$$\eta = \frac{U}{\alpha \cdot E_{\max}} \quad (3.26)$$

где U – приложенное напряжение, α – наименьшее расстояние между электродами, которое называется также **пробивным расстоянием**, E_{\max} – максимальное значение напряженности.

Отношение U/α можно считать средней напряженностью. Тогда коэффициент Швайгера характеризует отношение средней напряженности поля к максимальной. Он зависит только от геометрических размеров. В русскоязычной литературе более распространенной является величина, обратная коэффициенту Швайгера, которая называется **коэффициентом (степенью) неоднородности поля**.

Для однородного поля плоского конденсатора $\eta = 1$. Чем выше неоднородность поля, тем меньше коэффициент поля η . Для оптимизированного сферического конденсатора с отношением радиусов внешнего и внутреннего электродов $r_2/r_1 = 2 - \eta = 0,5$.

Применение коэффициента Швайгера для выбора размеров устройств облегчается наличием справочных данных по электродным системам и коэффициентам η , рассчитанным точно или приближенно для каждой системы. Поскольку пробой происходит при достижении

напряженности зажигания дуги для данного диэлектрика (газа), по коэффициенту Швайгера можно оценить пробивное напряжение какой-либо электродной системы. Разрядное напряжение совпадает с начальным напряжением только в случае однородного или слабо неоднородного поля. Для таких полей коэффициент η находится в пределах $1 \div 0,3$.

В технике высоких напряжений часто возникают проблемы, связанные с пробоем между перекрещивающимися цилиндрами (проводниками), находящимися под высоким напряжением. Разрядное напряжение такой системы можно с запасом оценить по разрядному промежутку шар-шар. Радиус шаров принимается равным радиусу цилиндров, а расстояние между шарами выбирается равным расстоянию между цилиндрами. В свою очередь промежуток шар-шар может быть заменён промежутком шар-плоскость при вдвое меньшем расстоянии между ними.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные положения дифференциального метода расчета параметров электрических полей.

2. Приведите и объясните формулы четырехугольника и диагональную формулу. Как указанные формулы меняются при наличии элементов симметрии?

3. Что такое дробление сетки, и каков критерий правильности дробления?

4. Как изменяются формулы четырехугольника и диагональная формула при переходе к трехмерным полям; к полям с цилиндрической симметрией; на границе раздела двух сред; на краю области поля?

5. На каких принципах основан метод конечных элементов? Назовите порядок расчета по этому методу.

6. На чем основан метод эквивалентных зарядов? Перечислите основные этапы расчета по этому методу.

7. Приведите основные типы эквивалентных зарядов и соответствующие им формулы расчета потенциальных коэффициентов.

8. Где следует располагать эквивалентные заряды, реперные точки и каково их число?

9. Как определить пробивное напряжение электродной системы, зная её размеры и коэффициент неоднородности поля или коэффициент Швайгера?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Колечицкий Е.С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения: учеб. пособие для вузов / Колечицкий Е.С., Белоедова И.П., Елисеев Ю.В. и др. – М.: МЭИ, 2008. – 248 с.

2. Евстигнеев В.В. Расчет стационарных электрических полей в квазиоднородных средах многоэлектродных композиционных электрообогревателей / В.В. Евстигнеев, Т.М. Халина, М.В. Халин. – Томск: Изд. томск. политех. ун-та, Т. 311, N.2, 2007.

3. Ветлугаев С.С. Выбор допустимых напряженностей и электрический расчет переходной муфты / С.С. Ветлугаев // Наука и техника. – № 3 (316), 2009. – С. 16–20.

4. Майер Р.В. Вычисление потенциала электрического поля на компьютере / Р.В. Майер // Научно-технические и социально-экономические проблемы регионального развития: сборник научных трудов. Вып. 5. – Глазовский инженерно-экономический институт. – Глазов: Изд-во ГГПИ, 2007. – С. 139–143.

5. Гусейнова Т.И. Методические указания к расчетно-графической работе по дисциплине «Теория электромагнитного поля»./ Т.И. Гусейнова, Е.В. Парфенов, Ю.А. Пугина. – Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2008. – 33 С.

Дополнительная литература:

6. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля / В.А. Говорков. – М.: Энергия, 1968. – 488 с.

7. Говорков В.А. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах / Говорков В.А., Купалян С.Д. – М.: Высш. школа, 1970. – 304 с.

8. Бейер М. В. Техника высоких напряжений: теоретические и практические основы применения / М. Бейер, В. Бёк, К. Мёллер, В. Цаенгель. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 555 с.

9. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Т.5. Электричество и магнетизм / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1966. – 296 с.

10. Математический энциклопедический словарь / Ю.В. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.

11. Лорентц Г.А. Теория электромагнитного поля / Г.А. Лорентц. – М.: Гос. технико-теоретическое издательство, 1933. – 172 с.

12. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей / Г. Бухгольц. – М.: Иностранная литература, 1961. – 712 с.

13. Миролубов Н.Н. Методы расчета электростатических полей / Н.Н. Миролубов, М.В. Костенко, М.Л. Левинштейн, Н.Н. Тиходеев, 1963. – 209 С.

14. Поль Р.В. Учение об электричестве / Р.В. Поль. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

15. Смайт В. Электростатика и электродинамика / В. Смайт. – М.: Иностранная литература, 1954. – 606 с.

16. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

17. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш. школа, 1983. – 463 с.

18. Пирумов У.Г. Численные методы: теория и практика. Учебное пособие для бакалавров. Гриф МО / У.Г. Пирумов – М: Омега-Л, 2012. – 421 с.

Интернет-источники:

19. Интернет-учебник по расчету кабельной продукции, 2013.
http://www.ruscable.ru/info/manual/3_2.html

20. Программные продукты ANSYS, 2012.

<http://www.cae-expert.ru/product/overview>

21. *COMSOL Multiphysics User's Guide*, 2012.

<http://www.humusoft.com/produkty/comsol/ru/>

22. ELCUT 5.8. Руководство пользователя, 2012.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Электростатическое поле	4
§ 1.1. Системы координат и элементы векторного исчисления.	4
§ 1.2. Потенциал электростатического поля.	6
§ 1.3. Градиент и другие характеристики электростатического поля. . .	7
§ 1.4. Дивергенция векторного поля.	10
§ 1.5. Вихрь (ротор) векторного поля.	13
§ 1.6. Вектор электрического смещения (электрической индукции). . .	14
§ 1.7. Условия существования потенциальных и вихревых полей. . .	15
§ 1.8. Теорема Остроградского – Гаусса.	17
§ 1.9. Формулы Грина и теорема о единственности.	19
§ 1.10. Электрическое поле на границе раздела двух диэлектриков. . .	21
§ 1.11. Проводящие включения в изоляцию.	23
§ 1.12. Элементы теории симметрии.	26
Вопросы для самопроверки.	27
Глава 2. Аналитические методы расчета	29
§ 2.1. Решение дифференциальных уравнений Лапласа.	29
§ 2.2. Поле одиночного точечного заряда, проводящего шара. Сферический конденсатор.	30
§ 2.3. Поле однородно заряженного диэлектрического шара.	33
§ 2.4. Поле длинной равномерно заряженной оси.	35
§ 2.5. Коаксиальный кабель. Цилиндрический конденсатор.	37
§ 2.6. Коаксиальный кабель с двухслойным диэлектриком.	38
§ 2.7. Конденсаторный ввод.	40
§ 2.8. Поле плоского конденсатора.	41
§ 2.9. Метод наложения. Частичные емкости.	42
§ 2.10. Поле двух разноименных точечных зарядов. Электрический диполь.	44
§ 2.11. Поле двух одноименных точечных зарядов.	49
§ 2.12. Электрическое поле двух равномерно и разноименно заряженных параллельных осей.	52
§ 2.13. Метод отражения. Поле точечного заряда над бесконечной проводящей плоскостью.	54
§ 2.14. Поле точечного заряда и проводящего шара.	55
§ 2.15. Поле двухпроводной линии. Поле однопроводной линии и земли.	58

§ 2.16. Электрическое поле и емкости трехфазной линии.	60
§ 2.17. Поле двух проводящих шаров.	62
§ 2.18. Поле равномерно заряженного проводника конечной длины. . .	65
§ 2.19. Поле кольцевого заряда.	67
§ 2.20. Поле заряженного диска.	69
§ 2.21. Поле двух проводящих шаров различного размера.	71
§ 2.22. Метод конформных отображений.	72
§ 2.23. Поля с объемным зарядом.	83
Вопросы для самопроверки.	85
Глава 3. Численные методы расчета.	87
§ 3.1. Дифференциальный метод расчета электрических полей. . . .	87
§ 3.2. Метод конечных элементов.	95
§ 3.3. Метод эквивалентных зарядов.	97
§ 3.4. Метод Монте-Карло.	103
§ 3.5. Оценка максимальных напряженностей поля.	104
Вопросы для самопроверки.	105
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.	106

Учебное издание

Усачёв Александр Евгеньевич

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

Кафедра электрических станций КГЭУ

Редактор редакционно-издательского отдела *А.В. Заяц*

Компьютерная верстка *А.В. Заяц*

Подписано в печать 04.06.13.

Формат 60×84/16. Бумага ВХИ. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.

Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 7,22. Тираж 500 экз. Заказ № 4629.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,
420066, Казань, Красносельская, 51

ДЛЯ ЗАМЕТОК

