МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Физика»

Казань 2016

УДК 53
ББК 22.3
У91

У91 **Учет погрешностей при измерении физических величин:** учебно-методическое пособие по дисциплине «Физика» / Сост.: О.С. Зуева, Ю.Ф. Зуев, Т.А. Серебренникова. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2016. – 26 с.

Содержатся сведения по классификации погрешностей при проведении физических экспериментов и рекомендации по обработке и представлению результатов прямых и косвенных измерений физических величин. Описанные в пособии алгоритмы обработки измерений физических величин и определения их погрешностей формируют способность правильно пользоваться современными методами обработки и анализа физической информации.

Учебно-методическое пособи предназначено для студентов всех технических направлений подготовки, изучающих дисциплину «Физика».

УДК 53
ББК 22.3

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение лабораторных работ является неотъемлемой частью изучения дисциплины «Физика». В ходе лабораторных работ студенты не только углубляют свои теоретические познания, но также знакомятся с измерительной аппаратурой и методами физических измерений, приобретают навыки проведения самостоятельных экспериментальных исследований. Вопросы, касающиеся правильной обработки результатов измерений физических величин, неизбежно возникают в процессе выполнения каждой лабораторной работы и поэтому требуют отдельного рассмотрения. Настоящее пособие содержит сведения по классификации погрешностей при проведении физических экспериментов и рекомендации по обработке и представлению результатов прямых и косвенных измерений физических величин. Описана методика обработки полученных в ходе лабораторных работ экспериментальных данных. Пособие соответствует программе рассматриваемых разделов дисциплины «Физика» для студентов всех технических направлений подготовки КГЭУ.

Использование данного пособия в той или иной степени поможет формированию следующих общепрофессиональных и профессиональных компетенций:

– способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач;

– способность использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин;

– способность проводить научные исследования в избранной области экспериментальных и (или) теоретических физических исследований с помощью современной приборной базы (в том числе сложного физического оборудования) и информационных технологий с учетом отечественного и зарубежного опыта;

– готовность применять на практике профессиональные знания теории и методов физических исследований;

– способность применять на практике профессиональные знания и умения, полученные при освоении профильных физических дисциплин;

– способность пользоваться современными методами обработки, анализа и синтеза физической информации в избранной области физических исследований;

– способность понимать и использовать на практике теоретические основы организации и планирования физических исследований;

– способность участвовать в подготовке и составлении научной документации по установленной форме.

Таким образом, теоретические знания, полученные в ходе изучения данного учебно-методического пособия, и описанные в нем алгоритмы обработки измерений физических величин и определения их погрешностей, в первую очередь, формируют способность правильно пользоваться современными методами обработки и анализа физической информации.

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Классификация погрешностей

При нахождении физических величин различают два типа измерений: прямые и косвенные. При *прямом измерении* значение искомой величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора. При *косвенном измерении* значение искомой величины вычисляется по известной зависимости между ней и непосредственно определяемыми величинами.

Каждый результат проведенного измерения некоторой физической величины определяется с некоторой точностью. Точность экспериментальных данных отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины, а их погрешности характеризуют расхождение между истинными и полученными результатами.

Погрешности различаются по характеру проявления. *Грубые погрешности (промахи)* обычно связаны либо с неисправностью измерительной аппаратуры, либо с ошибкой экспериментатора. Результаты измерений, проведенные с грубыми погрешностями, нужно отбрасывать и проводить новые эксперименты.

Систематическими погрешностями называются такие, которые остаются постоянными или меняются по определенному закону при многократных измерениях величин. Они могут быть обусловлены методическими погрешностями, связанными с несовершенством метода измерения, или приборными погрешностями, связанными с несовершенством измерительных приборов или с их неправильной установкой. Использование более точных методов и более совершенных приборов позволяет уменьшить систематические погрешности, но полностью устранить их невозможно.

Случайными погрешностями измерений называются такие, абсолютная величина и знак которых меняются при многократных измерениях физической величины. Они могут быть обусловлены множеством случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Случайные погрешности могут быть уменьшены путем многократного повторения экспериментов, из-за чего происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений.

Правильная оценка полученного результата включает в себя учет как случайных, так и систематических погрешностей.

Распределение случайных погрешностей прямых измерений

Случайные погрешности прямых измерений относятся к классу случайных величин и изучаются в теории вероятностей и математической статистике.

В основе теории случайных погрешностей (систематические погрешности предполагаются отсутствующими) лежит тот факт, что появление некоторого значения исследуемой физической величины в процессе измерения хотя и является случайным событием, но подчиняется определенным закономерностям:

- случайные погрешности равной величины, но разных знаков (как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения истинной величины) встречаются одинаково часто;
- с ростом величины погрешности (по модулю) уменьшается вероятность ее появления, т.е. большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

Такое распределение случайных погрешностей удобнее всего проиллюстрировать графически. Считаем, что при проведении серии n измерений одной и той же физической величины x может быть получено множество значений (n штук), случайным образом распределенных вблизи ее истинного значения. Чтобы построить кривую распределения ошибок физической величины x, область полученных значений этой величины (от максимального до минимального значения) делят на малые интервалы одинаковой ширины δx и рассчитывают относительную частоту n_i / n попадания результатов в указанный интервал (n_i – число измерений, результаты которых попали в рассматриваемый i-й интервал). Полученную таким образом диаграмму (рис. 1) называют гистограммой.

При увеличении числа n измерений построенная кривая стремится к теоретическому распределению вероятностей, которое характеризует результаты бесконечного числа опытов и в котором площадь каждой полоски пропорциональна вероятности $P(x_i)$ попадания измеряемой величины в i-й интервал от $x_i - \delta x / 2$ до $x_i + \delta x / 2$. Естественно, что распределение вероятностей нормировано на единицу

$$\sum_i P(x_i) = 1,$$

поскольку оно отражает вероятность всех возможных событий.

Теоретическое распределение вероятностей при стремлении интервала δx к нулю переходит в непрерывную кривую $\rho(x)$, изображенную на рис. 1 пунктиром, – кривую распределения ошибок. Функцию $\rho(x)$ называют плотностью распределения вероятностей, которая неотрицательна и подчинена условию нормировки в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1.$$

С ее помощью можно определить вероятность попадания результата измерения величины x в интервал от x_1 до x_2

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx,$$

равную площади фигуры, заштрихованной на рис. 2.

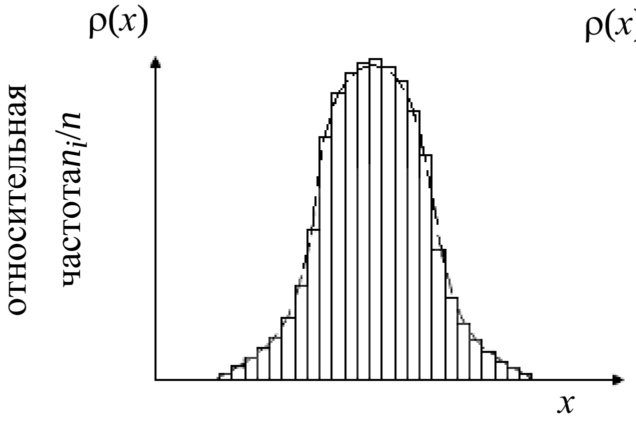

Рис. 1

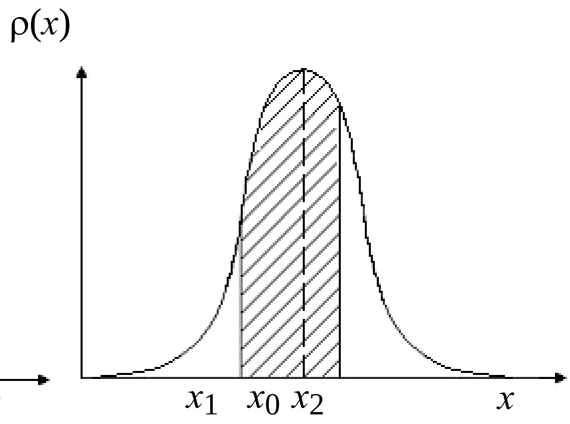

Рис. 2

Плотность распределения вероятностей $\rho(x)$ наиболее полно характеризует совокупность случайных значений физической величины x. Обычно она имеет вид колоколообразной кривой, максимум которой соответствует истинному значению x_0 измеряемой величины.

В рамках теории ошибок можно показать, что при бесконечно большом числе измерений кривая распределения случайных ошибок $\rho(x)$ описывается нормальным распределением Гаусса. На практике в силу конечного числа измерений и других причин встречаются и другие законы распределения, многие из которых, однако, в предельном случае описываются той же формулой Гаусса. Важность этого распределения определяется еще и тем, что в той области, где ошибки измерений не слишком велики, оно часто находится в очень хорошем согласии с экспериментом.

В случае распределения Гаусса плотность вероятностей $\rho(x)$ для случайной переменной x имеет вид

$$\rho(x) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-1} \exp\left[-(x - x_0)/2\sigma^2\right], \tag{1}$$

где σ^2 – параметр, называемый дисперсией распределения.

Формула Гаусса описывает симметричную колоколообразную кривую (рис. 3) с центром в точке x_0, соответствующей истинному значению измеряемой физической величины. По обе стороны от максимума $\rho(x)$ монотонно спадает и асимптотически стремится к нулю, причем этот спад и сама форма кривых Гаусса характеризуются определяемым дисперсией распределения параметром $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$, отражающим разброс случайных значений измеряемой величины относительно центра распределения. Его называют среднеквадратичным отклонением (стандартной ошибкой). На рис. 3 приведены кривые плотности вероятностей для нормального распределения Гаусса при значениях параметра $\sigma = 0{,}5;\ 1;\ 2$.

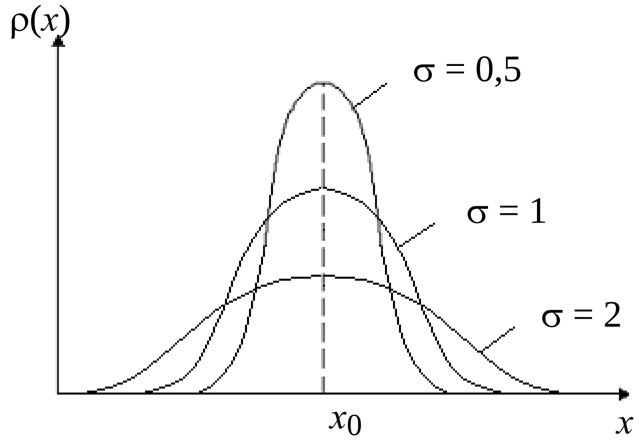

Рис. 3

Чем больше σ, тем шире и ниже колоколообразные кривые распределения Гаусса $\rho(x)$. При этом площади под кривыми с разными σ в силу условия нормировки вероятностей одинаковы и равны единице. Большие σ соответствуют широкому разбросу случайных значений измеряемой величины, а значит, менее точным результатам.

Доверительная вероятность и доверительный интервал

Для определения случайной величины x недостаточно знания ее истинного значения x_0, поскольку различные эксперименты характеризуются разной степенью разброса получаемых значений. Этот факт проиллюстрирован на рис. 4 для двух кривых распределения ошибок.

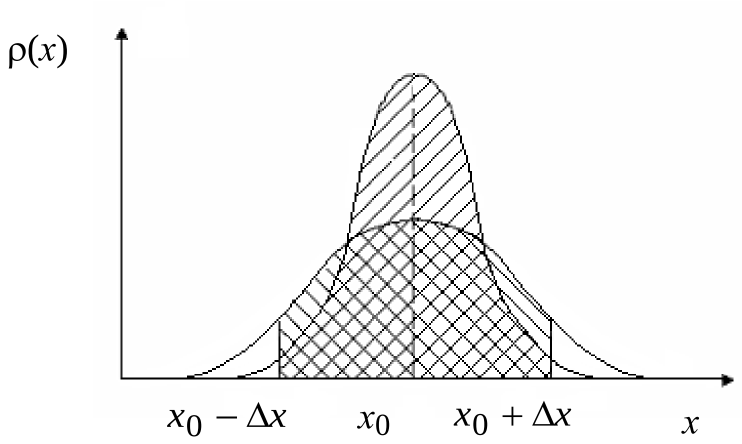

Рис. 4

Вероятности получения в процессе измерения ошибок, не превышающих Δx, т.е. вероятности попадания случайной величины x в интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, равны площадям, заштрихованным под рассматриваемыми кривыми. Видно, что эти вероятности различны. Поэтому для характеристики случайной ошибки необходимо задать два числа: величину самой ошибки Δx и величину вероятности P попадания ошибки в указанный интервал.

Доверительным интервалом называется интервал от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta x$, в который по определению попадают результаты измерения случайной величины x с заданной вероятностью $P_д$, носящей название *доверительной вероятности*, или *коэффициента надежности*. Доверительная вероятность выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Следует помнить, что $(1 - P_д)$ процентов от общего числа измерений выходят за пределы доверительного интервала. Расширение границ доверительного интервала, т.е. увеличение задаваемой погрешности результатов измерений, приводит к возрастанию надежности попадания в этот интервал.

Указание одной только величины ошибки Δx без учета соответствующей ей доверительной вероятности в значительной мере лишено смысла, так как только знание доверительной вероятности позволяет оценить степень надежности полученного результата.

Необходимая степень надежности задается характером производимых измерений. В разных областях используют различные значения доверительной вероятности: 0,5; 0,683; 0,8; 0,9; 0,95; 0,99; 0,997; 0,999.

Распределение Гаусса позволяет рассчитать доверительную вероятность для соответствующего доверительного интервала любой величины. Границы интервала $\pm\Delta x$, за пределы которого с заданной доверительной вероятностью не выходят случайные погрешности, обычно выражают в виде значения, кратного стандартной ошибке: $\Delta x = t_\alpha \cdot \sigma$, где t_α – безразмерный коэффициент, определяемый задаваемой вероятностью $\alpha = P_Д$.

В случае нормального распределения Гаусса для $\Delta x = \sigma$ (когда $t_\alpha = 1$) величина доверительной вероятности определяется значением $P_Д = 0{,}683$ (рис. 5). Это означает, что 68,3 % всех измерений попадает в доверительный интервал от $x_0 - \sigma$ до $x_0 + \sigma$, а за его пределы выпадает часть, равная 31,7 %. Аналогично для $\Delta x = 2\sigma$ (когда $t_\alpha = 2$) значение $P_Д = 0{,}955$, т.е. 95,5 % всех измерений попадает в указанный доверительный интервал, а за его пределы выпадает 4,5 % всех экспериментальных данных. Наконец, для $\Delta x = 3\sigma$ (когда $t_\alpha = 3$) значение $P_Д = 0{,}997$, за пределы доверительного интервала выпадает 0,3 % всех результатов измерений. Эта вероятность настолько мала, что результат с отклонениями более 3σ считается грубой погрешностью (промахом). Это правило выявления промахов называется критерием трех сигм.

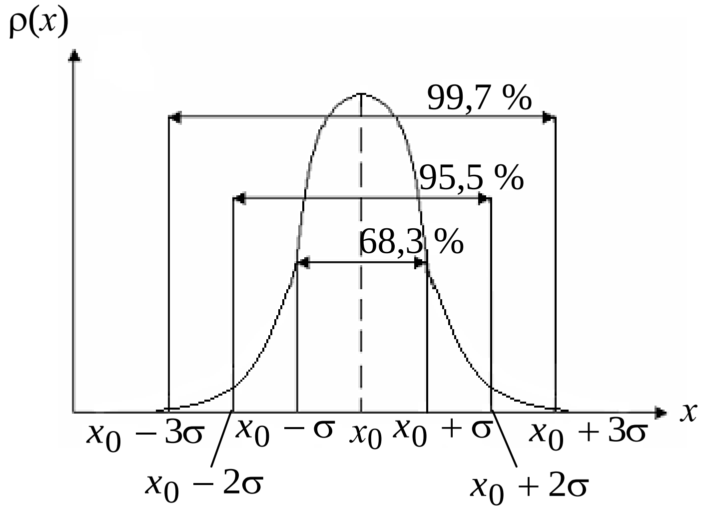

Рис. 5

Чтобы определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала с границами $\pm\Delta x$ при известной среднеквадратичной погрешности σ, необходимо рассчитать коэффициент $t_\alpha = \Delta x / \sigma$.

Соответствующие ему значения $P_д$ приводятся в таблицах коэффициентов Стьюдента в справочной литературе, например, на сайте http://learning.itsoft.ru/coding/first/lab00/koef.htm. Обратная задача – определение границ доверительного интервала по заданному значению $P_д$ – решается с помощью тех же таблиц.

При малом числе измерений ($n < 30$) кривая распределения ошибок отличается от нормального распределения Гаусса. В этом случае более точные результаты дает так называемое t-распределение Стьюдента. Кривые распределения Стьюдента при разных n внешне похожи на колоколообразную кривую распределения Гаусса, но их максимум тем ниже, чем меньше n. С увеличением n распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению Гаусса и при $n > 30$ уже совпадает с ним настолько хорошо, что может быть заменено формулой Гаусса (1).

Такой вид кривых t-распределения приводит к измененным (расширенным) границам доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности. В этом случае величина доверительного интервала определяется не только значением $\alpha = P_д$, но и количеством измерений n, а для расчета границ интервала Δx используют соотношение $\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot \sigma$. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$ табулируются для разных значений α и n. При $n \to \infty$ они переходят в коэффициенты t_α, введенные для распределения Гаусса. В частности, значения коэффициентов Стьюдента для двух значений доверительной вероятности и некоторых значений n приведены ниже в табл. 1.

Таблица 1

n	3	4	5	7	10	15	20	30	∞
$t_{0,9}$	2,92	2,35	2,13	1,94	1,83	1,76	1,73	1,70	1,64
$t_{0,95}$	4,30	3,18	2,78	2,45	2,26	2,14	2,09	2,04	1,96.

Видно, что численное значение этих коэффициентов, а значит, и величина доверительного интервала возрастают с уменьшением количества измерений. Наоборот, при $n \geq 8$ различие между рассматриваемыми коэффициентами составляет уже менее 20 %.

Тот факт, что истинное значение измеряемой величины x_0 с заданной доверительной вероятностью лежит в пределах доверительного интервала, можно записать в виде неравенства

$$x_0 - t_{\alpha,n} \cdot \sigma \leq x_0 \leq x_0 + t_{\alpha,n} \cdot \sigma,$$

но обычно окончательный результат представляют в виде

$$x = x_0 \pm t_{\alpha,n} \cdot \sigma. \qquad (2)$$

Для расчета значения $\alpha = P_д$ выбирают в соответствии с требованиями надежности (обычно 0,90–0,95). При проведении учебных измерений, как правило, используется доверительная вероятность 0,683, при которой границы интервала приближенно равны ±σ даже при небольшом (например, $n = 5$) числе измерений. Поскольку здесь $t_{\alpha,n} \approx 1$, то окончательный результат может быть представлен в более простом виде:

$$x = x_0 \pm \sigma. \qquad (3)$$

Последовательность обработки результатов прямых измерений

При проведении учебных лабораторных экспериментов основной задачей является правильное нахождение величин, входящих в формулу (3), по результатам ограниченного числа измерений. В математической статистике показано, что за истинное значение x_0 измеряемой n раз величины x можно принять среднее арифметическое значение x_0 всех полученных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а именно

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (4)$$

Величина $\bar{x}$ является наилучшим приближением к истинному значению x_0, но все же не дает его точного значения.

Степень разброса этих результатов относительно среднего значения $\bar{x}$ на практике характеризуется среднеквадратичной (случайной) погрешностью (среднеквадратичным отклонением) среднего арифметического серии измерений $\overline{\Delta x} = \sigma$, которая рассчитывается по формуле

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \qquad (5)$$

Среднеквадратичная погрешность среднего арифметического серии измерений дает приближенное значение стандартной ошибки σ.

Из соотношения для $\overline{\Delta x}$ видно, что эта погрешность может быть уменьшена за счет увеличения числа измерений n. Обычно при проведении лабораторных работ ограничиваются серией из пяти (n = 5) измерений. При $n \to \infty$ приближенные соотношения становятся точными, т.е. $\bar{x} = x_0, \overline{\Delta x} = \sigma$.

Для точной оценки результатов измерений учета одних только случайных погрешностей недостаточно. Приборная систематическая погрешность $\Delta x_{пр}$, обусловленная несовершенством измерительной аппаратуры, связана с точностью измерений прибора Δ соотношением

$$\Delta x_{пр} = \Delta/2. \qquad (6)$$

Как правило, точность измерений прибора Δ указывается в паспорте или на нем самом. При отсутствии паспорта или указаний на приборе обычно считают, что приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ равна половине цены наименьшего деления его шкалы, а если его стрелка перемещается не равномерно, а скачками (как у секундомера), то приборную погрешность считают равной цене наименьшего деления шкалы.

Полная абсолютная погрешность прямого измерения вычисляется по формуле

$$\Delta x_{полн} = \sqrt{\left(\overline{\Delta x}\right)^2 + \left(\Delta x_{пр}\right)^2}. \qquad (7)$$

Относительная погрешность прямого измерения, характеризующая его качество и обычно выражающаяся в процентах, рассчитывается следующим образом:

$$\varepsilon_x = (\Delta x_{полн} / \bar{x})100\,\%. \qquad (8)$$

Окончательный результат прямого измерения представляется в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{полн}. \qquad (9)$$

Последовательность обработки результатов косвенных измерений

При косвенном измерении значение искомой величины вычисляется по известной зависимости $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ между ней и непосредственно измеряемыми величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этом случае сначала по формулам

(4)–(9) обрабатываются результаты прямых измерений каждой величины x_i и представляются в виде

$$x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_{i\text{полн}}.$$

Далее рассчитывается истинное значение величины *f*:

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ – средние значения измеренных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Абсолютная погрешность Δf величины f связана с полными абсолютными погрешностями $(\Delta x_{i\text{полн}})$ прямых измерений и с видом самой функции *f*. В общем случае она вычисляется по формуле

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_{1\,\text{полн}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_{2\,\text{полн}}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_{n\,\text{полн}}^2}, \qquad (10)$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – частные производные функции f по независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятые при средних значениях аргументов.

Относительная погрешность косвенного измерения величины f определяется по формуле

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\bar{f}} 100\,\%. \qquad (11)$$

В некоторых случаях, используя готовые формулы, проще сначала найти относительную погрешность ε_f, а уже потом рассчитать абсолютную:

$$\Delta f = \varepsilon_f \, \bar{f}. \qquad (12)$$

В любом случае окончательный результат должен быть представлен в виде

$$f = \bar{f} \pm \Delta f. \qquad (13)$$

Формулы, позволяющие рассчитать абсолютные и относительные погрешности в случае некоторых простых функциональных зависимостей, приведены в табл. 2. Заметим, что в этих случаях формулы для расчета относительной погрешности имеют более простой вид.

В табл. 2 x и y – непосредственно измеряемые физические величины; C, α, β – численные коэффициенты; f – косвенно измеряемая величина; Δx, Δy – полные абсолютные погрешности прямых измерений.

Таблица 2

Вид функции f	Абсолютная погрешность Δf	Относительная погрешность ε_f
$f = C(x \pm y)$	$\Delta f = C\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{x \pm y}$
$f = Cxy$	$\Delta f = C\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = \dfrac{Cx}{y}$	$\Delta f = C\dfrac{x}{y}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$f = Cx^{\alpha}y^{\beta}$	$\Delta f = C\,x^{\alpha}y^{\beta}\sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\varepsilon_f = \sqrt{\alpha^2\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}$

Округление результатов прямых измерений

Для округления результатов прямых измерений приняты следующие правила:

• при записи погрешности Δx ее необходимо округлить до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры – в остальных случаях (значащими называются все цифры числа, кроме нулей, расположенных левее первой его цифры, отличной от нуля);

• округление чисел производится в соответствии со следующими правилами:

– если первая отбрасываемая справа цифра меньше 5, то стоящая перед ней цифра остается неизменной;

– если первая отбрасываемая справа цифра больше 5, то стоящая перед ней цифра возрастает на единицу;

– в случае, когда отбрасываемая цифра равна 5 и после нее следуют цифры больше нуля, стоящая перед ней цифра увеличивается на единицу;

• при записи среднего значения $\bar{x}$ последней дается цифра того десятичного разряда, который используется при указании погрешности.

При этом общий множитель, соответствующий порядку величины, выносится за скобки.

Например, правильная запись может иметь вид:

$$(1{,}63 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-19} \text{Кл.}$$

Необходимая точность промежуточных результатов определяется тем, что расчет не должен вносить в окончательный итог дополнительной погрешности, поэтому в промежуточных вычислениях следует сохранить один лишний знак, который при записи окончательного варианта отбрасывается.

Точность обработки результатов измерений должна согласовываться с точностью самих измерений. Все лишние цифры нужно отбросить.

Графическое представление результатов измерений

Очень часто результат исследования представляют графическим способом, основным достоинством которого является его наглядность. При построении графиков нужно выполнить следующие правила:

- на оси абсцисс откладываем независимую переменную, задавая масштаб, а по оси ординат – величины, зависящие от нее;
- масштаб выбирается таким образом, чтобы наносимые экспериментальные точки не сливались друг с другом; в противном случае информативность графика резко падает;
- графики следует чертить на миллиметровой бумаге; на осях координат откладываются значения величин в выбранном масштабе, который должен быть простым: одной миллиметровой клетке может соответствовать 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10 и т.д. единиц измеряемой величины, других масштабов (2,5; 3; 4; 7 и 8 и т.д.) следует избегать, поскольку в этом случае при нанесении точек придется производить дополнительные арифметические операции в уме; значения экспериментальных величин на осях координат наносить не следует – здесь должны быть только те значения, которые указывают масштаб;
- единицы измерения указываются на осях координат вместе с символом искомой величины, при этом десятичный множитель обычно относится к единице измерения;
- экспериментальные точки рисуют в виде треугольников, кружочков, квадратиков и т.д., при этом опытная точка должна находиться в центре значков; не следует проводить от них прямые к осям координат;

• через экспериментальные точки всегда проводят самую простую (плавную) кривую или прямую, соответствующую их расположению, а не ломанную (по точкам), при этом число точек, лежащих на графике выше и ниже проведенной кривой (прямой), должно быть примерно одинаковым;

• всю работу по построению графиков необходимо делать карандашом, поскольку часто непосредственно в ходе построения приходится вносить дополнительные коррективы.

В качестве примера на рис. 6 представлен построенный в соответствии с указанными рекомендациями график зависимости силы тока *I*, протекающего через гальванометр, от числа делений *n*, на которые отклоняется при этом стрелка гальванометра.

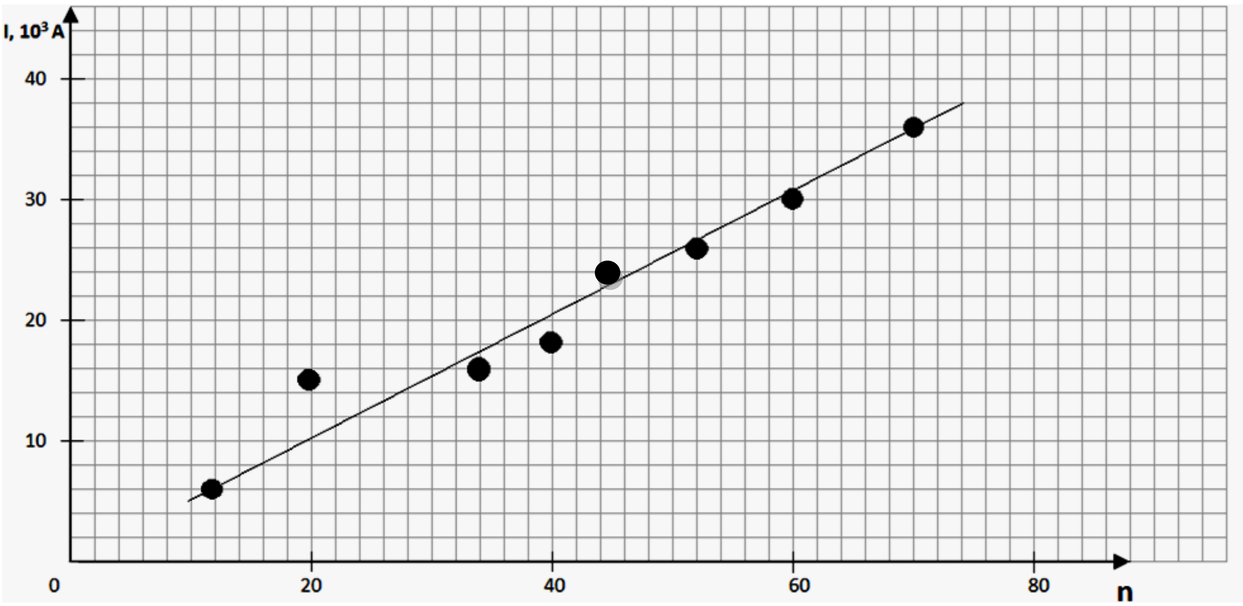

Рис. 6

На практике часто бывает необходимо определить какие-либо физические величины (параметры) на основании эмпирических зависимостей (зависимостей, установленных опытном путем). В этом случае требуется тщательное проведение кривой через экспериментальные точки. Отметим, что в естественных науках широко распространена линейная зависимость. И даже когда эмпирическая зависимость получается нелинейной, график обычно строят в таких координатах, чтобы получить прямую линию. Например, при исследовании закона падения тел результат описывается известным выражением $h = \frac{gt^2}{2}$. Зависимость $h = f(t)$ является параболой, которую на глаз провести невозможно. Однако в координатах

$y=\sqrt{h}$ и $x=t$ она станет линейной. По тангенсу угла наклона этой зависимости можно найти ускорение свободного падения g. Очевидно, что точность определения g непосредственно зависит от точности проведения прямой.

Пример обработки результатов измерений при определении объема сплошного цилиндра с помощью штангенциркуля

Объем V (косвенного измерения) сплошного цилиндра вычисляется по формуле

$$V=\pi\cdot d^2\cdot h/4. \tag{14}$$

Для его нахождения предварительно необходимо провести прямые измерения диаметра d и высоты h цилиндра с помощью штангенциркуля. Предположим, что в результате прямых измерений высоты (h_i) и диаметра (d_i) цилиндра в пяти различных его местах $(i=1\div 5)$ получены значения, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

Номер i измерения	1	2	3	4	5
h_i, мм	20,25	20,15	20,10	20,20	20,15
d_i, мм	30,05	30,10	30,10	30,15	30,05

Обработку результатов прямых измерений проводим в соответствии с описанной выше последовательностью. По формуле (4) вычисляем средние арифметические значения $\overline{h}$ и $\overline{d}$ измеренных величин h_i и d_i соответственно.

$$\overline{h}=\frac{20{,}25+20{,}15+20{,}10+20{,}20+20{,}15}{5}=20{,}17\,\text{мм};$$

$$\overline{d}=\frac{30{,}05+30{,}10+30{,}10+30{,}15+30{,}05}{5}=30{,}09\,\text{мм}.$$

Для определения среднеквадратичных случайных погрешностей $\overline{\Delta h}$ и $\overline{\Delta d}$ вычисляем квадраты отношений $(h_i-\overline{h})^2$ и $(d_i-\overline{d})^2$ измеренных величин h_i и d_i от их средних арифметических значений $\overline{h}$ и $\overline{d}$ (табл. 4).

Таблица 4

Номер i измерений	$\lvert h_i - \bar{h} \rvert$ мм	$(h_i - \bar{h})^2$ мм^2	$\lvert d_i - \bar{d} \rvert$ мм	$(d_i - \bar{d})^2$ мм^2
1	0,08	$64 \cdot 10^{-4}$	0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
2	0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	0,01	$1 \cdot 10^{-4}$
3	0,07	$49 \cdot 10^{-4}$	0,01	$1 \cdot 10^{-4}$
4	0,03	$9 \cdot 10^{-4}$	0,06	$36 \cdot 10^{-4}$
5	0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	0,04	$16 \cdot 10^{-4}$

Используя данные табл. 3, по формуле (5) вычислим среднеквадратичные погрешности $\overline{\Delta h}$ и $\overline{\Delta d}$:

$$\overline{\Delta h} = \sqrt{\frac{64 + 4 + 49 + 9 + 4}{5(5-1)}} \cdot 10^{-2} = 2{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ мм},$$

$$\overline{\Delta d} = \sqrt{\frac{16 + 1 + 1 + 36 + 16}{5(5-1)}} \cdot 10^{-2} = 3{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Результат записан с учетом округления до двух значащих цифр.

На следующем этапе учтем приборную погрешность измерений. Приборная (систематическая) погрешность штангенциркуля $\Delta_{\text{пр}}$ определяется точностью его нониуса, которая указывается на приборе и в нашем случае равна Δ = 0,05 мм. Используя формулу (6), получаем

$$\Delta d_{\text{пр}} = \Delta h_{\text{пр}} = \Delta / 2 = 0{,}05/2 = 0{,}025 \text{ мм}.$$

По формуле (7) находим полные абсолютные погрешности измерений высоты и диаметра цилиндра:

$$\Delta h_{\text{полн}} = \sqrt{2{,}6^2 + 2{,}5^2} \cdot 10^{-2} = 0{,}036 \text{мм},$$

$$\Delta d_{\text{полн}} = \sqrt{3{,}5^2 + 2{,}5^2} \cdot 10^{-2} = 0{,}043 \text{мм}.$$

Окончательные результаты прямых измерений высоты и диаметра цилиндра с учетом правил округления результатов записываем в виде, определяемом формулой (9):

$$h = (20{,}17 \pm 0{,}04)\text{мм}; \qquad d = (30{,}09 \pm 0{,}04)\text{мм}.$$

По формуле (8) вычисляем относительные погрешности измерений высоты и диаметра цилиндра:

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h_{\text{полн}}}{\bar{h}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}04}{20{,}17} \cdot 100\,\% = 0{,}20\,\%,$$

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d_{\text{полн}}}{\bar{d}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}04}{30{,}09} \cdot 100\,\% = 0{,}13\,\%,$$

Для вычисления объема цилиндра по формуле

$$V = \pi d^2 h/4 \tag{15}$$

используем средние арифметические значения $\bar{h}$ и $\bar{d}$:

$$\bar{V} = \pi \bar{d}^{\,2} \bar{h}/4 = 3{,}14 \cdot (30{,}09)^2 \cdot 20{,}17 / 4 = 14335{,}73 \text{ мм}^3.$$

Для вычисления абсолютной погрешности ΔV измерения объема цилиндра используем формулу (10). Так как объем V является функцией двух независимых переменных h и d, т.е. $V = f(h, d)$, то формула (10) для нахождения погрешности измерения объема будет иметь вид

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \Delta h^2_{\text{полн}} + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \Delta d^2_{\text{полн}}}\,, \tag{16}$$

где для нахождения частных производных могут быть использованы соотношения:

$$\frac{\partial V}{\partial d} = (\pi/4) \cdot \bar{h} \cdot 2\bar{d} = \pi\,\bar{h}\,\bar{d}/2 = 3{,}14 \cdot 20{,}17 \cdot 30{,}09 / 2 = 952{,}86 \text{ мм}^3,$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = (\pi/4) \cdot \bar{d}^{\,2} \cdot 1 = (\pi/4) \cdot \bar{d}^{\,2} = 3{,}14 \cdot (30{,}09)^2/4 = 710{,}75 \text{ мм}^3.$$

Произведя вычисления по формуле (16), получим $\Delta V = 48{,}31$ мм^3. При этом относительная погрешность измерения объема равна

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{\overline{V}} \cdot 100\,\% = \frac{48{,}31}{14335{,}73} \cdot 100\,\% = 0{,}337\,\% \cong 0{,}3\,\%.$$

Окончательный результат записываем с учетом правил округления и требований к точности записи результатов измерений

$$V = (14335{,}73 \pm 48{,}31)\ \text{мм}^3 = (14335{,}7 \pm 48{,}3) \cdot 10^{-9}\,\text{м}^3.$$

Отметим, что абсолютную погрешность измерения объема ΔV можно также вычислить через относительную погрешность ε_V, для расчета которой можно использовать формулу из табл. 2 для функции $f = Cx^{\alpha} y^{\beta}$. В нашем случае $f = V$; $C = \pi/4$; $x^{\alpha} = h^1$, $y^{\beta} = d^2$, поскольку $V = (\pi/4)\,\overline{h} \cdot \overline{d}^{\,2}$.

Тогда

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta h_{\text{полн}}}{\overline{h}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta d_{\text{полн}}}{\overline{d}}\right)^2} = \sqrt{(\varepsilon_h)^2 + 4(\varepsilon_d)^2}.$$

В этом случае для вычисления абсолютной погрешности ΔV можно использовать соотношение $\varepsilon_V = \Delta V / \overline{V}$, из которого следует, что

$$\Delta V = \overline{V} \cdot \varepsilon_V .$$

Пример обработки результатов измерений при определении объема пластинки с помощью микрометра

Результаты прямых измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки в пяти различных ее местах представлены в табл. 5.

Таблица 5

Номер i измерения	a_i, мм	b_i, мм	c_i, мм
1	150,03	10,23	3,04
2	150,08	10,12	3,09
3	149,98	10,10	3,08
4	149,99	10,07	3,13
5	150,00	10,01	3,11

По формуле (4) вычисляем средние арифметические значения $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ измеренных величин:

$$\overline{a} = \frac{150{,}03 + 150{,}08 + 149{,}98 + 149{,}99 + 150{,}00}{5} = 150{,}016 \text{ мм},$$

$$\overline{b} = \frac{10{,}23 + 10{,}12 + 10{,}10 + 10{,}07 + 10{,}01}{5} = 10{,}106 \text{ мм},$$

$$\overline{c} = \frac{3{,}04 + 3{,}09 + 3{,}08 + 3{,}13 + 3{,}11}{5} = 3{,}090 \text{ мм}.$$

Находим квадраты отклонений $(a_i - \overline{a})^2, (b_i - \overline{b})^2$ и $(c_i - \overline{c})^2$ измеренных величин a_i, b_i и c_i от их средних арифметических значений $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ соответственно и заносим в табл. 6.

Таблица 6

Номер i измерения	$(a_i - \overline{a})^2$, мм^2	$(b_i - \overline{b})^2$, мм^2	$(c_i - \overline{c})^2$, мм^2
1	$0{,}1^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$0{,}12^2 = 144 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}05)^2 = 25 \cdot 10^{-4}$
2	$0{,}06^2 = 36 \cdot 10^{-4}$	$0{,}01^2 = 1 \cdot 10^{-4}$	0
3	$(-0{,}04)^2 = 16 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}01)^2 = 1 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}01)^2 = 1 \cdot 10^{-4}$
4	$(-0{,}03)^2 = 9 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}04)^2 = 16 \cdot 10^{-4}$	$0{,}04^2 = 16 \cdot 10^{-4}$
5	$0{,}02 = 4 \cdot 10^{-4}$	$(-0{,}1)^2 = 100 \cdot 10^{-4}$	$0{,}02^2 = 4 \cdot 10^{-4}$

По формуле (5) вычисляем среднеквадратичные погрешности $\Delta\overline{a}$, $\Delta\overline{b}$ и $\Delta\overline{c}$ пяти измерений длины (a_i), ширины (b_i) и толщины (c_i) пластинки:

$$\Delta\overline{a} = \sqrt{\frac{100 + 36 + 16 + 9 + 4}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}029 \text{ мм},$$

$$\Delta\overline{b} = \sqrt{\frac{144 + 1 + 1 + 16 + 100}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}036 \text{ мм},$$

$$\Delta\overline{c} = \sqrt{\frac{25 + 0 + 1 + 16 + 4}{5 \cdot 4}} \cdot 10^{-2} = 0{,}015 \text{ мм}.$$

Определяем приборную (систематическую) погрешность микрометра. Поскольку точность измерений микрометром Δ определяется точностью его нониуса, который указан на приборе и в нашем случае равен $\Delta = 0{,}01$ мм, то $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}01/2 = 0{,}005$ мм.

По формуле (6) находим полные абсолютные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\Delta a_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}029^2 + 0{,}005^2} = 0{,}029 \text{ мм},$$
$$\Delta b_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}036^2 + 0{,}005^2} = 0{,}036 \text{ мм},$$
$$\Delta c_{\text{полн}} = \sqrt{0{,}015^2 + 0{,}005^2} = 0{,}016 \text{ мм}.$$

Окончательные результаты прямых измерений длины, ширины и толщины пластинки с учетом правил округления записываем в виде, определяемом формулой (8):

$$a = (150{,}02 \pm 0{,}03) \text{ мм};\ \ b = (10{,}11 \pm 0{,}04) \text{ мм};\ \ c = (3{,}09 \pm 0{,}02) \text{ мм}.$$

По формуле (7) вычисляем относительные погрешности измерений длины, ширины и толщины пластинки:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}03}{150{,}02} \cdot 100\,\% = 0{,}02\,\%,$$
$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}04}{10{,}11} \cdot 100\,\% = 0{,}40\,\%,$$
$$\varepsilon_c = \frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}02}{3{,}09} \cdot 100\,\% = 0{,}65\,\%.$$

Для вычисления объема пластинки по формуле

$$V = a \cdot b \cdot c$$

используем средние арифметические значения $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{V} = 150{,}02 \cdot 10{,}11 \cdot 3{,}09 = 4686{,}61 \text{ мм}^3.$$

Абсолютную погрешность измерения объема ΔV удобнее вычислять через относительную погрешность ε_V, для расчета которой используем формулу табл. 2 для функции $f = C \cdot x \cdot y$:

$$\varepsilon_V = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_{\text{полн}}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_{\text{полн}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_{\text{полн}}}{\bar{c}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{150{,}02}\right)^2 + \left(\frac{0{,}04}{10{,}11}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{3{,}09}\right)^2} = 76 \cdot 10^{-4}.$$

Для вычисления абсолютной погрешности ΔV используем соотношение $\varepsilon_V = \Delta V / \overline{V}$, из которого следует, что

$$\Delta V = \overline{V} \cdot \varepsilon_V = 4686{,}61 \cdot 76 \cdot 10^{-4} = 35{,}62 \text{ мм}^3.$$

Окончательный итог записываем с учетом правил округления и требований к точности записи результатов измерений:

$$V = (4686{,}61 \pm 35{,}62) = (4686{,}6 \pm 35{,}6) \text{ мм}^3.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин / А.Н. Зайдель. – СПб.: Лань, 2005. – 112 с.
2. Зайнашева Г.Н. Обработка результатов измерений физических величин / Г.Н. Зайнашева. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2005. – 58 с.
3. Зуева О.С. Учет погрешностей при проведении физических экспериментов / О.С. Зуева, Ю.Ф. Зуев, Т.А. Серебренникова. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2014. – 22 с.
4. Пронкин Н.С. Основы метрологии: практикум по метрологии и измерениям / Н.С. Пронкин. – М.: Логос, 2007. – 392 с.
5. Пронкин Н.С. Основы метрологии динамических измерений / Н.С. Пронкин. – М.: Логос, 2011. – 255 с.
6. Мокров Ю.В. Метрология, стандартизация, сертификация / Ю.В. Мокров. – Дубна: м/н у-т природы, общества и человека, 2007. – 132 с.
7. Гвоздев В.Д. Прикладная метрология: величины и измерения / В.Д. Гвоздев. – М.: МИИТ, 2011. – 72 с.
8. Походун А.И. Экспериментальные методы исследований. Погрешности и неопределенности измерений / А.И. Походун. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. – 112 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие
по дисциплине «Физика»

Составители: **Зуева Ольга Стефановна,**
Зуев Юрий Федорович,
Серебренникова Тамара Александровна

Кафедра физики КГЭУ

Редактор издательского отдела *М.С. Беркутова*
Компьютерная верстка *Т.И. Лунченкова*

Подписано в печать 21.06.16.
Формат 60 × 84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. 5,63. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 500 экз. Заказ № 75/эл.

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,
420066, Казань, Красносельская, 51